Dr. Ir. Agus Wibowo, M.Kom, M.Si, MM

Analisis Matrix Kerangka Struktur Bangunan

YAYASAN PRIMA AGUS TEKNIK

Dr. Ir. Agus Wibowo, M.Kom, M.Si, MM

Analisis Matrix Kerangka Struktur Bangunan

YAYASAN PRIMA AGUS TEKNIK

PENERBIT :
YAYASAN PRIMA AGUS TEKNIK
Jl. Majapahit No. 605 Semarang
Telp. (024) 6723456. Fax. 024-6710144
Email : penerbit_ypat@stekom.ac.id

ISBN 978-634-7695-58-1 (PDF)
9 786347 695581

Analisis Matrix Kerangka Struktur Bangunan

Penulis :
Dr. Ir. Agus Wibowo, M.Kom, M.Si, MM

ISBN : 978-634-7695-58-1 (PDF)

Editor :
Dr. Joseph Teguh Santoso, S.Kom., M.Kom.

Penyunting :
Dr. Mars Caroline Wibowo. S.T., M.Mm.Tech

Desain Sampul dan Tata Letak :
Irdha Yunianto, S.Ds., M.Kom

Penebit :
Yayasan Prima Agus Teknik Bekerja sama dengan
Universitas Sains & Teknologi Komputer (Universitas STEKOM)

Anggota IKAPI No: 279 / ALB / JTE / 2023

Redaksi :
Jl. Majapahit no 605 Semarang
Telp. 08122925000
Fax. 024-6710144
Email : penerbit_ypat@stekom.ac.id

Distributor Tunggal :
Universitas STEKOM
Jl. Majapahit no 605 Semarang
Telp. 08122925000
Fax. 024-6710144
Email : info@stekom.ac.id

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan dengan cara apapun tanpa ijin dari penulis

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas rahmat dan karunia-Nya buku berjudul "*Analisis Matrix Kerangka Struktur Bangunan*" ini dapat diselesaikan dengan baik. Buku ini hadir sebagai respons terhadap kebutuhan akan sumber belajar yang sistematis, komprehensif, dan terstruktur dalam bidang analisis struktur berbasis matriks, khususnya bagi mahasiswa sarjana teknik sipil, teknik mesin, dan program studi terkait yang mendalami mekanika struktur dan metode numerik dalam rekayasa.

Analisis struktur merupakan fondasi utama dalam perancangan dan evaluasi sistem struktur bangunan, jembatan, menara, dan berbagai infrastruktur lainnya. Dalam perkembangan ilmu teknik struktur kontemporer, pendekatan matriks telah menjadi bahasa universal yang menghubungkan teori mekanika bahan, statika, dan kinematika struktur dengan implementasi komputasi modern. Melalui formulasi matriks, kompleksitas perilaku struktur—mulai dari rangka batang, balok, hingga sistem rangka-kolom—dapat direpresentasikan secara ringkas, konsisten, dan siap diproses secara numerik. Buku ini berupaya menjembatani pemahaman konseptual dengan keterampilan prosedural, sehingga pembaca tidak hanya memahami "mengapa" suatu metode bekerja, tetapi juga "bagaimana" menerapkannya secara tepat dan efisien.

Materi dalam buku ini disajikan dalam sembilan bab yang saling berkaitan dan dirancang untuk membangun pemahaman secara bertahap. Bab 1 membuka pembahasan dengan menguraikan hakikat analisis struktur matriks, prinsip dasar, ruang lingkup, komponen-komponen fundamental, metode-metode analisis yang umum digunakan, sistem koordinat struktur, definisi dan sifat derajat kebebasan (DOF), tingkat elemen dan struktur, serta posisi metode matriks dalam relasinya dengan metode elemen hingga. Bab 2 mengembangkan landasan teoretis melalui teori rangka, mencakup pemodelan bangunan rangka-dinding, persamaan dasar elemen batang, serta teori balok Euler–Bernoulli dan Timoshenko yang menjadi dasar pemodelan elemen lentur.

Bab 3 dan Bab 4 masing-masing menitikberatkan pada dua pilar utama analisis struktur: kesetimbangan dan kompatibilitas geometris. Bab 3 membahas kesetimbangan statis pada struktur rangka, gaya elemen dasar, transformasi gaya ujung antara sistem koordinat lokal dan global, keseimbangan dalam sistem acuan global, persamaan kesetimbangan matriks, analisis struktur rangka batang, serta teknik penyusunan otomatis persamaan keseimbangan. Bab 4 melanjutkan dengan konsep kompatibilitas dalam analisis struktur, kompatibilitas dalam sistem referensi lokal, transformasi komponen vektor perpindahan, kompatibilitas dalam sistem referensi global, persamaan matriks kompatibilitas untuk struktur rangka, elemen rangka batang (ujung sendi) dan struktur sambungan sendi, pendekatan master–slave, serta kendala ketidakmampuan memanjang dan ketidaklenturan.

Bab 5 memperdalam fondasi mekanika struktur melalui penerapan prinsip kerja maya (*virtual work*). Bab ini menguraikan tiga persyaratan dasar dalam menganalisis struktur, konsep partikel dan benda tegar, definisi energi regangan virtual dan variasi energi, ekspresi kerja

virtual internal dan eksternal, prinsip perpindahan virtual, kerja virtual komplementer, formulasi energi regangan virtual komplementer aksial, usaha virtual eksternal komplementer pada elemen rangka, prinsip gaya virtual, karakteristik sistem gaya virtual yang dapat diterima secara statis, derivasi hubungan kontragradien gaya–perpindahan, prinsip kerja virtual untuk struktur rangka, medan pergeseran virtual untuk aksi struktural, hingga prinsip kerja virtual komplementer pada struktur rangka. Pembahasan ini memberikan landasan teoretis yang kokoh bagi penurunan metode-metode matriks selanjutnya.

Bab 6 hingga Bab 8 mengembangkan Metode Kekakuan secara komprehensif dalam tiga tingkatan pendekatan. Bab 6 menyajikan pendekatan konseptual, mencakup matriks kekakuan dasar untuk elemen rangka prismatik, matriks kekakuan lengkap, transformasi kekakuan, ringkasan transformasi, serta metode kekakuan dengan pendekatan konseptual dan semi-otomatis. Bab 7 melanjutkan dengan pendekatan kekakuan langsung, membahas perkembangan dan konsep metode kekakuan langsung, persamaan kekakuan lengkap struktur rangka, teknik perakitan berdasarkan kode elemen, prosedur umum analisis struktur, serta perlakuan terhadap elemen rangka dengan pelepasan gaya ujung. Bab 8 mengorientasikan pembahasan ke aspek komputasi, mencakup prosedur komputasi analisis struktur, algoritma umum, diagram alir program komputer, data masukan, perakitan matriks kekakuan struktur, perakitan vektor beban ekuivalen, substitusi balik untuk menentukan perpindahan titik simpul, serta penentuan perpindahan ujung elemen, gaya ujung, dan reaksi tumpuan. Rangkaian bab ini dirancang agar pembaca mampu beralih dari pemahaman analitik ke implementasi algoritmik yang siap diprogram.

Sebagai penutup, Bab 9 menyajikan Metode Fleksibilitas sebagai perspektif alternatif dalam analisis matriks. Bab ini menguraikan metode gaya matriks, persamaan fleksibilitas struktur untuk sistem statis tentu, serta pendekatan fleksibilitas untuk sistem statis tak tentu. Pembahasan ini melengkapi wawasan pembaca mengenai dualitas antara pendekatan kekakuan dan fleksibilitas, serta memberikan alternatif solusi untuk masalah struktur dengan karakteristik tertentu.

Buku ini ditujukan terutama bagi mahasiswa sarjana yang sedang mempelajari analisis struktur lanjutan, mekanika bahan tingkat lanjut, atau metode numerik dalam teknik struktur. Namun, materi yang disajikan juga diharapkan dapat bermanfaat bagi dosen, peneliti, dan praktisi yang membutuhkan rujukan sistematis mengenai formulasi matriks dalam analisis struktur. Penulisan naskah ini mengupayakan konsistensi notasi, kejelasan alur penurunan persamaan, serta keseimbangan antara rigor matematis dan intuisi mekanika, sehingga pembaca dapat membangun pemahaman yang mendalam sekaligus aplikatif.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa naskah ini masih jauh dari sempurna. Keterbatasan waktu, ruang, dan kapasitas keilmuan tentu mempengaruhi kualitas sajian. Oleh karena itu, saran, kritik, dan masukan konstruktif dari para pembaca, rekan sejawat, dosen, dan praktisi sangat diharapkan untuk penyempurnaan edisi-edisi berikutnya. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan dukungan, baik secara langsung maupun tidak langsung, dalam proses penyusunan buku ini.

Akhir kata, semoga buku ini dapat memberikan kontribusi nyata bagi perkembangan keilmuan teknik struktur di Indonesia, memperkaya literatur akademik berbahasa Indonesia, dan mendukung proses pembelajaran yang lebih mendalam, terstruktur, dan aplikatif bagi generasi insinyur masa depan.

Semangat & Selamat Membaca….!!!!!

Semarang, September 2026
Penulis

Dr. Ir. Agus Wibowo, M.Kom, M.Si, MM

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR ..... **i**
DAFTAR ISI ..... **iv**
BAB 1 PENDAHULUAN **1**
1.1 Analisis Struktur Matriks: Hakikat Dan Perannya 1
1.2 Prinsip Dasar Dan Ruang Lingkup Analisis Struktur 2
1.3 Komponen Dasar Analisis Struktur 2
1.4 Metode Analisis Struktur 5
1.5 Sistem Koordinat Struktur 7
1.6 Definisi Dan Sifat Derajat Kebebasan (DOF) 8
1.7 Tingkat Elemen Dan Struktur 10
1.8 Ruang Lingkup Metode Matriks Dan Metode Elemen Hingga 13
BAB 2 TEORI RANGKA **16**
2.1 Pemodelan Bangunan Rangka-Dinding 16
2.2 Persamaan Dasar Elemen Batang 16
2.3 Teori Balok: Euler–Bernoulli Dan Timoshenko 22
BAB 3 PERSAMAAN KESETIMBANGAN **45**
3.1 Kesetimbangan Statis Pada Struktur Rangka 45
3.2 Gaya Elemen Dasar Dan Kesetimbangan Rangka 2D 45
3.3 Transformasi Gaya Ujung Antara Sistem Koordinat Lokal Dan Global 49
3.4 Keseimbangan Dalam Sistem Acuan Global: Elemen Rangka 53
3.5 Persamaan Kesetimbangan Matriks Untuk Struktur Rangka 54
3.6 Analisis Struktur Rangka Batang 69
3.7 Penyusunan Otomatis Persamaan Keseimbangan 77
BAB 4 KOMPATIBILITAS GEOMETRIS **84**
4.1 Konsep Kompatibilitas Dalam Analisis Struktur 84
4.2 Kompatibilitas Dalam Sistem Referensi Lokal: Elemen Rangka 86
4.3 Transformasi Komponen Vektor Perpindahan 96
4.4 Kompatibilitas Dalam Sistem Referensi Global 100
4.5 Persamaan Matriks Kompatibilitas Untuk Struktur Rangka 102
4.6 Elemen Rangka Batang (Ujung Sendi) Dan Struktur Sambungan Sendi 110
4.8 Pendekatan Master-Slave 119
4.9 Kendala Ketidakmampuan Memanjang Dan Ketidaklenturan 126
BAB 5 PENERAPAN PRINSIP KERJA MAYA **140**
5.1 Tiga Persyaratan Dasar Dalam Menganalisis Struktur 140
5.2 Partikel Dan Benda Tegar 141
5.3 Definisi Energi Regangan Virtual Dan Variasi Energi 148
5.4 Ekspresi Kerja Virtual Internal Dan Energi Regangan Virtual 153
5.5 Kerja Virtual Eksternal 164

5.6 Prinsip Perpindahan Virtual 165
5.7 Partikel Dan Benda Tegar 171
5.8 Kerja Virtual Komplementer 174
5.9 Formulasi Energi Regangan Virtual Komplementer Aksial 175
5.10 Usaha Virtual Eksternal Komplementer: Elemen Rangka 183
5.11 Prinsip Gaya Virtual: Elemen Rangka 184
5.12 Karakteristik Sistem Gaya Virtual Yang Dapat Diterima Secara Statis 186
5.13 Derivasi Hubungan Kontragradien Gaya–Perpindahan 191
5.14 Prinsip Kerja Virtual Untuk Struktur Rangka 198
5.15 Medan Pergeseran Virtual Untuk Aksi Struktural 203
5.16 Prinsip Kerja Virtual Komplementer: Struktur Rangka 209
BAB 6 METODE KEKAKUAN PENDEKATAN KONSEPTUAL 216
6.1 Pendekatan Matriks Dalam Analisis Struktur Rangka 216
6.2 Matriks Kekakuan Dasar Untuk Elemen Rangka Prismatik 216
6.3 Matriks Kekakuan Lengkap Untuk Elemen Rangka 218
6.4 Transformasi Kekakuan 227
6.5 Ringkasan Transformasi Kekakuan 236
6.6 Metode Kekakuan: Pendekatan Konseptual 237
6.7 Metode Kekakuan: Pendekatan Semi-Otomatis 251
BAB 7 METODE KEKAKUAN II PENDEKATAN KEKAKUAN LANGSUNG 266
7.1 Perkembangan Dan Konsep Metode Kekakuan Langsung 266
7.2 Persamaan Kekakuan Lengkap Struktur Rangka 267
7.3 Perakitan Persamaan Kekakuan Struktur Rangka 268
7.4 Teknik Perakitan Berdasarkan Kode Elemen 286
7.5 Prosedur Umum Analisis Struktur Dengan Metode Kekakuan Langsung 295
7.6 Elemen Rangka Dengan Pelepasan Gaya Ujung 303
BAB 8 METODE KEKAKUAN III ALGORITMA BERORIENTASI KOMPUTER 313
8.1 Prosedur Komputasi Analisis Struktur 313
8.2 Algoritma Umum 313
8.3 Diagram Alir Program Komputer 314
8.4 Data Masukan 315
8.5 Perakitan Matriks Kekakuan Struktur 331
8.6 Perakitan Vektor Beban Ekuivalen 333
8.7 Substitusi Balik Untuk Menentukan Perpindahan Titik Simpul 334
8.8 Penentuan Perpindahan Ujung Elemen, Gaya Ujung, Dan Reaksi Tumpuan 336
BAB 9 METODE FLEKSIBILITAS 338
9.1 Metode Gaya Matriks 338
9.2 Persamaan Fleksibilitas Struktur: Sistem Statis Tentu 339
9.3 Pendekatan Fleksibilitas: Sistem Statis Tak Tentu 349
DAFTAR PUSTAKA 362

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 ANALISIS STRUKTUR MATRIKS: HAKIKAT DAN PERANNYA

Statika, Dinamika, Mekanika Bahan, dan Analisis Struktur Dasar merupakan serangkaian mata kuliah inti rekayasa struktur dalam sebagian besar kurikulum teknik sipil. Mata kuliah terakhir tersebut membekali mahasiswa dengan kemampuan untuk menentukan reaksi, lendutan, dan gaya dalam pada struktur statis tertentu (*statically determinate*) maupun statis tak tentu (*statically indeterminate*) di bawah pembebanan statis. Selain pendekatan vektor, pendekatan skalar (energi) juga telah diperkenalkan. Pada umumnya, permasalahan yang dibahas terbatas pada masalah dua dimensi. Masalah tiga dimensi jarang ditemui dalam mata kuliah tersebut karena penekanannya terletak pada perhitungan manual.

Namun, mahasiswa yang ingin mengambil spesialisasi di bidang rekayasa struktur dan mekanika struktur harus menempuh mata kuliah analisis struktur yang lebih lanjut, seperti Analisis Struktur Matriks. Gambar 1.1 memperlihatkan urutan umum mata kuliah rekayasa struktur. Terlihat bahwa Analisis Struktur Matriks berada pada tingkat ketiga dari rangkaian panjang mata kuliah rekayasa struktur tersebut. Meskipun demikian, mata kuliah ini menjadi penghubung krusial antara mata kuliah rekayasa struktur tingkat sarjana dan pascasarjana. Oleh karena itu, tidak mengherankan jika materi ini kerap muncul dalam Ujian Komprehensif, Ujian Pendahuluan, dan Ujian Kualifikasi pada Program Rekayasa Struktur dan Mekanika Struktur (misalnya di University of Colorado at Boulder, AS). Analisis Struktur Matriks atau Analisis Struktur Lanjut secara otomatis mengharuskan mahasiswa untuk terlibat dalam implementasi komputer. Oleh karena itu, dalam buku teks ini, dipandang perlu untuk memberikan penekanan yang seimbang baik pada metode klasik maupun metode modern dalam analisis struktur, serta membangun pemahaman yang komprehensif mengenai analisis struktur berbantuan komputer.

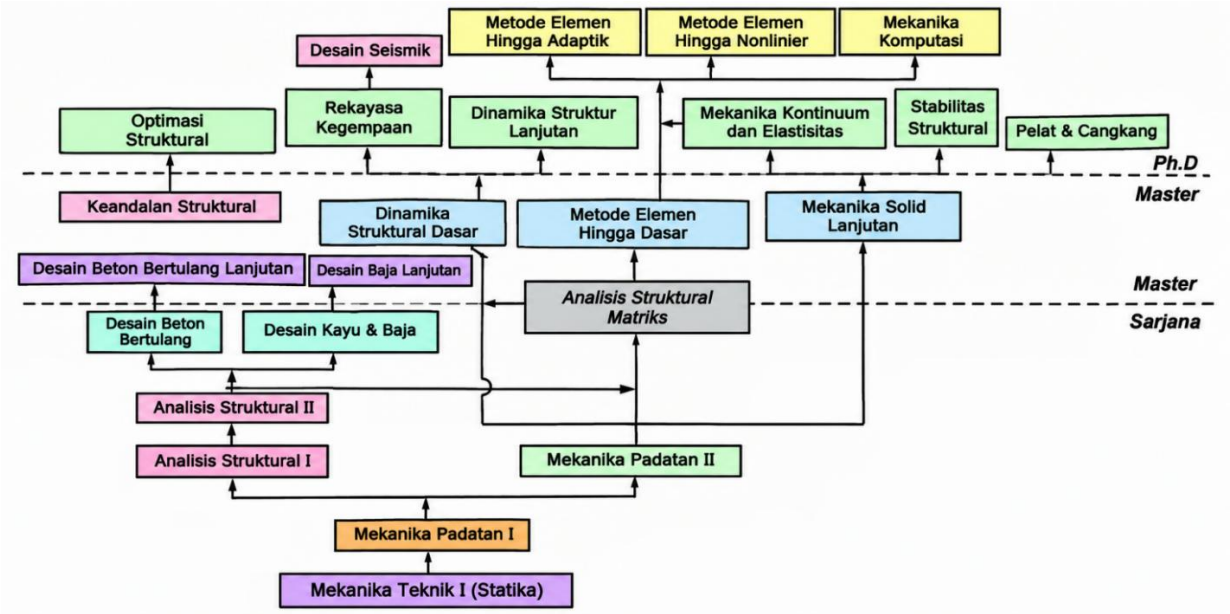
Dalam praktik rekayasa struktur saat ini, perangkat lunak komputer melakukan sebagian besar, jika bukan seluruh, analisis struktur. Sebagai insinyur struktur, seseorang tidak boleh hanya sekadar menggunakannya, melainkan harus berupaya memahami apa yang terjadi di dalam "kotak hitam" (*black box*) tersebut dengan membangun keyakinan diri yang cukup untuk mampu menelaah dan memodifikasinya guna melakukan tugas-tugas spesifik tertentu, dan yang terpenting, menyadari keterbatasannya.

Analisis struktur matriks juga berfungsi sebagai mata kuliah pengantar untuk analisis elemen hingga (*finite element analysis*) dan mata kuliah lanjutan lainnya. Namun, memahami hubungan dan peran kedua metode analisis ini dianggap sangat penting. Metode elemen hingga melibatkan analisis kontinuum dua atau tiga dimensi. Besaran tak diketahui yang mendasar adalah perpindahan titik simpul (*nodal displacements*), sedangkan gaya dalamnya biasanya berupa tegangan. Meskipun beberapa struktur teknik sipil (misalnya bendungan atau struktur cangkang) memerlukan pemodelan kontinuum dua atau tiga dimensi, sebagian besar struktur teknik sipil dapat dianggap tersusun dari elemen satu dimensi berbentuk batang

(*stick*), seperti balok, gelagar, kolom, dan sebagainya. Pada elemen-elemen ini, karakteristik perpindahan dan gaya dalamnya cenderung lebih kompleks dibandingkan dengan yang terdapat pada elemen hingga kontinum.

1.2 PRINSIP DASAR DAN RUANG LINGKUP ANALISIS STRUKTUR

Secara umum, respons model struktur terhadap serangkaian beban dan perpindahan yang dikenakan ditentukan sepenuhnya oleh perpindahan titik simpul (*nodal*) pada model tersebut. Hal ini berarti bahwa perpindahan internal, deformasi, dan gaya dalam dapat dinyatakan dalam bentuk perpindahan titik simpul. Untuk struktur yang bersifat elastis linear, hubungan antara besaran-besaran tersebut bersifat unik.



Gambar 1.1 Urutan umum mata kuliah rekayasa struktur.

Akibatnya, masalah tersebut dapat diselesaikan baik dengan menghitung perpindahan titik simpul terlebih dahulu (metode perpindahan) maupun dengan memulai dari gaya-gaya dalam (metode gaya). Secara umum, tujuan analisis struktur dapat diringkas sebagai berikut:

- **Diketahui**: Sebuah model struktur dengan geometri dan sifat material tertentu yang dikenai beban serta perpindahan yang telah ditentukan sebelumnya.
- **Dicari**: Perpindahan titik simpul, gaya batang, gaya dalam, deformasi batang, dan reaksi tumpuan yang dihasilkan.

Penting untuk membedakan antara analisis struktur dan analisis tegangan. Tugas utama analisis struktur adalah menentukan reaksi, lendutan, dan gaya dalam, sedangkan tugas analisis tegangan adalah menentukan tegangan pada titik mana pun di dalam struktur.

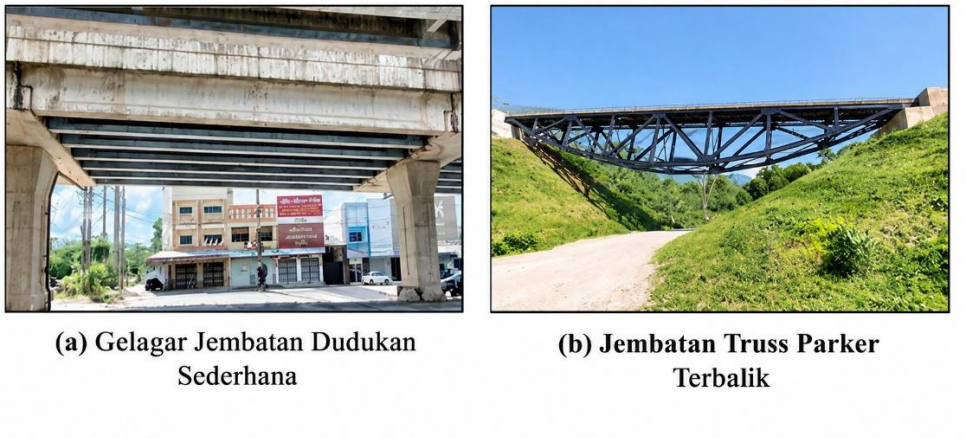
1.3 KOMPONEN DASAR ANALISIS STRUKTUR

Keseimbangan, kompatibilitas, dan kekakuan (atau fleksibilitas) adalah tiga komponen dasar yang diperlukan dalam setiap metode analisis struktur.

Keseimbangan

Syarat pertama yang diperlukan dalam setiap pendekatan analisis struktur adalah keseimbangan. Hal ini berarti bahwa sistem gaya yang bekerja pada struktur secara keseluruhan, pada bagian mana pun, atau pada segmen struktur yang sangat kecil (*infinitesimal*) harus dalam keadaan seimbang. Sering kali terdapat anggapan keliru bahwa syarat keseimbangan hanya berlaku untuk struktur yang menerima beban statis. Anggapan ini tidak benar. Pada kasus struktur yang menerima beban dinamis, syarat keseimbangan juga harus dipenuhi, namun kondisinya terus berubah seiring waktu. Pada setiap saat tertentu, gaya-gaya perlawanan (baik elastis maupun inelastis) harus berada dalam keseimbangan dengan gaya-gaya luar yang bekerja pada struktur. Gaya-gaya luar ini mencakup beban dinamis serta gaya redaman dan gaya inersia. Akibatnya, ditinjau dari prinsip d'Alembert, keseimbangan statis hanyalah kasus khusus dari keseimbangan dinamis, namun tanpa adanya gaya redaman dan gaya inersia.

Struktur statis tertentu (*statically determinate structure*) adalah struktur di mana syarat-syarat keseimbangan sudah cukup untuk menghitung gaya-gaya dalamnya akibat sekumpulan beban luar yang diberikan. Jenis struktur ini termasuk dalam kelompok struktur penting yang banyak dibangun dalam praktik rekayasa. Contoh struktur statis tertentu adalah: gelagar jembatan dengan tumpuan sederhana (Gambar 1.2a) dan jembatan rangka batang (*truss*) tipe Parker terbalik (Gambar 1.2b). Keunggulan paling nyata dari struktur statis tertentu (*statically determinate*) adalah ketidakpekaannya terhadap perubahan suhu atau penurunan tumpuan. Dengan kata lain, gaya-gaya dalam tidak timbul pada struktur tersebut akibat kondisi-kondisi semacam itu. Selain itu, struktur statis tertentu juga berperan penting sebagai struktur dasar dalam proses analisis struktur statis tak tentu (*statically indeterminate*) menggunakan metode gaya.



(a) Gelagar Jembatan Dudukan Sederhana

(b) Jembatan Truss Parker Terbalik

Gambar 1.2 Contoh struktur statis tertentu (*statically determinate*).

Struktur statis tak tentu adalah struktur di mana syarat-syarat keseimbangan tidak cukup untuk menghitung gaya-gaya dalamnya berdasarkan beban luar yang diberikan. Akibatnya, penentuan gaya-gaya dalam untuk beban tertentu tidak sesederhana pada kasus struktur

statis tertentu. Hal ini disebabkan oleh fakta bahwa, secara umum, terdapat lebih dari satu kemungkinan distribusi gaya dalam karena kemampuan struktur tersebut untuk mendistribusikan ulang gaya-gaya dalamnya. Kemampuan redistribusi ini memberikan keamanan struktural tambahan terhadap keruntuhan akibat beban ekstrem atau tidak wajar. Ciri khas lain dari struktur statis tak tentu adalah timbulnya gaya-gaya dalam tanpa adanya beban luar yang nyata ketika struktur mengalami perubahan suhu, rangkak (*creep*), ketidakpasan pemasangan elemen (*lack of fit*), atau penurunan tumpuan. Sebagian besar struktur nyata bersifat statis tak tentu; contohnya adalah rangka atap bentang panjang (Gambar 1.3a) dan bangunan rangka bertingkat banyak (Gambar 1.3b).

(a) Truss Atap Bentang Lebar Gedung Olahraga

(b) Gedung Apartemen Bertingkat Banyak

Gambar 1.3 Contoh struktur statis tak tentu (*statically indeterminate*).

Kompatibilitas

Setiap struktur akan mengalami deformasi begitu tegangan internal (tegangan resultan) terbentuk akibat beban yang diberikan secara mekanis maupun non-mekanis. Akibat adanya tegangan internal tersebut, setiap titik pada struktur berpindah posisi ke titik di sekitarnya. Pada umumnya, pergerakan titik-titik ini berbeda antara satu titik dengan titik lainnya dan bervariasi secara kontinu di dalam struktur. Akibatnya, terjadi perpindahan relatif dan perubahan sudut. Secara keseluruhan, perpindahan relatif dan perubahan sudut ini disebut sebagai "deformasi".

Perlu dicatat bahwa jika tidak terdapat perpindahan relatif atau perubahan sudut relatif antar-titik, hal ini berarti struktur tersebut bergerak secara keseluruhan sebagai benda tegar (*rigid body*). Deformasi umum pada elemen struktur meliputi pemanjangan/pemendekan batang akibat tarik/tekan, rotasi penampang melintang relatif terhadap penampang di dekatnya pada balok yang mengalami lentur, serta defleksi penampang melintang relatif terhadap penampang di dekatnya pada balok yang mengalami geser. "Regangan" (*strain*) umumnya didefinisikan sebagai laju perubahan deformasi. Untuk batang yang mengalami gaya tarik, regangan aksial penampang didefinisikan sebagai perpanjangan per satuan panjang serat; untuk balok yang mengalami momen lentur, kelengkungan penampang didefinisikan sebagai deformasi sudut per satuan panjang balok; dan untuk balok yang mengalami gaya

geser, regangan geser penampang didefinisikan sebagai defleksi relatif per satuan panjang balok. Regangan-regangan penampang ini sering disebut sebagai regangan resultan, dan gaya-gaya yang bersesuaian dengannya disebut sebagai tegangan resultan.

Hubungan geometris antara deformasi dan perpindahan dapat ditentukan semata-mata berdasarkan pertimbangan kompatibilitas atau kinematika. Pada umumnya, kondisi kompatibilitas atau kinematika bersifat nonlinier. Namun, seperti halnya kondisi kesetimbangan, kondisi-kondisi tersebut dapat dilinierisasi dengan asumsi bahwa baik deformasi maupun perpindahan bernilai kecil. Linierisasi ini menyiratkan bahwa pengaruh perpindahan dan deformasi struktur terhadap kesetimbangan struktur diabaikan.

Elemen-elemen struktur tidak dapat berdeformasi secara independen karena elemen-elemen tersebut saling terhubung pada titik-titik simpul (*nodes*) membentuk kerangka struktur. Secara keseluruhan, struktur mengalami perpindahan yang bergantung pada konektivitas antar-elemen serta batasan yang diberikan oleh tumpuannya. Sebagai contoh, perpindahan titik simpul pada struktur rangka batang (*truss*) hanya dapat dihitung jika deformasi aksial seluruh elemen serta batasan akibat konektivitas elemen diperhitungkan secara simultan. Hal ini melahirkan diagram perpindahan Williot-Mohr yang terkenal.

Penerapan penting lainnya dari pertimbangan kinematika adalah pada kondisi keruntuhan struktur. Untuk struktur rangka (*frame*), awal keruntuhan terjadi ketika terbentuk cukup banyak sendi plastis yang menyebabkan struktur berperilaku sebagai suatu mekanisme. Teori garis leleh (*yield line theory*) dikembangkan berdasarkan pertimbangan kinematika pada pelat yang mengalami keruntuhan.

Kekakuan atau Fleksibilitas

Hubungan antara gaya-gaya elemen dan deformasi elemen yang bersesuaian dapat didefinisikan dalam bentuk kekakuan elemen atau fleksibilitas elemen. Kedua sifat ini bersifat dual; kekakuan menunjukkan seberapa kuat elemen menahan gaya, sedangkan fleksibilitas menunjukkan seberapa besar elemen dapat berdeformasi akibat gaya tersebut. Hubungan kekakuan atau fleksibilitas dapat diperoleh berdasarkan sifat material yang diketahui serta hipotesis yang tepat mengenai distribusi tegangan dan regangan pada elemen. Untuk analisis struktur linier, nilai kekakuan bersifat konstan dan hanya bergantung pada sifat geometris elemen, seperti tinggi penampang. Nilai kekakuan ini tidak bergantung pada besarnya deformasi.

1.4 METODE ANALISIS STRUKTUR

Secara umum, metode analisis struktur dapat diklasifikasikan ke dalam dua kategori utama: metode perpindahan dan metode gaya.

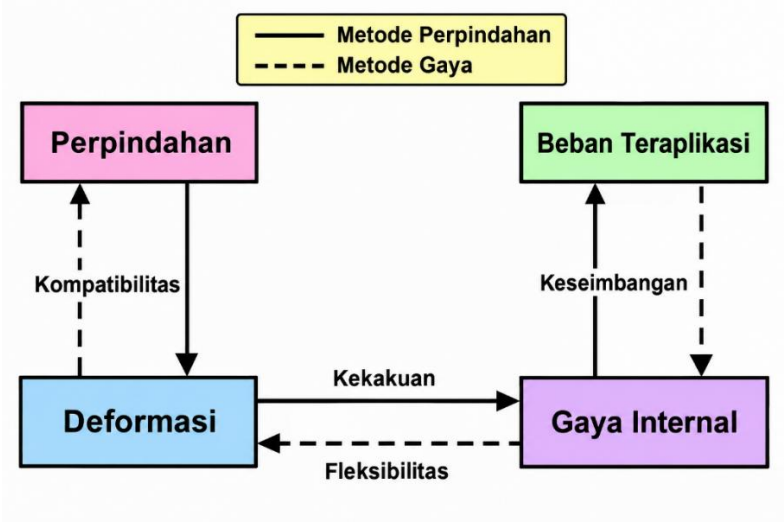
Metode Perpindahan

Dalam metode perpindahan, perpindahan titik simpul (*nodal*) diperlakukan sebagai variabel yang tidak diketahui (*unknowns*) yang mendasar. Besaran masalah bergantung pada derajat ketidaktentuan kinematik. Untuk setiap perpindahan titik simpul, terdapat persamaan kesetimbangan independen yang relevan. Dengan demikian, jumlah persamaan kesetimbangan independen sama dengan jumlah perpindahan titik simpul yang tidak diketahui. Oleh karena itu, jumlah persamaan kesetimbangan independen tersebut mencukupi untuk menentukan nilai perpindahan titik simpul yang tidak diketahui. Karena persamaan kesetimbangan digunakan untuk menentukan perpindahan titik simpul yang tidak diketahui, metode ini juga disebut sebagai "metode kesetimbangan". Karena hubungan kekakuan (*stiffness*) digunakan untuk menyatakan gaya titik simpul dalam bentuk perpindahan titik simpul, metode ini juga dikenal sebagai "metode kekakuan".

Metode Gaya

Layaknya dua sisi mata uang, keberadaan metode perpindahan dan metode gaya secara berdampingan merupakan contoh lain dari dualisme. Dalam metode gaya, sekumpulan gaya reaksi dan/atau gaya internal yang dikenal sebagai gaya redundan diperlakukan sebagai variabel yang tidak diketahui yang mendasar. Jumlah gaya redundan yang dipilih sama dengan derajat ketidaktentuan statik struktur, dan besaran masalah bergantung pada derajat tersebut. Untuk setiap gaya redundan, terdapat kondisi kompatibilitas yang relevan. Akibatnya, jumlah persamaan kompatibilitas sama dengan jumlah gaya redundan yang tidak diketahui. Oleh karena itu, jumlah persamaan kompatibilitas tersebut mencukupi untuk menentukan nilai gaya redundan yang tidak diketahui. Karena persamaan kompatibilitas digunakan untuk menentukan gaya redundan yang tidak diketahui, metode ini juga disebut sebagai "metode kompatibilitas". Karena hubungan fleksibilitas digunakan untuk menyatakan deformasi titik simpul dalam bentuk gaya titik simpul, metode ini juga dikenal sebagai "metode fleksibilitas".

Pada kedua metode tersebut, diperlukan penyelesaian suatu sistem persamaan simultan. Jumlah persamaan simultan ditentukan oleh derajat ketidaktentuan kinematik untuk metode perpindahan dan oleh derajat ketidaktentuan statik untuk metode gaya. Dalam aplikasi rekayasa struktur, derajat ketidaktentuan kinematik dan statik pada struktur nyata umumnya bernilai besar. Oleh karena itu, tugas menyelesaikan sistem persamaan simultan yang besar mungkin tampak mustahil untuk dilakukan tanpa bantuan komputer. Inilah aspek penting dari buku teks ini. Dengan menyusun variabel-variabel yang tidak diketahui tersebut ke dalam bentuk vektor, metode aljabar matriks dapat digunakan dalam proses penyelesaiannya. Hal ini pada akhirnya mengarah pada metode "perpindahan matriks" (*matrix displacement*) dan metode "gaya matriks" (*matrix force*). Apa yang disebut sebagai "Diagram Tonti" (Gambar 1.4) digunakan untuk memvisualisasikan secara skematis peran komponen-komponen dasar yang telah disebutkan sebelumnya, yang diterapkan dalam metode perpindahan dan metode gaya.



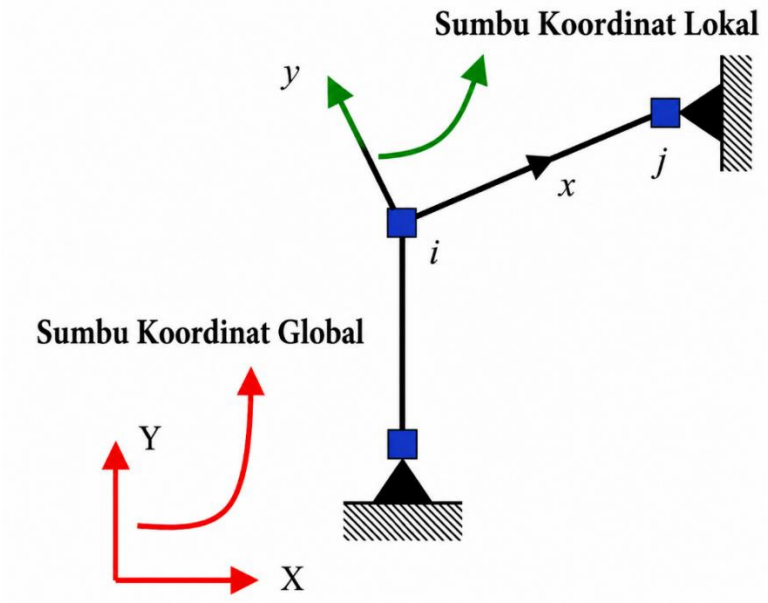
Gambar 1.4 Diagram Tonti untuk Metode Perpindahan dan Metode Gaya.

Dalam praktiknya, hampir seluruh analisis struktur berbasis komputer dilakukan menggunakan metode perpindahan matriks. Hal ini dikarenakan kemudahan dalam pemrograman dan implementasinya pada komputer. Oleh karena itu, buku teks ini akan lebih berfokus pada metode perpindahan. Namun, metode gaya matriks belakangan ini kembali mendapat perhatian karena keunggulannya dalam bidang analisis rangka non-linear, berkat karya perintis oleh Mahasuverachai dan Powell serta Zeris dan Mahin. Pembaca yang memiliki minat besar terhadap model rangka berbasis gaya disarankan untuk meninjau disertasi doktoral dari mahasiswa Prof. F.C. Filippou (University of California, Berkeley, AS) dan Prof. E. Spacone (saat ini di University "G. D'Annunzio" of Chieti, Pescara, Italia, dan sebelumnya di University of Colorado, Boulder, AS).

1.5 SISTEM KOORDINAT STRUKTUR

Biasanya, terdapat dua sistem koordinat Cartesian dasar: sistem referensi ortogonal tangan-kanan lokal atau anggota (sumbu x, y, z) dan sistem referensi ortogonal tangan-kanan global atau struktur (sumbu X, Y, Z), sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 1.5 untuk rangka dua dimensi. Kedua sistem koordinat ini sangat penting dalam komunikasi antara struktur dan anggota-anggota penyusunnya, seperti yang akan dijelaskan pada bab-bab selanjutnya. Meskipun pemilihan titik asal sistem koordinat global bersifat bebas, titik asal sistem koordinat lokal biasanya berimpit dengan salah satu titik simpul ujung elemen. Titik simpul ujung yang berimpit dengan titik asal sistem koordinat lokal dinamakan titik simpul i, sedangkan titik simpul di ujung lainnya dinamakan titik simpul j.

Untuk struktur bidang, hal ini menghasilkan sumbu-y lokal yang unik pada bidang tersebut jika sumbu-z lokal searah dengan sumbu-Z global, yaitu mengarah tegak lurus terhadap bidang ke arah pembaca. Gaya simpul dan perpindahan simpul dianggap positif jika searah dengan sumbu koordinat positif. Momen dan rotasi pada bidang tersebut dianggap positif jika bekerja berlawanan arah jarum jam.



Gambar 1.5 Sumbu Koordinat Lokal dan Global (Struktur Bidang).

1.6 DEFINISI DAN SIFAT DERAJAT KEBEBASAN (DOF)

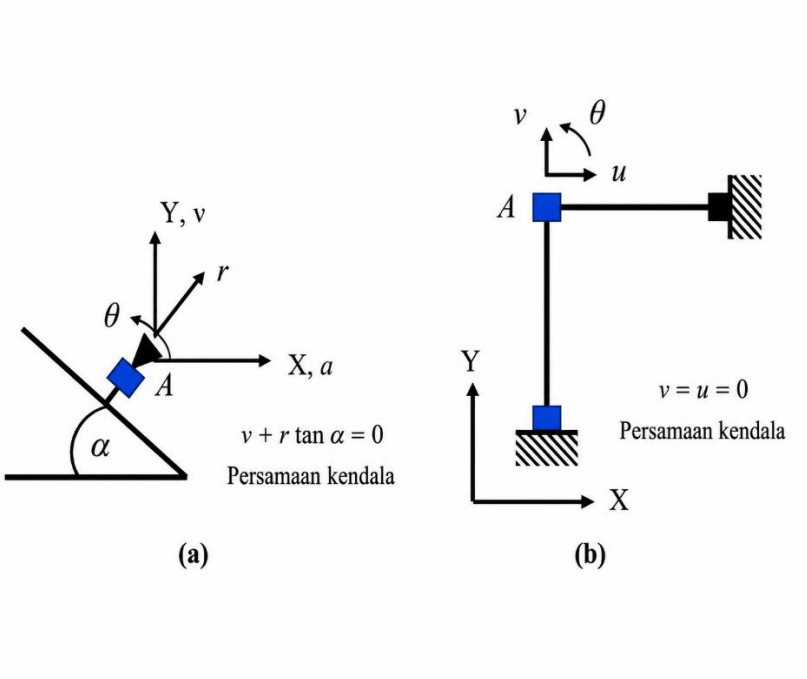
Secara umum, derajat kebebasan (*degree of freedom* atau DOF) suatu struktur sama dengan jumlah minimum komponen independen dari perpindahan tergeneralisasi titik-titik simpul struktur yang diperlukan untuk menentukan posisi konfigurasi struktur yang telah berpindah akibat pembebanan. Istilah "independen" menyiratkan bahwa semua DOF tidak boleh saling bergantung satu sama lain. Dua contoh berikut digunakan untuk memberikan pemahaman mengenai derajat kebebasan yang independen.

Tumpuan rol (Titik Simpul A) pada bidang miring di Gambar 1.6a memiliki tiga perpindahan: rotasi θ, translasi u sepanjang sumbu-X, dan translasi v sepanjang sumbu-Y. Namun, kedua translasi tersebut tidak independen karena terdapat batasan kinematik yang mengharuskan tumpuan rol bergerak mengikuti bidang miring. Akibatnya, hanya terdapat dua perpindahan independen (θ, serta u atau v). Perlu dicatat pula bahwa perpindahan-perpindahan tersebut disebut sebagai perpindahan tergeneralisasi karena istilah ini mencakup baik rotasi maupun translasi.

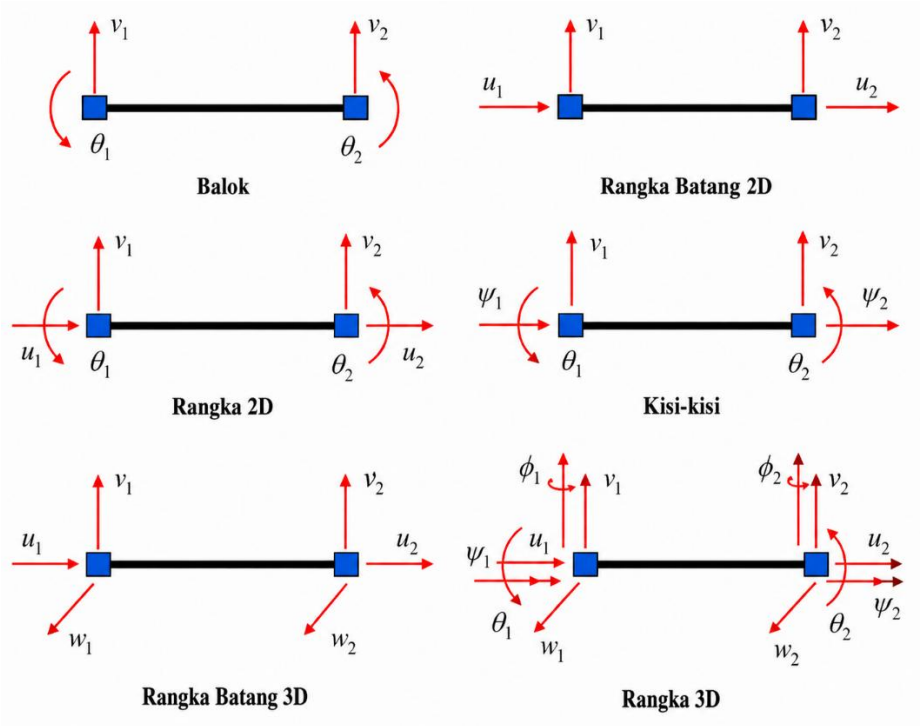
Struktur rangka yang ditunjukkan pada Gambar 1.6b memiliki tiga derajat kebebasan perpindahan: rotasi θ, translasi u sepanjang sumbu-X, dan translasi v sepanjang sumbu-Y, dengan asumsi semua elemen rangka dapat mengalami perubahan panjang (*extensible*). Jika deformasi aksial pada semua elemen rangka tidak diperbolehkan, perpindahan u dan v akan bernilai nol akibat adanya batasan ketidakmampuan elemen untuk berubah panjang (*inextensible*). Dengan demikian, rangka ini hanya memiliki satu derajat kebebasan, yaitu θ. Kondisi dengan batasan ini akan dibahas pada bab selanjutnya.

Bergantung pada jenis strukturnya, mungkin terdapat satu atau beberapa perpindahan pada setiap titik simpul. Pada umumnya, jumlah derajat kebebasan (DOF) dalam koordinat lokal dan global adalah sama. Salah satu pengecualian yang jelas adalah elemen rangka batang (*truss*) dengan dua titik simpul. Dalam koordinat lokal, deformasi aksial dinyatakan oleh satu translasi pada setiap titik simpul, sedangkan dalam koordinat global, deformasi aksial

dinyatakan oleh dua translasi (untuk masalah dua dimensi) atau tiga translasi (untuk masalah tiga dimensi) pada setiap titik simpul.



Gambar 1.6 Perpindahan Bebas. (a) Kendala Tumpuan Miring, (b) Kendala Tak-Dapat-Diperpanjang.



Gambar 1.7 Jenis-jenis Elemen Rangka (Struktur Rangka Batang).

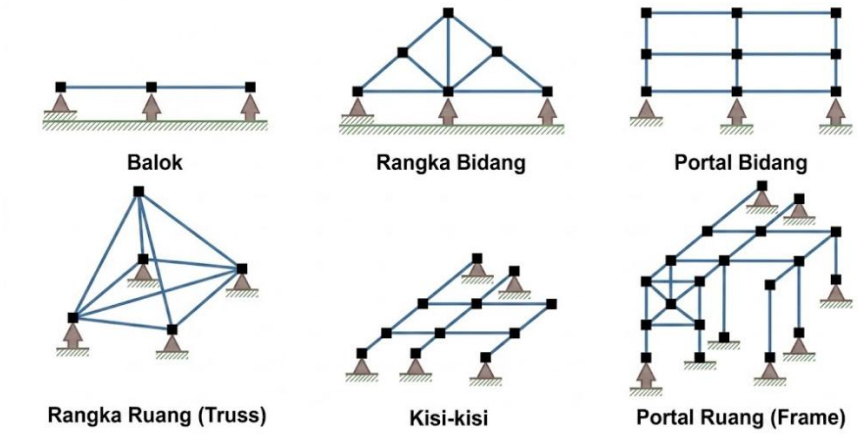
Tabel 1.1 Derajat Kebebasan untuk Berbagai Jenis Elemen Rangka Batang.

Jenis	Node 1	Node 2	K_{local}	K_{global}
Balok 2D	$F_{y1}, M_{z1} v_1, \theta_1$	$F_{y2}, M_{z2} v_2, \theta_2$	4×4	4×4
Rangka Batang 2D	$F_{x1} u_1$	$F_{x2} u_2$	2×2	4×4
Portal 2D	$F_{x1}, F_{y1}, M_{z1} u_1, v_1, \theta_1$	$F_{x2}, F_{y2}, M_{z2} u_2, v_2, \theta_2$	6×6	6×6
Grid	$T_{x1}, F_{y1}, M_{z1} \varphi_1, v_1, \theta_1$	$T_{x2}, F_{y2}, M_{z2} \varphi_2, v_2, \theta_2$	6×6	6×6
Rangka Batang 3D	$F_{x1}, F_{y1}, F_{z1} u_1, v_1, w_1$	$F_{x2}, F_{y2}, F_{z2} u_2, v_2, w_2$	2×2	6×6
Portal 3D	$F_{x1}, F_{y1}, F_{z1}, T_{x1}, M_{y1}, M_{z1} u_1, v_1,$ $w_1, \varphi_1, \theta_1, \theta_1$	$F_{x2}, F_{y2}, F_{z2}, T_{x2}, M_{y2}, M_{z2} u_2,$ $v_2, w_2, \varphi_2, \theta_2, \theta_2$	12×12	12×12

Oleh karena itu, penting untuk memahami derajat kebebasan yang terkait dengan berbagai jenis struktur rangka sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 1.7. Derajat kebebasan (DOF) perpindahan titik simpul dan DOF gaya titik simpul yang bersesuaian untuk berbagai jenis elemen dirangkum dalam Tabel 1.1.

1.7 TINGKAT ELEMEN DAN STRUKTUR

Baik metode matriks perpindahan maupun metode matriks gaya yang digunakan untuk menganalisis struktur, proses analisis dilakukan pada dua tingkat, yaitu tingkat elemen dan tingkat struktur. Dalam buku teks ini, fokus utama akan ditujukan pada struktur rangka (*skeletal*) yang ditunjukkan pada Gambar 1.8.



Gambar 1.8 Jenis-Jenis Struktur Rangka (*Skeletal*).

Pada tingkat elemen, setiap elemen (Gambar 1.7) dianggap secara independen sebagai benda bebas dengan mode benda kaku dalam metode perpindahan matriks (pendekatan kekakuan langsung) dan tanpa mode benda kaku dalam metode gaya matriks (pendekatan fleksibilitas). Sifat-sifat elemen (misalnya matriks kekakuan atau fleksibilitas, vektor beban elemen, dll.) ditentukan. Pada tingkat ini, kuantitas perpindahan atau gaya elemen tertentu diperlakukan

sebagai variabel yang tidak diketahui, dan persamaan elemen dinyatakan dalam variabel yang tidak diketahui ini.

Pada tingkat struktural, persamaan struktural yang dikumpulkan dari persamaan elemen dinyatakan dalam variabel yang tidak diketahui dari semua elemen yang terhubung. Namun, variabel yang tidak diketahui ini saling terkait meskipun diperlakukan secara independen pada tingkat elemen. Akibatnya, diperlukan hubungan antara elemen dan kuantitas struktural. Hal ini dapat dicapai melalui vektor pemetaan elemen (LM). Vektor elemen tertentu ini menghubungkan derajat kebebasan struktural dengan setiap derajat kebebasan elemen. Cara membangun vektor ini paling baik diilustrasikan melalui contoh-contoh berikut. Namun, sebelum melanjutkan lebih jauh, perlu dicatat bahwa pembaca harus memiliki latar belakang yang cukup tentang cara menomori anggota, simpul, dan derajat kebebasan dari suatu struktur yang diberikan. Jika tidak, disarankan untuk merujuk pada buku teksnya tentang analisis struktur dasar.

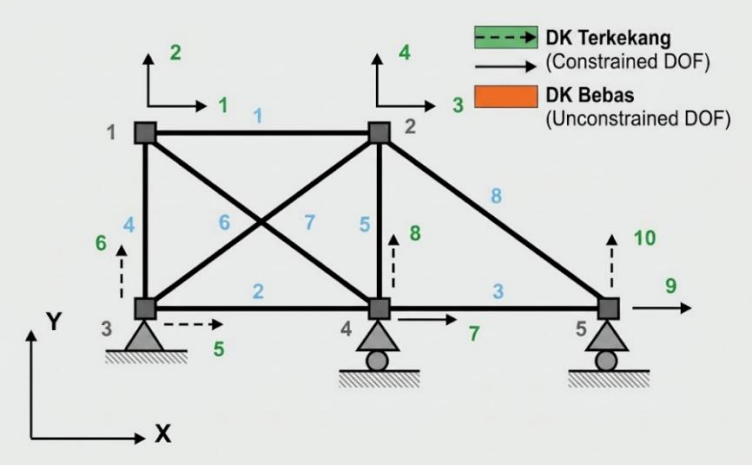
Contoh 1.1

Untuk sistem penomoran anggota, simpul, dan derajat kebebasan yang diberikan untuk rangka yang ditunjukkan pada Gambar 1.9, buatlah vektor pemetaan untuk semua anggota.

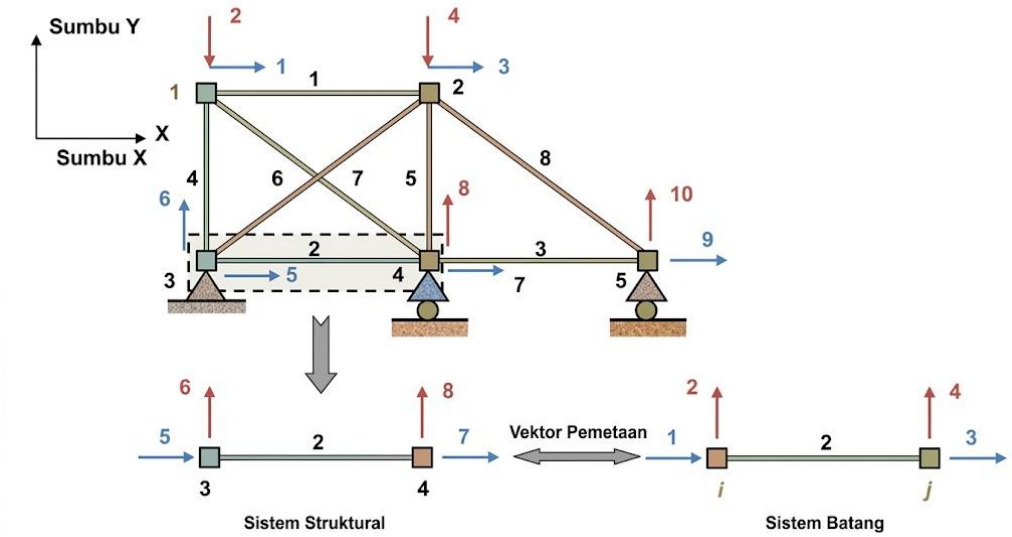
- **Solusi**: Berdasarkan sistem penomoran anggota, simpul, dan derajat kebebasan yang diberikan, vektor pemetaan LM dari anggota 2 adalah

$$LM_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}_{member} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix}_2$$

Hal ini pada dasarnya menunjukkan bahwa DOF elemen 1 terhubung ke DOF struktur 5, DOF elemen 2 terhubung ke DOF struktur 6, DOF elemen 3 terhubung ke DOF struktur 7, dan DOF elemen 4 terhubung ke DOF struktur 8. Proses penyusunan vektor pemetaan LM_2 disajikan secara skematis pada Gambar 1.10.



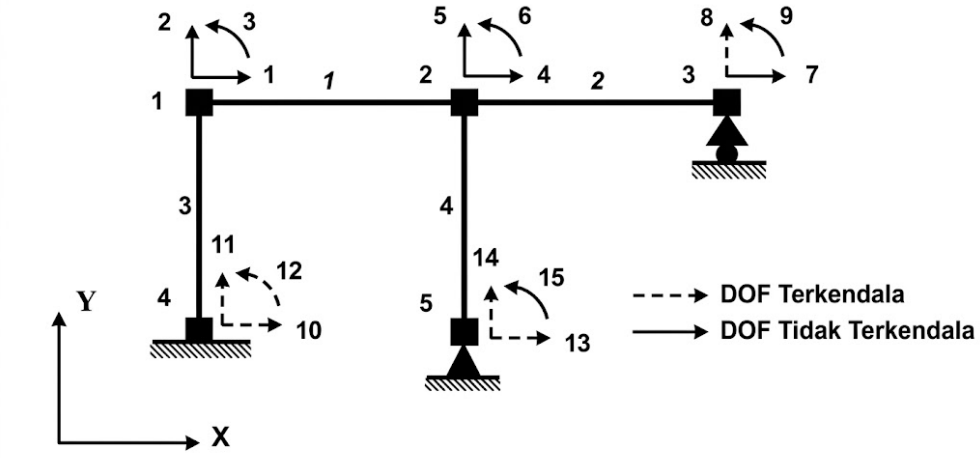
Gambar 1.9 Contoh 1.1.



Gambar 1.10 Contoh 1.1 (Lanjutan).

Dengan mengikuti pendekatan yang sama, vektor pemetaan anggota lainnya adalah

$$LM_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}_1 ; \quad LM_3 = \begin{Bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{Bmatrix}_3 ; \quad LM_4 = \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}_4 ; \quad LM_5 = \begin{Bmatrix} 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}_5 ; \quad LM_6 = \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}_6 ; \quad LM_7 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix}_7 ; \quad LM_8 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \\ 10 \end{Bmatrix}_8 ;$$



Gambar 1.11 Contoh 1.2.

Contoh 1.2

Untuk sistem penomoran anggota, simpul, dan derajat kebebasan (DOF) yang diberikan pada rangka yang ditunjukkan pada Gambar 1.11, buatlah vektor pemetaan untuk semua anggota.

- **Solusi**: Berdasarkan sistem penomoran anggota, simpul, dan derajat kebebasan (DOF) yang diberikan, vektor pemetaan LM dari anggota 1 adalah

$$LM_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}_{member} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}_1$$

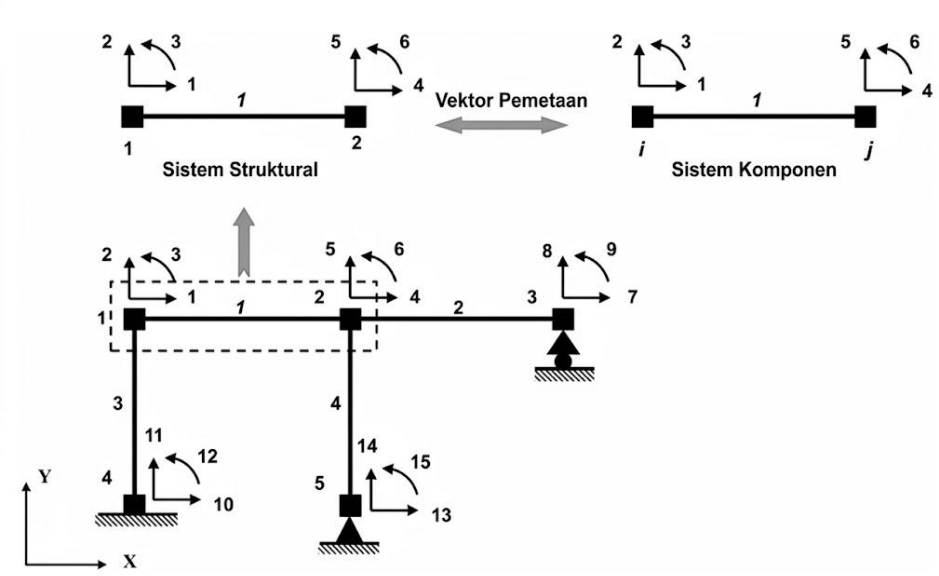
Pada dasarnya ini menunjukkan bahwa anggota DOF 1 terhubung ke struktur DOF 1, anggota DOF 2 terhubung ke struktur DOF 2, anggota DOF 3 terhubung ke struktur DOF 3, anggota DOF 4 terhubung ke struktur DOF 4, anggota DOF 5 terhubung ke struktur DOF 5, dan anggota DOF 6 terhubung ke struktur DOF 6. Proses pembuatan vektor pemetaan LM_1 disajikan secara skematis pada Gambar 1.12. Dengan mengikuti pendekatan ini, vektor pemetaan anggota lainnya adalah

$$LM_2 = \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{Bmatrix}_2 \quad ; \quad LM_3 = \begin{Bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}_3 \quad ; \quad LM_4 = \begin{Bmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}_4$$

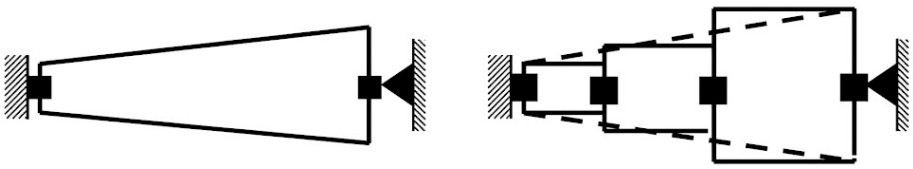
1.8 RUANG LINGKUP METODE MATRIKS DAN METODE ELEMEN HINGGA

Meskipun fokus utama buku teks ini adalah pada metode matriks untuk analisis struktur, ada baiknya memperkenalkan gagasan umum mengenai metode elemen hingga. Pembaca mungkin sudah tidak asing dengan istilah "metode elemen hingga" mengingat popularitasnya di kalangan akademisi dan industri. Metode matriks yang akan dibahas secara mendalam dalam buku teks ini hanya dapat digunakan untuk menganalisis struktur yang terdiri dari balok, rangka (*frame*), dan rangka batang (*truss*).

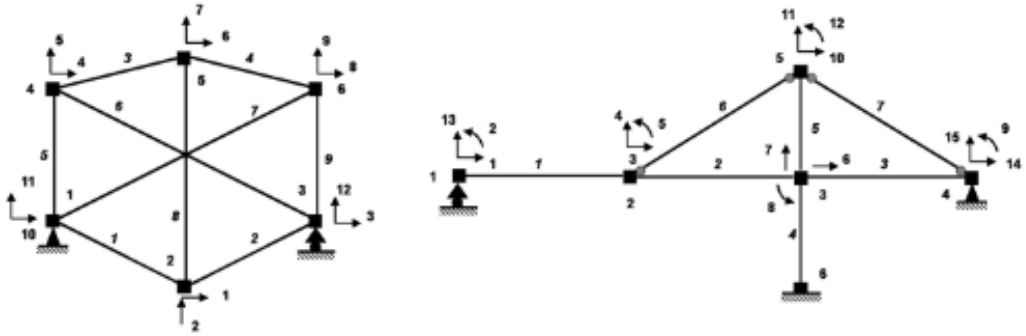
Secara umum, satu elemen rangka saja (seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.7) sudah cukup untuk merepresentasikan setiap komponen struktur, karena hubungan gaya-perpindahan elemen tersebut dapat diturunkan secara "eksak" dengan asumsi-asumsi dasar tertentu (misalnya elemen prismatik, material homogen, dll.). Namun, representasi elemen rangka tunggal ini menjadi tidak valid untuk jenis elemen tertentu, contohnya: balok dengan penampang berubah (*tapered beam*) (lihat Gambar 1.13a) atau balok di atas fondasi elastis. Dalam situasi seperti ini, elemen balok perlu didiskritisasi menjadi sejumlah elemen balok sederhana yang terbatas, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 1.13b.



Gambar 1.12 Contoh 1.2 (Lanjutan).



Gambar 1.13 Idealisasi struktural balok tirus.



Gambar 1.14 Soal 1.1.

Inti dari metode elemen hingga bermula dari pemahaman bahwa mencari solusi yang "baik" untuk keseluruhan domain (misalnya balok dengan penampang berubah) bisa jadi sangat rumit dan hampir mustahil dilakukan. Akibatnya, keseluruhan domain didiskritisasi menjadi beberapa sub-domain (elemen), dan solusi pendekatan disusun hanya di dalam domain setiap elemen berdasarkan prinsip-prinsip energi dan konsep interpolasi.

Hal ini dapat dilakukan karena medan solusi diasumsikan secara terpisah untuk setiap domain elemen, dan integral atas keseluruhan domain solusi yang biasanya muncul dalam

rumusan energi atau usaha dapat dianggap sebagai jumlah dari integral-integral pada berbagai domain elemen tersebut. Pada batasnya, ketika jumlah elemen mendekati tak hingga, solusi pendekatan tersebut pada akhirnya akan konvergen menuju solusi yang sebenarnya. Untuk struktur kontinu (misalnya bendungan, pelat datar) yang tidak dapat dimodelkan dengan elemen rangka, diperlukan elemen dua dimensi atau tiga dimensi seperti elemen segitiga atau tetrahedron untuk memodelkan struktur tersebut; topik ini akan dibahas lebih lanjut dalam mata kuliah Metode Elemen Hingga (lihat Gambar 1.1).

BAB 2
TEORI RANGKA

2.1 PEMODELAN BANGUNAN RANGKA-DINDING

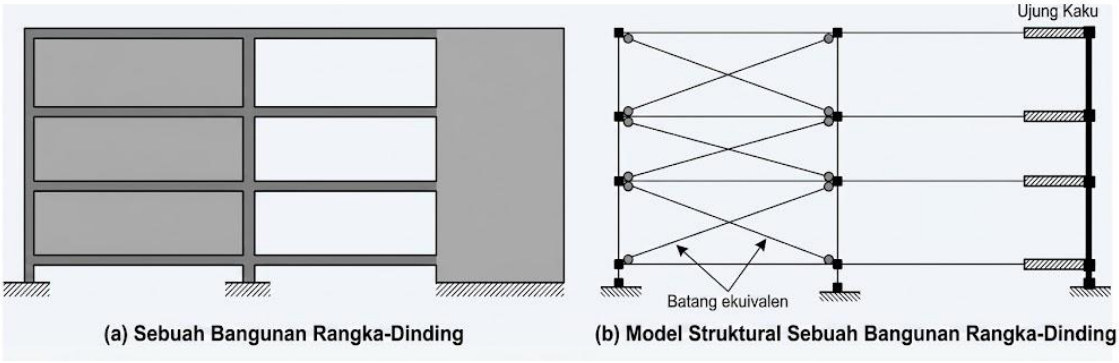
Bangunan dengan sistem rangka-dinding yang diperlihatkan pada Gambar 2.1a terdiri atas balok, kolom, pasangan bata pengisi (*masonry infills*), dan dinding struktural. Berbagai jenis elemen rangka (*skeletal*) yang disajikan dalam Bab 1 dapat dikombinasikan untuk memodelkan bangunan rangka-dinding ini sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2.1b. Balok dapat dimodelkan menggunakan elemen balok Euler-Bernoulli, kolom dapat dimodelkan menggunakan elemen rangka Euler-Bernoulli, pasangan bata pengisi dapat dimodelkan menggunakan elemen batang (*bar*), dan dinding struktural dapat dimodelkan menggunakan elemen rangka Timoshenko. Tujuan utama bab ini adalah menurunkan persamaan diferensial yang mengatur perilaku elemen-elemen rangka tersebut.

Perlu dicatat bahwa di sepanjang elemen rangka, terdapat wilayah di mana teori balok konvensional (teori balok Euler-Bernoulli atau Timoshenko) dapat diterapkan biasanya jauh dari sambungan balok-kolom dan titik pembebanan serta wilayah di mana teori balok konvensional tidak dapat diterapkan (biasanya pada sambungan balok-kolom, corbel, dll.). Wilayah yang pertama disebut sebagai Wilayah-B (*B-Regions*), di mana B merupakan singkatan dari *beam* (balok), sedangkan wilayah yang kedua disebut sebagai Wilayah-D (*D-Regions*), di mana D merupakan singkatan dari *discontinuity* (diskontinuitas), *disturbance* (gangguan), atau detail; wilayah ini harus didiskritisasi menggunakan model elemen hingga kontinuum. Penjelasan lebih lengkap mengenai wilayah B dan D disajikan dalam makalah penting karya Schlaich.

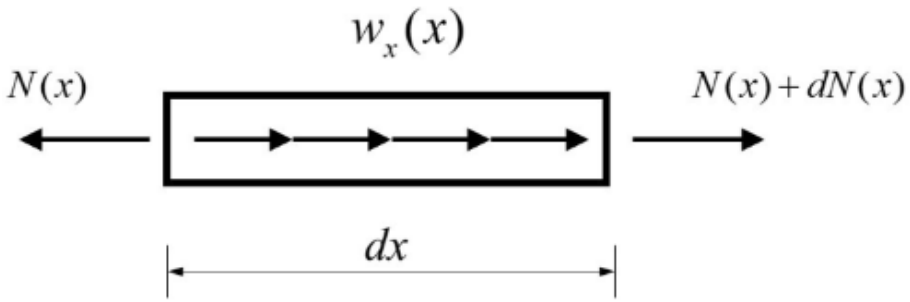
Bab ini hanya berfokus pada wilayah-B dan menurunkan persamaan diferensial yang mengatur teori balok klasik Euler-Bernoulli dan Timoshenko. Sebagai langkah awal, elemen batang (*bar*) dibahas terlebih dahulu bukan balok karena persamaan diferensial yang mengatur jenis elemen ini lebih sederhana dibandingkan dengan persamaan untuk balok. Perlu dicatat bahwa semua persamaan diferensial yang disajikan dalam bab ini diturunkan berdasarkan asumsi bahwa deformasi dan perpindahan bernilai kecil; dengan demikian, persamaan kesetimbangan diterapkan terhadap konfigurasi awal (sebelum deformasi). Selanjutnya, istilah "batang" (*bar*) dan "balok" (*beam*) digunakan untuk menggantikan istilah "rangka" (*frame*) pada bagian-bagian berikutnya agar lebih relevan dengan konteks pembahasan.

2.2 PERSAMAAN DASAR ELEMEN BATANG

Diagram benda bebas dari bagian infinitesimal elemen rangka yang mengalami beban aksial diperlihatkan pada Gambar 2.2. Kondisi kesetimbangan aksial pada batang tersebut menghasilkan persamaan berikut:



Gambar 2.1 Dinding Rangka dan Model Strukturalnya.



Gambar 2.2 Segmen infinitesimal dari sebuah batang.

Keseimbangan:

$$-N(x) + N(x) + dN(x) + w_x(x)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dN(x)}{dx} = -w_x(x) \tag{2.1}$$

dengan $N(x)$ sebagai gaya aksial pada batang dan $w_x(x)$ sebagai beban yang terdistribusi secara aksial. Perlu dicatat bahwa gaya aksial $N(x)$ dapat dianggap sebagai resultan tegangan karena didefinisikan sebagai integral dari tegangan aksial $\sigma_{xx}(x)$ terhadap luas penampang batang A:

$$N(x) = \int_A \sigma_{xx}(x)dA \tag{2.2}$$

Berdasarkan asumsi perpindahan kecil, regangan aksial $\varepsilon_0(x)$ dikaitkan dengan perpindahan aksial $u_0(x)$ melalui persamaan kompatibilitas berikut:
Kompatibilitas:

$$\varepsilon_0(x) = \frac{du_0(x)}{dx} \tag{2.3}$$

Ukuran regangan yang didefinisikan dalam Persamaan (2.3) umumnya dikenal sebagai "regangan teknis uniaksial". Hubungan antara gaya aksial dan regangan aksial didefinisikan melalui hukum konstitutif:
Hukum konstitutif:

$$N(x) = EA(x)\varepsilon_0(x) \tag{2.4}$$

dengan $EA(x)$ adalah kekakuan aksial batang.
Substitusi Persamaan (2.3) dan (2.4) ke dalam Persamaan (2.1) menghasilkan persamaan diferensial yang mengatur sistem:
Persamaan diferensial yang mengatur sistem:

$$\frac{d}{dx}\left[EA(x)\frac{du_0(x)}{dx}\right] = -w_x(x) \tag{2.5}$$

Untuk kasus sederhana dengan kekakuan aksial konstan EA, persamaan diferensial penentu (2.5) dapat disederhanakan menjadi:

$$EA(x) = EA \quad \Rightarrow \quad EA\frac{d^2u_0(x)}{dx^2} = -w_x(x) \tag{2.6}$$

Bentuk umum solusi untuk persamaan diferensial penentu (2.5) adalah:

$$u_0(x) = u_0^h(x) + u_0^p(x) \tag{2.7}$$

di mana $u_0^h(x)$ adalah solusi homogen yang mewakili perpindahan aksial tanpa adanya beban anggota, sedangkan $u_0^p(x)$ adalah solusi partikular yang mewakili perpindahan aksial akibat adanya beban anggota. Diasumsikan bahwa pembaca memiliki latar belakang yang cukup dalam matematika teknik. Jika tidak demikian, disarankan untuk berkonsultasi dengan buku teks matematika tekniknya (misalnya Kreyszig).

Persamaan diferensial pengatur batang adalah orde kedua dalam medan perpindahan yang tidak diketahui $u_0(x)$. Selain persamaan diferensial pengatur, kondisi batas perlu ditambahkan untuk menentukan solusi masalah. Kondisi batas dapat diklasifikasikan menjadi dua kategori: Esensial dan Alami. Yang pertama juga dikenal sebagai tipe batas Dirichlet, sedangkan yang terakhir juga dikenal sebagai tipe batas Neumann. Kedua kondisi batas tersebut secara fisik diinterpretasikan, masing-masing, sebagai batasan pada perpindahan (geometris) dan gaya di ujung anggota. Gambar 2.3 memberikan representasi umum dari domain solusi Ω, batas esensial Γ_u, dan batas alami Γ_t untuk benda satu dan dua dimensi. Secara matematis, kita mencari fungsi $u_0(x)$, yang memiliki karakteristik berikut:

1. Medan gaya aksial $N(x)$ yang dihitung dari medan perpindahan aksial $u_0(x)$ melalui hubungan kompatibilitas (2.3) dan konstitutif (2.4) harus memenuhi persamaan

kesetimbangan diferensial (2.1) secara titik demi titik di seluruh domain solusi $\Omega(0 < x < L)$.

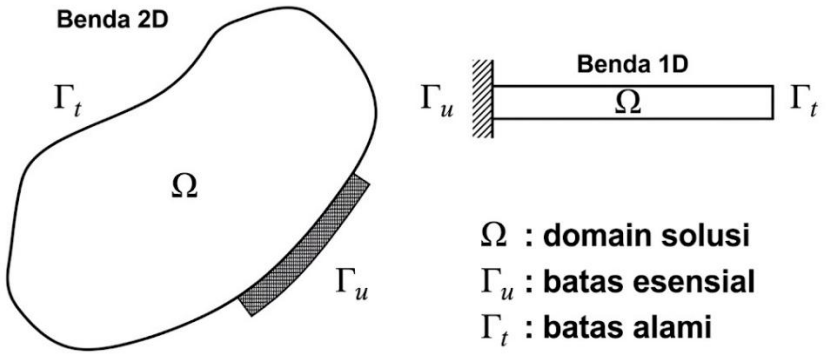
2. Harus memenuhi kondisi batas yang ditentukan di ujung anggota (pada $x = 0$ dan $x = L$).

Perlu dicatat bahwa, untuk derajat kebebasan tertentu, hanya satu dari dua kondisi batas yang dapat ditentukan. Dalam kasus batang, kita memiliki salah satu dari

$$u_0(0) = u_0 \text{ or } N(0) = N_0 \tag{2.8}$$

dan salah satu dari

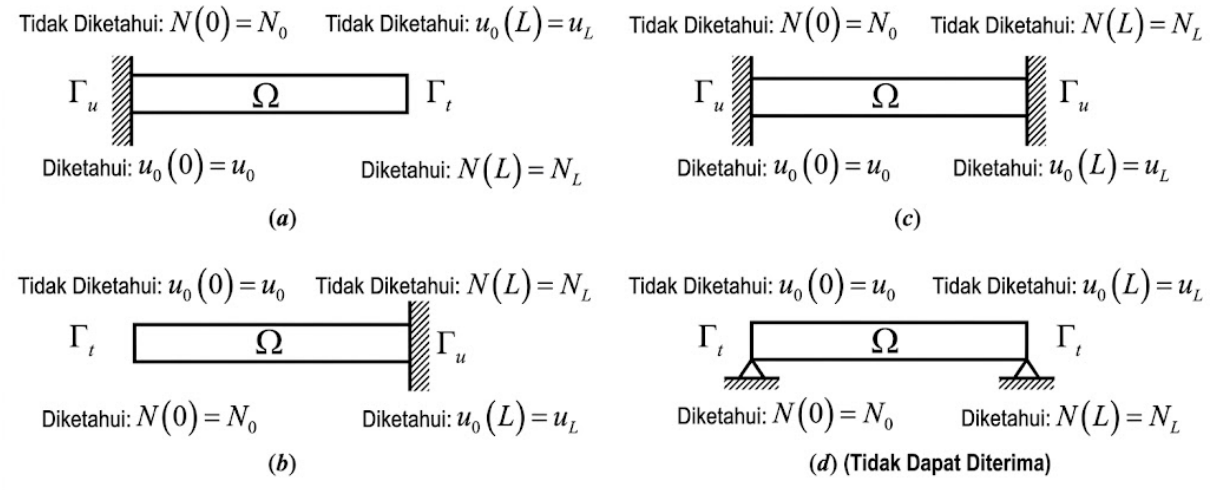
$$u_0(L) = u_L \text{ or } N(L) = N_L \tag{2.9}$$



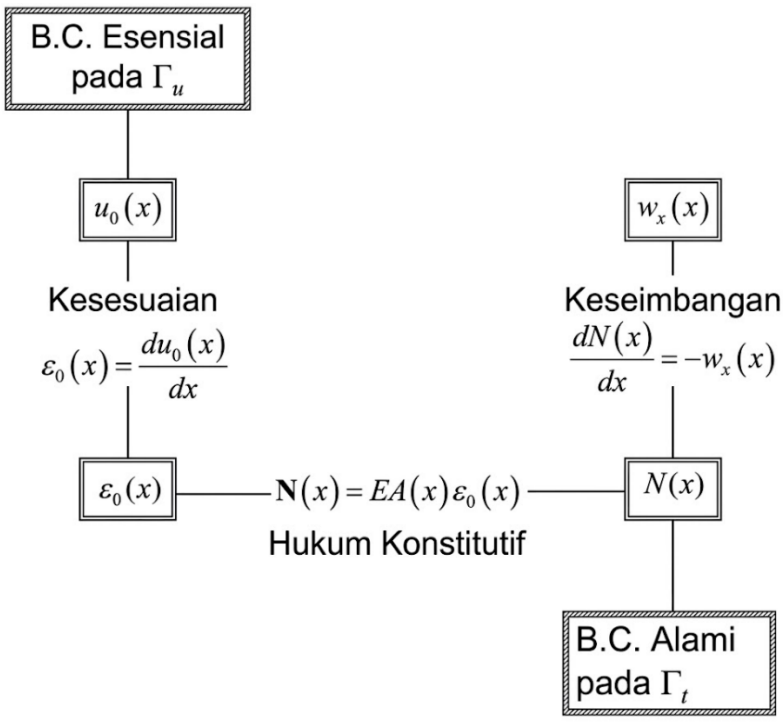
Gambar 2.3 Ilustrasi domain solusi utama Ω, syarat batas esensial Γ_u, dan syarat batas alami Γ_t $(\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma)$.

Dengan kata lain, baik gaya maupun perpindahan dapat ditetapkan pada batas yang sama. Gambar 2.4 memperlihatkan keempat kemungkinan kombinasi kendala batas. Namun, hanya tiga yang pertama (Gambar 2.4a, b, dan c) yang dapat diterima secara kinematik, sedangkan yang terakhir pada Gambar 2.4d tidak dapat diterima secara kinematik karena tidak mencegah batang tersebut mengalami translasi sebagai benda tegar.

Perlu dicatat bahwa cara yang elegan untuk merepresentasikan persamaan-persamaan penentu ((2.1), (2.3), dan (2.4)) bagi masalah batang beserta kondisi batasnya (esensial dan alami) secara bersamaan adalah melalui apa yang disebut sebagai "Diagram Tonti" yang ditampilkan pada Gambar 2.5. Diagram ini juga dapat digunakan untuk menyajikan persamaan diferensial penentu bagi masalah medan lainnya (misalnya Elektromagnetisme, Dinamika Fluida, Mekanika Kuantum).



Gambar 2.4 Empat Kemungkinan Kombinasi Kendala Batas: Masalah Batang.



Gambar 2.5 Diagram Tonti untuk Masalah Batang + Kondisi Batas.

Contoh 2.1

Berdasarkan persamaan diferensial yang relevan, tentukan distribusi perpindahan aksial dan gaya aksial sepanjang kolom dengan penampang konstan yang mengalami beban berat sendiri serta beban titik pada ujung bebasnya, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2.6.

- **Penyelesaian**: Untuk kasus kekakuan aksial EA yang konstan, persamaan diferensial yang berlaku adalah:

$$EA\frac{d^2u_0(x)}{dx^2} = w_x(x) = A\rho \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2u_0(x)}{dx^2} = \frac{\rho}{E}$$

Solusinya berbentuk

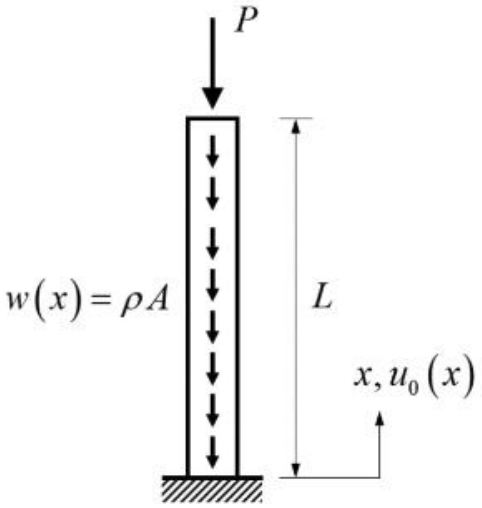
$$u_0(x) = u_0^h(x) + u_0^p(x)$$

di mana $u_0^h(x)$ adalah solusi homogen dan dapat didefinisikan sebagai:

$$u_0^h(x) = C_1x + C_2$$

$u_0^p(x)$ adalah solusi khusus dan dapat didefinisikan sebagai:

$$u_0^p(x) = \frac{\rho}{2E}x^2$$



Gambar 2.6 Contoh 2.1.

Solusi total $u_0(x)$ adalah:

$$u_0(x) = u_0^h(x) + u_0^p(x) = C_1x + C_2 + \frac{\rho}{2E}x^2$$

Konstanta C_1 dan C_2 ditentukan dari syarat batas. Syarat Batas:
Syarat Batas Esensial pada Γ_u:

$$u_0(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

Syarat Batas Alami pada Γ_t:

$$N(L) = EA\frac{du_0(x)}{dx}\bigg|_{x=L} = -P \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{\rho L}{E} - \frac{P}{EA}$$

Teramati bahwa syarat batas hanya memengaruhi solusi homogen.
Medan perpindahan aksial adalah:

$$u_0(x) = -\frac{\rho}{E}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{Px}{AE} \quad \Rightarrow \quad Quadratic$$

Medan regangan aksial adalah:

$$\varepsilon_0(x) = \frac{du_0(x)}{dx} = -\frac{\rho}{E}(L - x) - \frac{P}{EA} \quad \Rightarrow \quad Linear$$

Medan gaya aksial adalah:

$$N(x) = EA\varepsilon_0(x) = -\rho A(L - x) - P \quad \Rightarrow \quad Linear$$

Verifikasi terhadap keseimbangan global maupun lokal diserahkan kepada pembaca.

2.3 TEORI BALOK: EULER–BERNOULLI DAN TIMOSHENKO

Dua teori balok yang banyak digunakan dibahas di sini: balok Euler-Bernoulli dan balok Timoshenko. Balok Euler-Bernoulli hanya memperhitungkan deformasi lentur, sedangkan balok Timoshenko memperhitungkan baik deformasi lentur maupun geser. Sebelum membahas teori-teori balok ini lebih lanjut, beberapa asumsi dasar perlu dikemukakan:

1. *Simetri Bidang*: Sumbu longitudinal berbentuk lurus, dan penampang melintang balok memiliki bidang simetri longitudinal. Resultan beban transversal yang bekerja pada setiap penampang terletak pada bidang tersebut. Kondisi tumpuan juga simetris terhadap bidang ini. Hal ini menghasilkan lenturan yang simetris.
2. *Penampang Melintang*: Penampang melintang balok bersifat konstan atau berubah secara bertahap (balok tirus/*tapered*).
3. *Linearitas Geometris*: Perpindahan transversal, rotasi, dan deformasi bernilai kecil sehingga asumsi deformasi infinitesimal berlaku.
4. *Linearitas Material*: Material diasumsikan bersifat elastis dan isotropik. Balok heterogen yang dibuat dari beberapa material isotropik, seperti beton bertulang, tidak termasuk dalam cakupan ini.

Teori Balok Euler-Bernoulli

Hipotesis dasar teori balok Euler-Bernoulli adalah bahwa "Penampang datar tetap datar dan tegak lurus terhadap sumbu longitudinal". Asumsi ini dikaitkan dengan nama Kirchhoff untuk pelat (*plate*) dan Love untuk cangkang (*shell*). Deskripsi kinematika dan definisi deformasi titik-titik penampang untuk balok Euler-Bernoulli masing-masing disajikan pada

Gambar 2.7 dan Gambar 2.8. Penampang ab tegak lurus terhadap sumbu longitudinal balok sebelum mengalami deformasi. Pada konfigurasi terdeformasi, penampang $a'b'$ tetap datar dan tegak lurus terhadap sumbu longitudinal. Hal ini secara sederhana menyiratkan bahwa medan perpindahan aksial $u(x,y)$ dan perpindahan vertikal $v(x,y)$ pada titik mana pun yang berjarak y dari sumbu longitudinal dapat dituliskan sebagai berikut:

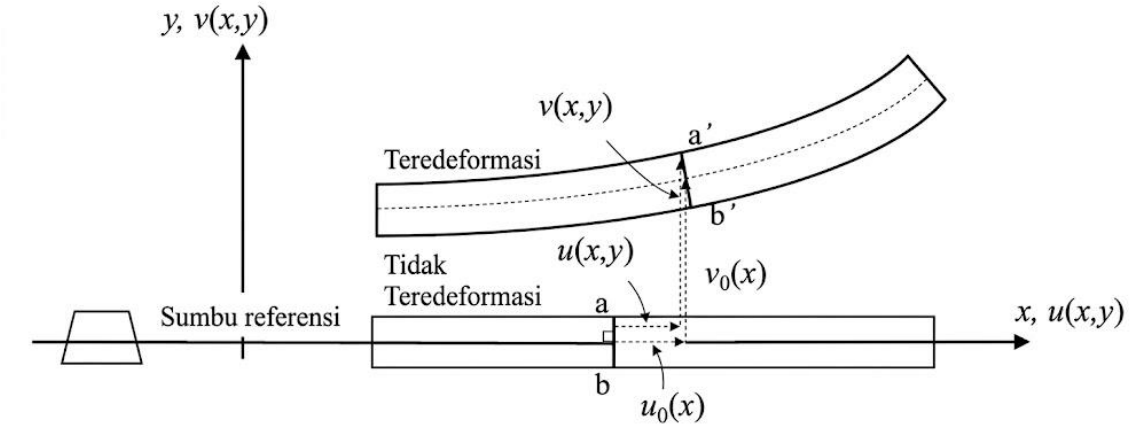
$$u(x,y) = u_0(x) - y\frac{dv_0(x)}{dx} \text{ dan } v(x,y) = v_0(x) \tag{2.10}$$

Deformasi yang bersesuaian adalah: Regangan aksial (regangan teknis):

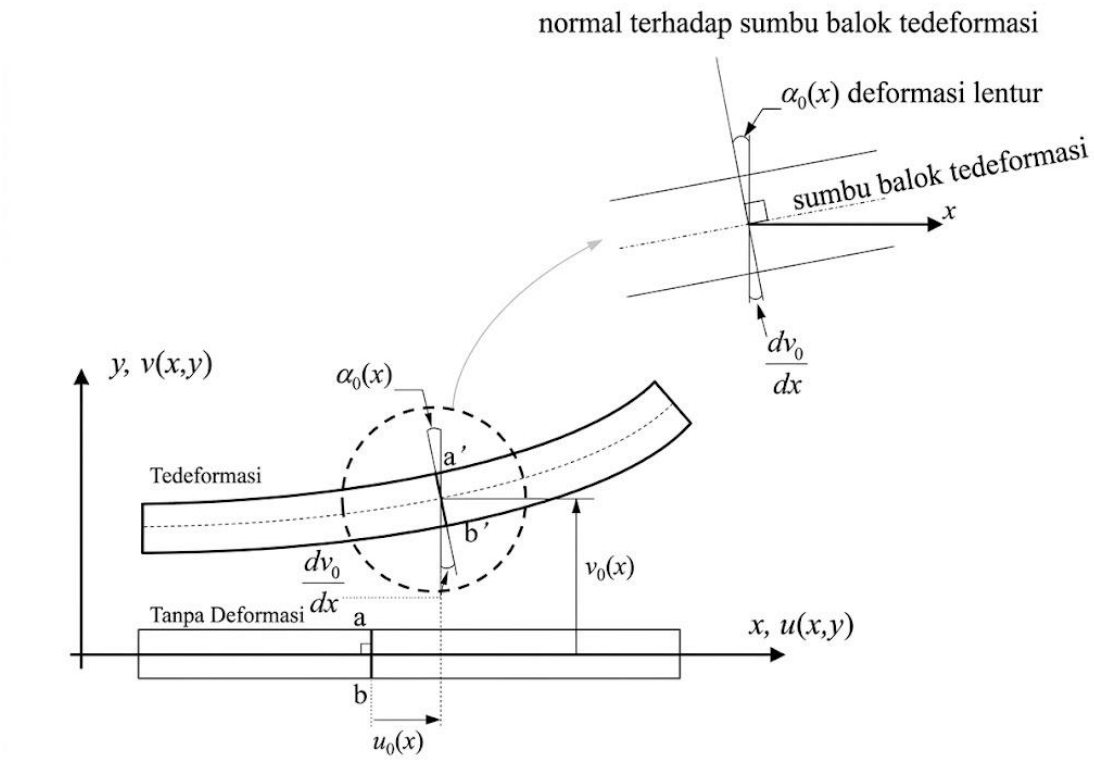
$$\varepsilon(x,y) = \frac{du(x,y)}{dx} = \frac{du_0(x)}{dx} - y\frac{d^2v_0(x)}{dx^2} = \varepsilon_0(x) - y\kappa_0(x) \tag{2.11}$$

Regangan geser:

$$\gamma_0(x) = \frac{dv(x,y)}{dx} + \frac{du(x,y)}{dy} = \frac{dv_0(x)}{dx} - \frac{dv_0(x)}{dx} = 0 \tag{2.12}$$



Gambar 2.7 Deskripsi kinematika titik-titik penampang melintang untuk balok Euler-Bernoulli.



Gambar 2.8 Deformasi Penampang Balok Euler-Bernoulli.

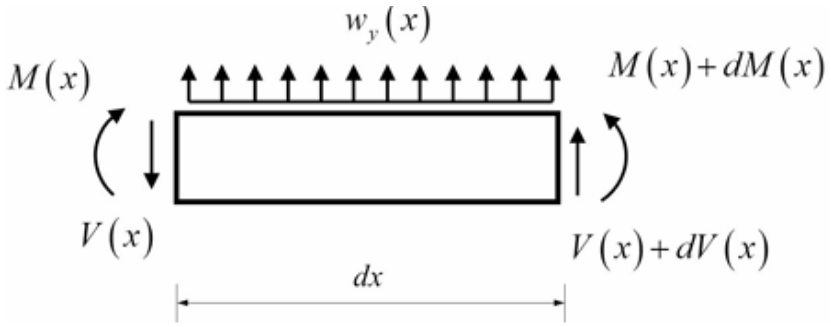
dimana $\varepsilon_0(x) = du_0(x)/dx$ adalah regangan pada sumbu referensi dan $\kappa_0(x) = d^2v_0(x)/dx^2$ adalah kelengkungan penampang.

Perlu dicatat bahwa Persamaan (2.12) secara sederhana menunjukkan bahwa, berdasarkan asumsi kinematik yang diperlihatkan pada Gambar 2.7, regangan geser penampang bernilai nol.

Kesetimbangan:

Diagram benda bebas dari bagian infinitesimal elemen balok yang mengalami beban transversal diperlihatkan pada Gambar 2.9. Kondisi kesetimbangan vertikal balok menghasilkan hubungan berikut:

$$\frac{dV(x)}{dx} + w_y(x) = 0 \tag{2.13}$$



Gambar 2.9 Segmen infinitesimal dari suatu balok.

dengan $V(x)$ adalah gaya geser yang bekerja pada penampang balok, dan $w_y(x)$ adalah beban terbagi rata arah vertikal. Kesetimbangan momen menghasilkan hubungan berikut:

$$\frac{dM(x)}{dx} + V(x) = 0 \tag{2.14}$$

di mana $M(x)$ adalah momen lentur yang bekerja pada penampang balok.

Perlu dicatat bahwa momen lentur $M(x)$ dapat dianggap sebagai tegangan resultan karena besaran ini didefinisikan sebagai integral dari tegangan aksial $\sigma_{xx}(x)$ terhadap luas penampang balok A:

$$M(x) = -\int_A y\,\sigma_{xx}(x)dA \tag{2.15}$$

Berdasarkan hipotesis balok Euler-Bernoulli, pengaruh gaya geser $V(x)$ terhadap perilaku balok tidak diperhitungkan. Hal ini merupakan pendekatan yang wajar untuk elemen dengan rasio bentang terhadap tinggi penampang yang sedang hingga besar. Akibatnya, gaya geser $V(x)$ perlu dihilangkan dari Persamaan (2.14). Hal ini dapat dilakukan dengan menurunkan Persamaan (2.14) terhadap x dan menggabungkannya dengan Persamaan (2.13) untuk memperoleh:

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} - w_y(x) = 0 \tag{2.16}$$

Berdasarkan asumsi perpindahan kecil, kelengkungan penampang $\kappa_0(x)$ berhubungan dengan perpindahan transversal $v_0(x)$ melalui persamaan kompatibilitas berikut:
Kompatibilitas:

$$\kappa_0(x) = \frac{d^2v_0(x)}{dx^2} \tag{2.17}$$

Hukum konstitutif:

Hubungan antara momen penampang dan kelengkungan penampang didefinisikan melalui hukum konstitutif:

$$M(x) = IE(x)\kappa_0(x) \tag{2.18}$$

di mana $IE(x)$ adalah kekakuan lentur balok tersebut.

Substitusi Persamaan (2.17) dan (2.18) ke dalam Persamaan (2.16) menghasilkan persamaan diferensial yang mengatur sistem:
Persamaan diferensial yang mengatur sistem:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[IE(x)\frac{d^2v_0(x)}{dx^2}\right] = w_y(x) \tag{2.19}$$

Untuk kasus sederhana dengan kekakuan lentur IE yang konstan, persamaan diferensial yang mengatur sistem, yaitu Persamaan (2.19), dapat disederhanakan menjadi:

$$IE(x) = IE \quad \Rightarrow \quad IE\frac{d^4v_0(x)}{dx^4} = w_y(x) \tag{2.20}$$

Persamaan diferensial yang mengatur perilaku balok Euler-Bernoulli merupakan persamaan orde empat terhadap medan tak-diketahui $v_0(x)$. Selain persamaan diferensial tersebut, syarat batas perlu ditambahkan untuk menyelesaikan masalah ini. Syarat batas esensial dan alami secara fisik diinterpretasikan sebagai kendala pada perpindahan (perpindahan transversal $v_0(x)$ dan rotasi $v_0'(x)$) serta gaya (gaya geser $V(x)$ dan momen $M(x)$) masing-masing pada ujung-ujung elemen.

Secara matematis, tujuannya adalah mencari fungsi $v_0(x)$ yang memiliki karakteristik berikut:

1. Medan momen lentur $M(x)$, yang dihitung dari medan perpindahan transversal $v_0(x)$ melalui hubungan kompatibilitas (2.17) dan hubungan konstitutif (2.18), harus memenuhi persamaan diferensial kesetimbangan (2.16) di setiap titik di seluruh domain solusi $\Omega(0 < x < L)$.
2. Fungsi tersebut harus memenuhi syarat batas yang telah ditentukan pada ujung-ujung elemen (pada $x = 0$ dan $x = L$).

Berbeda dengan masalah batang (*bar*), pada masalah balok, baik syarat esensial maupun alami dapat ditetapkan pada batas yang sama, sebagaimana ditunjukkan, misalnya, pada Gambar 2.10.

Pada ujung kiri $(x = 0)$, dapat ditetapkan:

$$v_0(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Essential \quad dan \quad M(0) = M_0 \quad \Rightarrow \quad Natural \tag{2.21}$$

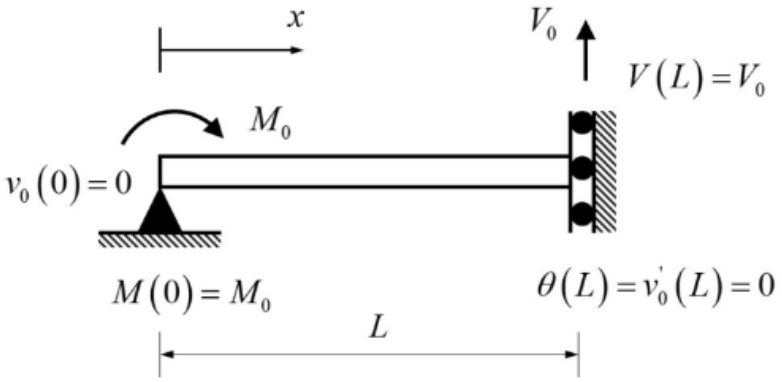
Demikian pula, pada ujung kanan $(x = L)$, kita dapat menetapkan:

$$\theta(L) = v_0'(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad Essential \quad dan \quad V(L) = V_0 \quad \Rightarrow \quad Natural \tag{2.22}$$

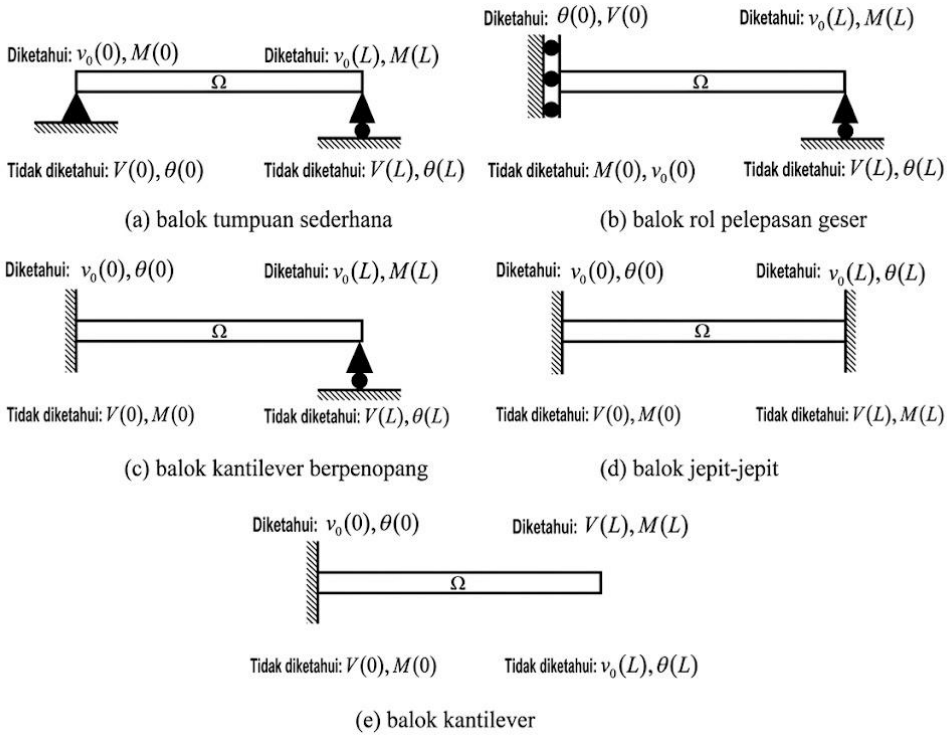
Namun, untuk suatu derajat kebebasan tertentu, hanya satu dari kedua kondisi batas yang dapat ditetapkan.

Gambar 2.11 memperlihatkan semua kendala batas yang dapat diterima secara kinematik pada sebuah balok. Kendala-kendala batas ini dapat diterima karena mencegah balok mengalami translasi dan rotasi sebagai benda tegar. Terlihat pula bahwa setidaknya dua

kondisi batas esensial harus ditetapkan. Selain itu, balok menjadi statis tak tentu jika terdapat lebih dari dua kendala batas esensial.



Gambar 2.10 Contoh Kondisi Batas Campuran untuk Balok Euler-Bernoulli.



Gambar 2.11 Kendala yang Memenuhi Syarat Kinematis pada Balok Euler-Bernoulli.

Persamaan-persamaan yang mengatur perilaku sistem ((2.16), (2.17), dan (2.18)), beserta syarat-syarat batasnya (baik yang bersifat esensial maupun alami), membentuk masalah nilai batas untuk menentukan medan perpindahan vertikal balok; hal ini direpresentasikan secara skematis melalui Diagram Tonti pada Gambar 2.12.

Contoh 2.2

Berangkat dari persamaan diferensial yang mengatur sistem, tentukan distribusi perpindahan transversal, rotasi, momen lentur, dan gaya geser di sepanjang balok kantilever

dengan tumpuan tambahan (*propped cantilever*) Euler-Bernoulli yang bersifat prismatik dan menerima beban terbagi rata, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2.13.

- **Penyelesaian**: Untuk kasus kekakuan lentur IE yang konstan, persamaan diferensial yang mengatur sistem adalah:

$$IE\frac{d^4v_0(x)}{dx^4} = w_y(x) = -w_{y0}$$

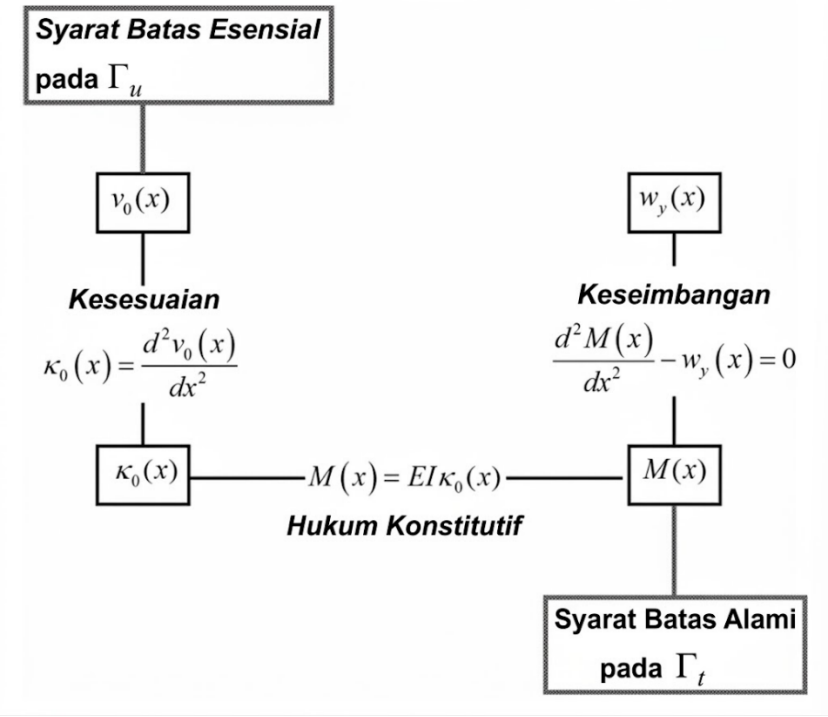
Syarat batas:

$(1)\ v_0(0) = 0$: Essential

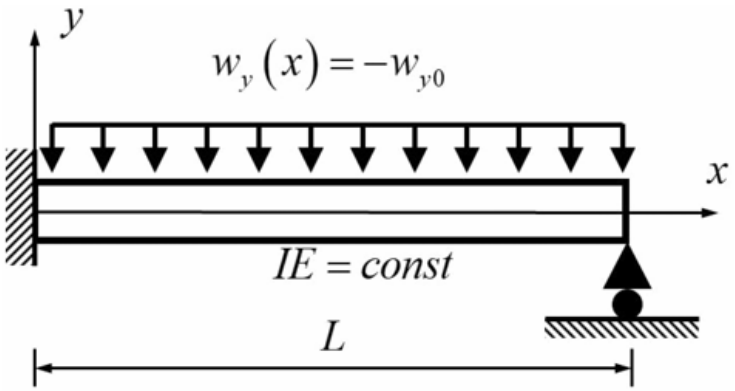
$(2)\ \theta(0) = \left.\frac{dv_0}{dx}\right|_{x=0} = 0$: Essential

$(3)\ M(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.IE\frac{d^2v_0}{dx^2}\right|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{d^2v_0}{dx^2}\right|_{x=L} = 0$: Natural

$(4)\ v(L) = 0$: Essential



Gambar 2.12 Diagram Tonti untuk masalah balok Euler-Bernoulli + syarat batas.



Gambar 2.13 Contoh 2.2.

Solusinya berbentuk

$$v_0(x) = v_0^h(x) + v_0^p(x)$$

Solusi homogen $v_0^h(x)$:

$$IE\frac{d^4v_0(x)}{dx^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0^h(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3$$

Solusi khusus $v_0^p(x)$:

$$IE\frac{d^4v_0(x)}{dx^4} = w_y(x) = -w_{y0} \quad \Rightarrow \quad v_0^p(x) = -\frac{w_{y0}}{24IE}x^4$$

Solusi totalnya adalah:

$$v_0(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 - \frac{w_{y0}}{24IE}x^4$$

Konstanta C_1, C_2, C_3, dan C_4 dapat ditentukan dari keempat syarat batas:

(1) $v_0(0) = 0$: $C_1 = 0$

(2) $\theta(0) = \left.\frac{dv_0}{dx}\right|_{x=0} = 0$: $C_2 = 0$

(3) $\left.\frac{d^2v_0}{dx^2}\right|_{x=L} = 0$: $2C_3 + 6C_4L - \frac{w_{y0}}{2IE}L^2 = 0$

$$(4) \quad v_0(L) = 0: \quad C_3L^2 + C_4L^3 - \frac{w_{y0}L^4}{24IE} = 0$$

Dari (3) dan (4), $C_3 = -\frac{w_{y0}L^2}{16IE}$ dan $C_4 = \frac{5w_{y0}L}{48IE}$

Solusi lengkap untuk masalah ini adalah

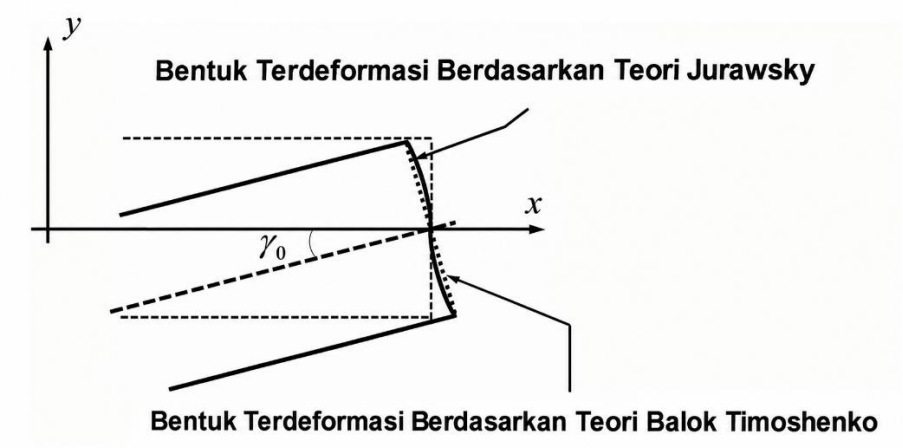
$$v_0(x) = -\frac{w_{y0}L^2}{16IE}x^2 + \frac{5w_{y0}L}{48IE}x^3 - \frac{w_{y0}}{24IE}x^4$$

Momen lentur sepanjang balok adalah

$$M(x) = IE\frac{d^2v_0(x)}{dx^2} = w_{y0}\left(-\frac{L^2}{8} + \frac{5}{8}Lx - \frac{x^2}{2}\right)$$

Gaya geser sepanjang balok adalah

$$V(x) = -IE\frac{d^3v_0(x)}{dx^3} = w_{y0}\left(\frac{5L}{8} - x\right)$$



Gambar 2.14 Deformasi Penampang Melintang: Teori Jourawsky vs. Teori Balok Timoshenko.

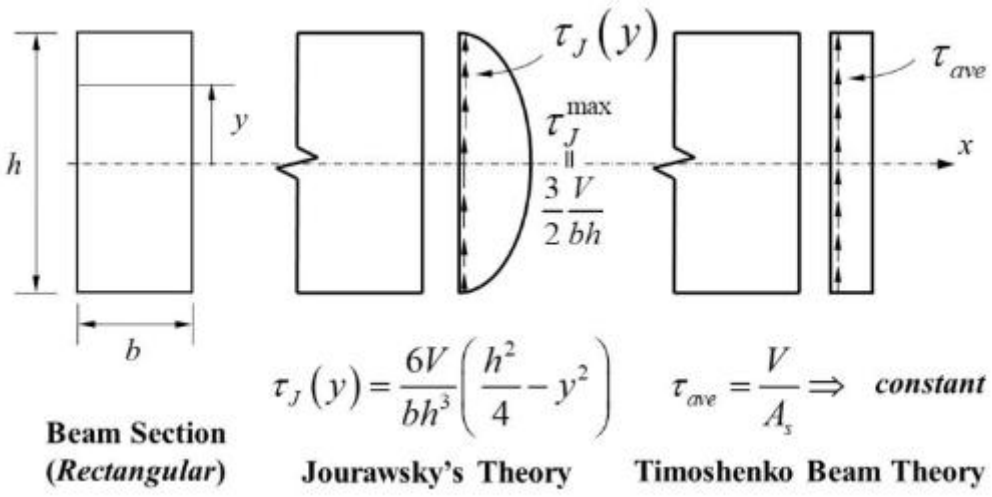
Verifikasi terhadap keseimbangan global maupun lokal diserahkan kepada pembaca.

TEORI BALOK TIMOSHENKO

Latar Belakang Teoretis

Teori balok Timoshenko merupakan penyederhanaan dari teori balok yang lebih akurat dengan memperhitungkan pengaruh deformasi geser. Hipotesis dasar teori balok Timoshenko adalah bahwa "penampang bidang tetap berupa bidang datar namun tidak lagi tegak lurus terhadap sumbu memanjang balok akibat adanya deformasi geser". Asumsi ini dikaitkan dengan nama Mindlin dan Reissner (antara lain) untuk pelat serta Naghdi untuk cangkang. Implikasi dari hipotesis tersebut ditunjukkan pada Gambar 2.14 dan menghasilkan deformasi

(tegangan) geser yang konstan di sepanjang penampang melintang. Hal ini bertolak belakang dengan kondisi yang terjadi menurut teori Jourawsky. Perbandingan antara distribusi tegangan geser konstan tersebut dengan distribusi yang dihitung berdasarkan teori Jourawsky disajikan pada Gambar 2.15.



Gambar 2.15 Distribusi Tegangan Geser pada Penampang Persegi Panjang: Teori Jourawsky vs. Teori Balok Timoshenko.

Inti dari argumen Timoshenko adalah sebagai berikut: Gaya geser $V(x)$ dihitung dari integral tegangan geser di atas luas penampang A.

Dalam kasus elastis linier dengan modulus geser konstan G,

$$V(x) = \int_A \tau_{xy}(x)dA = \int_A G(x)\gamma_{xy}(x)dA \Rightarrow \text{If } G(x) = G \Rightarrow V(x) = G\int_A \gamma_{xy}(x)dA \qquad (2.23)$$

Jika γ_0 adalah regangan geser pada sumbu sentroidal, diperoleh hubungan berikut:

$$V \leq GA\gamma_0 \qquad (2.24)$$

Jika kesamaan gaya geser yang dihasilkan diberlakukan, faktor koreksi geser k dapat dihitung:

$$V = \int_A G\gamma_{xy}dA = (GA\gamma_0)k; \quad \text{where } k \leq 1 \qquad (2.25)$$

Faktor koreksi geser k biasanya disebut koefisien geser Timoshenko yang bergantung pada bentuk penampang dan didefinisikan untuk setiap jenis penampang. Jika kita menyebut $A_s = kA$ sebagai luas geser, maka

$$V = GA_s\gamma_0 \qquad (2.26)$$

Nilai k untuk beberapa penampang melintang sederhana adalah:

$$k = 5/6 \; untuk \; penampang \; persegi \; panjang \; dan \; k = 9/10 \; untuk \; penampang \; lingkaran \quad (2.27)$$

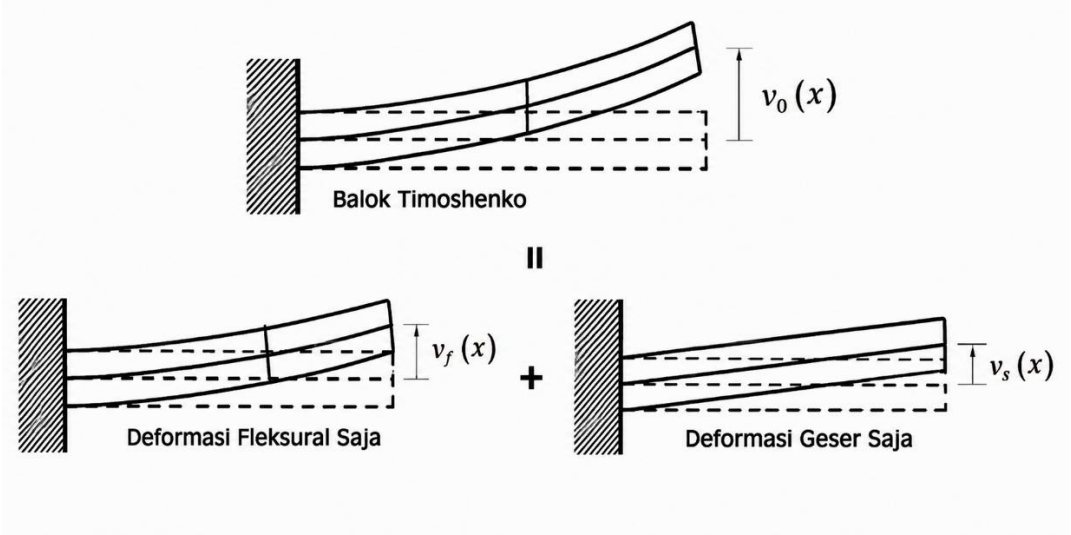
Pembahasan dan penurunan rumus koefisien geser Timoshenko yang lebih mendalam dapat ditemukan dalam Timoshenko dan Gere.

Perpindahan vertikal total sumbu referensi balok dapat diuraikan menjadi lendutan lentur dan lendutan geser, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2.16.

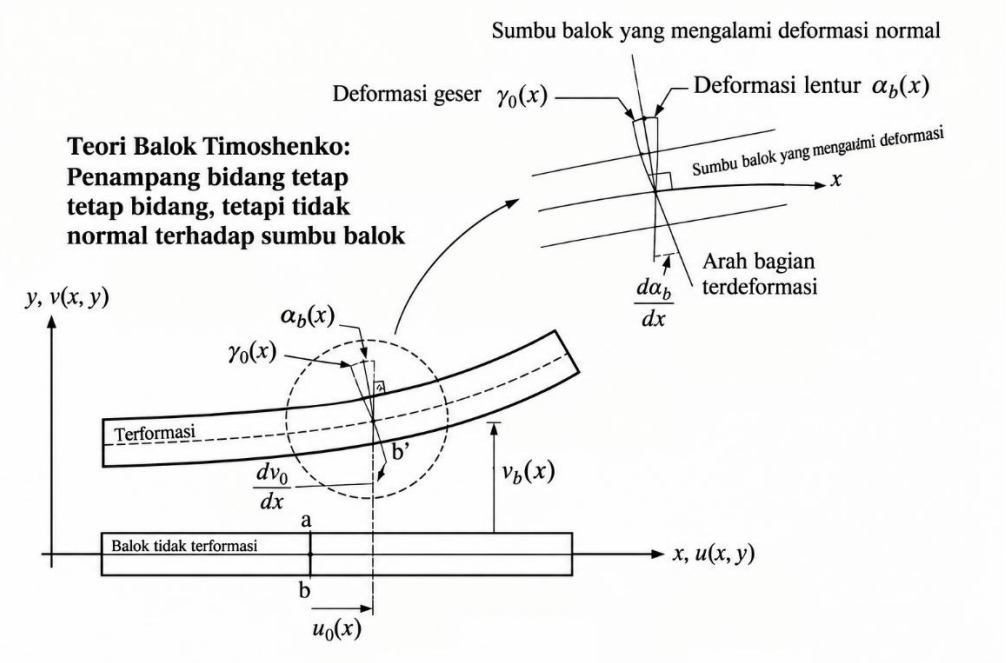
$$v_0(x) = v_f(x) + v_s(x) \quad (2.28)$$

di mana $v_f(x)$ adalah defleksi akibat lentur saja, sedangkan $v_s(x)$ adalah defleksi akibat geser saja. Berdasarkan Persamaan (2.28) dan Gambar 2.16, diperoleh:

$$\theta(x) = \frac{dv_0(x)}{dx} = \frac{dv_f(x)}{dx} + \frac{dv_s(x)}{dx} \quad (2.29)$$



Gambar 2.16 Dekomposisi Perpindahan Balok Timoshenko.



Gambar 2.17 Deskripsi Kinematika Titik-titik Penampang Melintang untuk Balok Timoshenko.

$$\theta(x) = \alpha_0(x) + \gamma_0(x) \tag{2.30}$$

Persamaan (2.30) menyiratkan adanya dua kontribusi terhadap total rotasi penampang $\theta(x)$; salah satunya berasal dari rotasi lentur $\alpha_0(x) = dv_f(x)/dx$ dan yang lainnya dari rotasi geser $\gamma_0(x) = dv_s(x)/dx$.

Berdasarkan deskripsi kinematika yang diperlihatkan pada Gambar 2.17, dapat diamati bahwa penampang melintang yang terdeformasi $a'b'$ tetap berupa bidang datar namun berotasi dengan sudut total sebesar $dv_0(x)/dx$. Selisih antara $dv_0(x)/dx$ dan $\alpha_0(x)$ (rotasi lentur) mendefinisikan deformasi geser penampang $\gamma_0(x)$.

Berdasarkan Gambar 2.17, medan perpindahan aksial $u(x, y)$ dan perpindahan vertikal $v(x, y)$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$u(x, y) = u_0(x) - y\alpha_0(x) \text{ and } v(x, y) = v_0(x) \tag{2.31}$$

Deformasi yang bersesuaian adalah:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, y) &= \frac{du(x, y)}{dx} = \frac{du_0(x)}{dx} - y\frac{d\alpha_0(x)}{dx} \\ \gamma_0(x) &= \frac{du(x, y)}{dy} + \frac{dv(x, y)}{dx} = -\alpha_0(x) + \frac{dv_0(x)}{dx} \end{aligned} \tag{2.32}$$

Deformasi penampang yang digeneralisasi adalah:

Regangan aksial penampang pada sumbu referensi:

$$\varepsilon_0(x) = \frac{du_0(x)}{dx} \tag{2.33}$$

Kelengkungan penampang:

$$\kappa_0(x) = \frac{d\alpha_0(x)}{dx} \tag{2.34}$$

Regangan geser penampang:

$$\gamma_0(x) = \frac{dv_0(x)}{dx} - \alpha_0(x) \tag{2.35}$$

Dari hubungan konstitutif untuk tegangan normal dan geser:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x) &= E(x)\varepsilon_{xx}(x) \\ \tau_{xy}(x) &= G(x)\gamma_{xy}(x) \end{aligned} \tag{2.36}$$

Gaya penampang tergeneralisasi adalah:
Gaya aksial penampang pada sumbu referensi:

$$N(x) = \int_A \sigma_{xx}(x)dA = EA(x)\frac{du_0(x)}{dx} = EA(x)\varepsilon_0(x) \tag{2.37}$$

Momen lentur penampang:

$$M(x) = -\int_A \sigma_{xx}(x)y\,dA = IE(x)\frac{d\alpha_0(x)}{dx} = IE(x)\kappa_0(x) \tag{2.38}$$

Gaya geser penampang:

$$V(x) = \int_A \tau_{xy}(x)dA = GA_s(x)\gamma_0(x) \tag{2.39}$$

Perlu ditekankan bahwa deformasi penampang tergeneralisasi ((2.33), (2.34), dan (2.35)) merupakan pasangan konjugat dari gaya penampang tergeneralisasi ((2.37), (2.38), dan (2.39)) berdasarkan prinsip kerja maya.

Persamaan Diferensial Pengatur

Kesetimbangan:

Diagram benda bebas dari bagian infinitesimal elemen rangka yang mengalami beban transversal ditunjukkan pada Gambar 2.9. Kesetimbangan vertikal dan momen menghasilkan persamaan-persamaan berikut:

$$\frac{dV(x)}{dx} + w_y(x) = 0 \text{ dan } \frac{dM(x)}{dx} + V(x) = 0 \tag{2.40}$$

Berdasarkan asumsi kinematik teori balok Timoshenko, deformasi penampang ($\kappa_0(x)$ dan $\gamma_0(x)$) dikaitkan dengan perpindahan transversal $v_0(x)$ dan rotasi lentur penampang $\alpha_0(x)$ melalui persamaan kompatibilitas berikut:

Kesesuaian:

$$\begin{aligned} \kappa_0(x) &= \frac{d\alpha_0(x)}{dx} \\ \gamma_0(x) &= \frac{dv_0(x)}{dx} - \alpha_0(x) \end{aligned} \tag{2.41}$$

Hukum konstitutif:

Hukum konstitutif penampang untuk lentur dan geser adalah:

$$M(x) = IE(x)\kappa_0(x) \text{ and } V(x) = GA_s(x)\gamma_0(x) \tag{2.42}$$

Substitusi Persamaan (2.41) dan (2.42) ke dalam Persamaan (2.40) menghasilkan persamaan diferensial yang mengatur sistem sebagai berikut:

Persamaan diferensial yang mengatur sistem:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[GA_s(x)\left[\frac{dv_0(x)}{dx} - \alpha_0(x)\right]\right] + w_y(x) &= 0 \\ GA_s(x)\left[\frac{dv_0(x)}{dx} - \alpha_0(x)\right] + \frac{d}{dx}\left[IE(x)\frac{d\alpha_0(x)}{dx}\right] &= 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Terdapat dua persamaan diferensial bergandengan yang mengatur perilaku balok Timoshenko. Keduanya merupakan persamaan orde dua terhadap medan tak-diketahui $v_0(x)$ dan $\alpha_0(x)$.

Pada kasus sederhana dengan kekakuan lentur IE dan kekakuan geser GA_s yang konstan, persamaan diferensial penentu (2.43) dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned} GA_s\left[\frac{d^2v_0(x)}{dx^2} - \frac{d\alpha_0(x)}{dx}\right] + w_y(x) &= 0 \\ GA_s\left[\frac{dv_0(x)}{dx} - \alpha_0(x)\right] + IE\frac{d^2\alpha_0(x)}{dx^2} &= 0 \end{aligned} \tag{2.44}$$

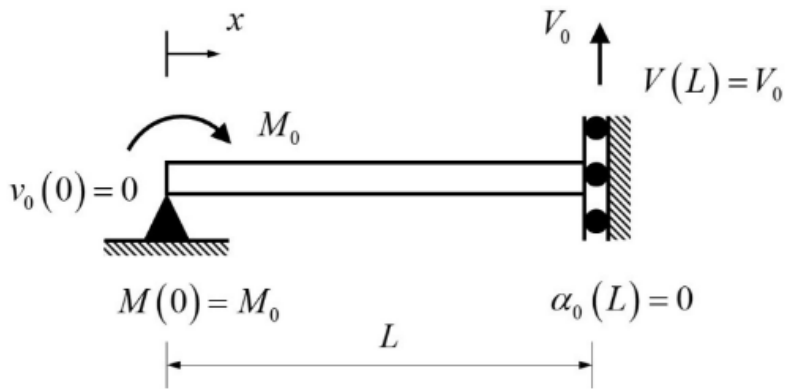
Sama halnya dengan balok Euler-Bernoulli, selain persamaan diferensial yang mengatur perilaku sistem tersebut, syarat batas juga harus ditetapkan untuk menyelesaikan masalah ini. Syarat batas esensial dan alami secara fisik masing-masing diinterpretasikan sebagai kendala

terhadap perpindahan (perpindahan transversal dan rotasi lentur) serta gaya (gaya geser dan momen) pada ujung-ujung elemen.

Secara matematis, tujuannya adalah mencari fungsi $v_0(x)$ dan $\alpha_0(x)$ yang memiliki sifat-sifat berikut:

1. Medan gaya penampang ($M(x)$ dan $V(x)$) yang dihitung dari medan perpindahan ($v_0(x)$ dan $\alpha_0(x)$) melalui hubungan kompatibilitas (2.41) dan konstitutif (2.42) harus memenuhi persamaan diferensial kesetimbangan (2.40) di setiap titik di sepanjang domain solusi Ω $(0 < x < L)$.
2. Fungsi-fungsi tersebut harus memenuhi syarat batas yang telah ditentukan pada ujung-ujung elemen (pada $x = 0$ dan $x = L$).

Seperti halnya pada masalah balok Euler-Bernoulli, baik syarat esensial maupun alami dapat ditetapkan pada batas yang sama, sebagaimana ditunjukkan dalam Gambar 2.18 sebagai contoh.



Gambar 2.18 Contoh Kondisi Batas Campuran untuk Balok Timoshenko.

Di ujung kiri ($x = 0$), kita dapat menentukan:

$$v_0(0) = 0 \Rightarrow Essential \text{ dan } M(0) = M_0 \Rightarrow Natural \tag{2.45}$$

Demikian pula, pada ujung kanan ($x = L$), kita dapat menetapkan:

$$\alpha_0(L) = 0 \Rightarrow Essential \text{ dan } V(L) = V_0 \Rightarrow Natural \tag{2.46}$$

Namun, untuk derajat kebebasan tertentu, hanya satu dari dua syarat batas yang dapat ditetapkan.

Gambar 2.19 memperlihatkan semua kendala batas balok yang dapat diterima secara kinematik. Kendala batas ini dikatakan dapat diterima karena mencegah balok mengalami translasi dan rotasi sebagai benda tegar. Terdapat empat syarat batas (esensial dan alami) yang mutlak diperlukan untuk memperoleh solusi lengkap bagi suatu masalah tertentu. Perlu dicatat pula bahwa setidaknya dua di antaranya haruslah berupa syarat batas esensial; jika tidak, sistem tersebut akan menjadi sebuah mekanisme. Persamaan-persamaan penentu

((2.40), (2.41), dan (2.42)), bersama dengan syarat-syarat batas (esensial dan alami), membentuk masalah nilai batas untuk menentukan medan perpindahan vertikal dan rotasi balok, yang secara skematis digambarkan melalui diagram Tonti pada Gambar 2.20.

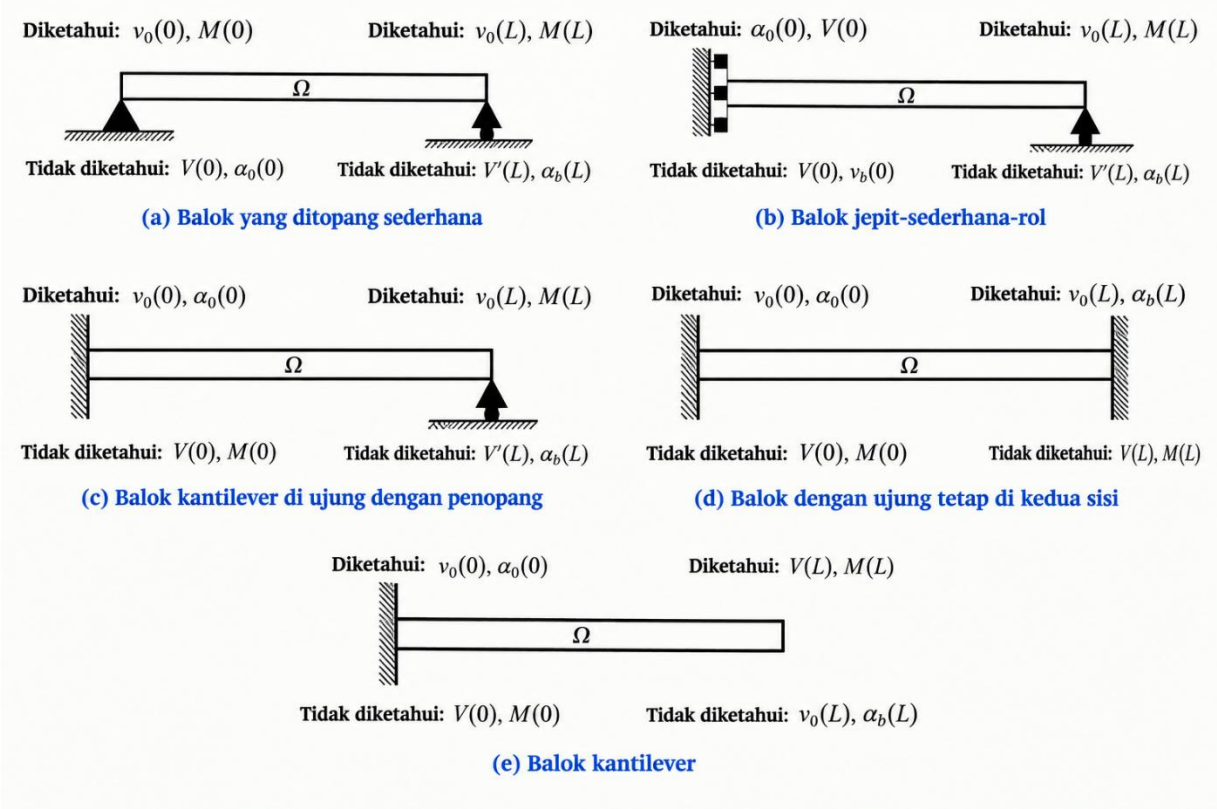
Contoh 2.3

Berangkat dari persamaan diferensial masalah tersebut, tentukan distribusi perpindahan dan gaya di sepanjang balok kantilever Timoshenko yang dikenai beban pada ujungnya seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.21.

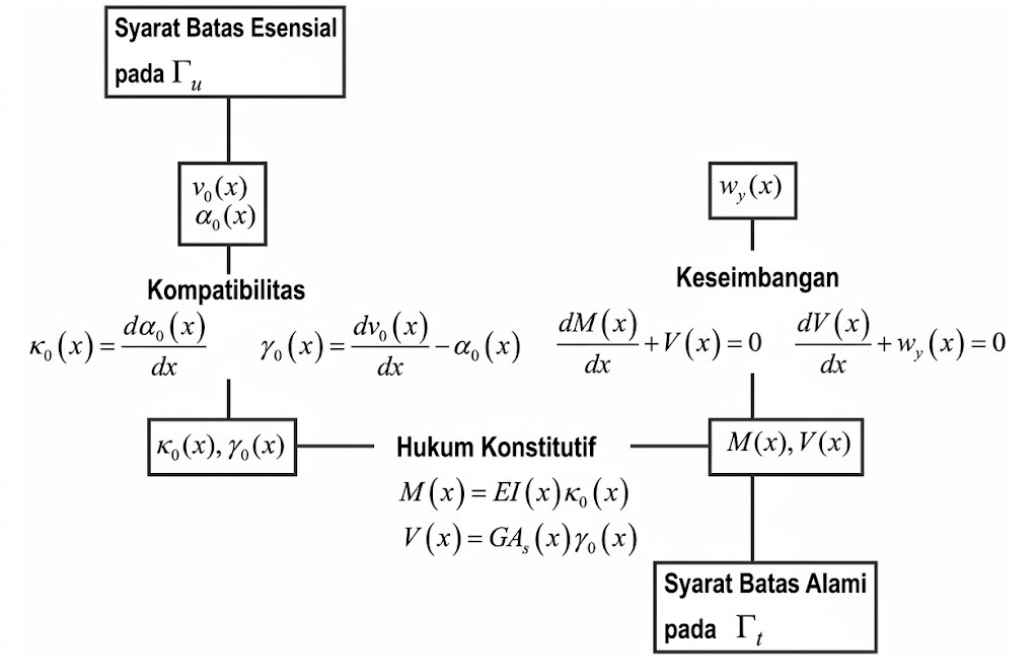
- **Penyelesaian**: Untuk kasus kekakuan lentur IE dan kekakuan geser GA_s yang konstan, persamaan diferensial penentunya adalah:

$$GA_s\left[\frac{d^2v_0(x)}{dx^2}-\frac{d\alpha_0(x)}{dx}\right]=0 \qquad (a)$$

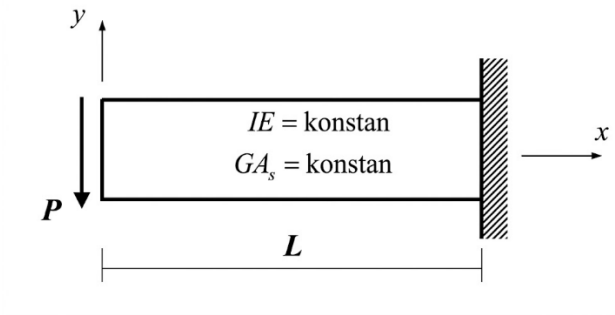
$$GA_s\left[\frac{dv_0(x)}{dx}-\alpha_0(x)\right]+IE\frac{d^2\alpha_0(x)}{dx^2}=0 \qquad (b)$$



Gambar 2.19 Kendala yang Dapat Diterima secara Kinematis pada Balok Timoshenko.



Gambar 2.20 Diagram Tonti untuk Masalah Balok Timoshenko beserta Syarat Batas.



Gambar 2.21 Contoh 2.3.

Syarat Batas:

(1) $M(0) = 0$: Alami

$$IE\frac{d\alpha_0}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{d\alpha_0}{dx}\Big|_{x=0} = 0$$

(2) $V(0) = P$: Alami

$$GA_s\gamma_0(0) = GA_s\left[\frac{dv_0}{dx}\Big|_{x=0} - \alpha_0(0)\right] = P$$

(3) $\alpha_0(L) = 0$: Esensial

(4) $v_0(L) = 0$: Esensial

Dari persamaan pengatur kedua (b),

$$\frac{dv_0(x)}{dx} = \alpha_0(x) - \frac{IE}{GA_s}\frac{d^2\alpha_0(x)}{dx^2} \qquad (c)$$

Dengan menyubstitusikan (c) ke dalam persamaan penentu pertama (a), diperoleh hubungan berikut:

$$\frac{d^3\alpha_0(x)}{dx^3} = 0 \qquad (d)$$

Mengintegralkan (d) menghasilkan:

$$\alpha_0(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 \qquad (e)$$

Mensubstitusikan (e) ke dalam (c) menghasilkan:

$$\frac{dv_0(x)}{dx} = -\frac{2IE}{GA_s}C_3 + C_1 + C_2x + C_3x^2 \qquad (f)$$

Mengintegralkan (f) terhadap x:

$$v_0(x) = C_4 + \left(C_1 - \frac{2IE}{GA_s}C_3\right)x + \frac{C_2x^2}{2} + \frac{C_3x^3}{3} \qquad (g)$$

Dengan menerapkan syarat batas, konstanta integrasi dapat ditentukan:

(1) $\left.\frac{d\alpha_0}{dx}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

(2) $GA_s\left[\left.\frac{dv_0}{dx}\right|_{x=0} - \alpha_0(0)\right] = P \Rightarrow C_3 = -\frac{P}{2IE}$

(3) $\alpha_0(L) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{PL^2}{2IE}$

(4) $v_0(L) = 0 \Rightarrow C_4 = -\frac{PL^3}{3IE} - \frac{PL}{GA_s}$

Medan perpindahan vertikal adalah:

$$v_0(x) = \frac{P}{GA_s}(x - L) - \frac{PL^3}{3IE} + \frac{PL^2}{2IE}x - \frac{P}{6IE}x^3 \qquad (h)$$

Medan rotasi lentur adalah:

$$\alpha_0(x) = \frac{PL^2}{2IE} - \frac{P}{2IE}x^2 \qquad (i)$$

Dalam persamaan (h), kontribusi deformasi geser adalah

$$v_s(x) = \frac{P}{GA_s}(x - L) \qquad (j)$$

dan kontribusi deformasi lentur adalah

$$v_f(x) = -\frac{PL^3}{3IE} + \frac{PL^2}{2IE}x - \frac{P}{6IE}x^3 \qquad (k)$$

Total lendutan ujung adalah

$$v_0(0) = -\frac{PL}{GA_s} - \frac{PL^3}{3IE} = \underbrace{\frac{PL}{GA_s}}_{Shear} + \underbrace{\frac{PL^3}{3IE}}_{Flexure} \quad \downarrow$$

Rotasi lentur pada ujung-ujung balok adalah:

$$\alpha_0(0) = \frac{PL^2}{2IE} \quad \text{dan} \quad \alpha_0(L) = 0$$

Total rotasinya adalah:

$$\theta(x) = \frac{dv_0(x)}{dx} = \frac{P}{GA_s} + \frac{PL^2}{2IE} - \frac{Px^2}{2IE} \qquad (l)$$

Total rotasi pada ujung-ujung balok adalah:

$$\theta(0) = \underbrace{\frac{P}{GA_s}}_{Shear} + \underbrace{\frac{PL^2}{2IE}}_{Flexure} \quad \text{dan} \quad \theta(L) = \underbrace{\frac{P}{GA_s}}_{Shear}$$

Menarik untuk dicermati bahwa pada ujung jepit, hanya rotasi lentur α_0 yang bernilai nol. Hal ini ditunjukkan dengan jelas pada Gambar 2.16.

Medan regangan geser adalah:

$$\gamma_0(x) = \frac{dv_0(x)}{dx} - \alpha_0(x) = \frac{P}{GA_s} \qquad (m)$$

Momen lentur sepanjang sumbu balok adalah:

$$M(x) = IE\frac{d\alpha_0(x)}{dx} = -Px \qquad (n)$$

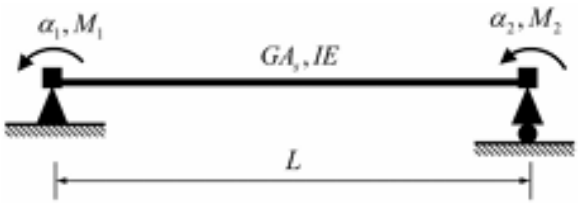
Contoh 2.4

Turunkan matriks kekakuan K_{T-Beam} untuk elemen balok berdasarkan persamaan diferensial yang mengatur perilaku balok prismatik Timoshenko dengan tumpuan sederhana, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2.22.

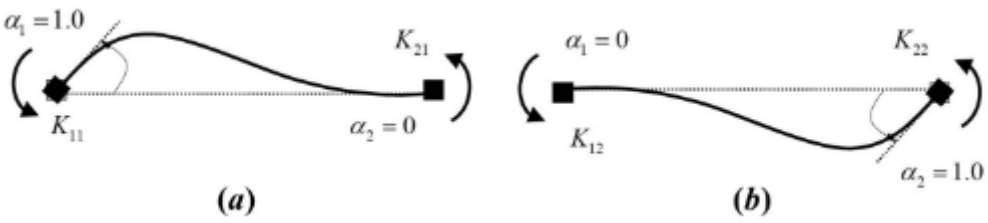
- **Penyelesaian**: Untuk kasus elemen balok Timoshenko dengan kekakuan lentur IE dan kekakuan geser GA_s yang konstan, kinematika balok (sistem perpindahan) didefinisikan sepenuhnya oleh perpindahan ujung (nodal) (α_1 dan α_2), sedangkan kinetika balok (sistem gaya) digambarkan sepenuhnya oleh gaya ujung (nodal) (M_1 dan M_2). Hal ini berarti bahwa jika perpindahan nodal dan gaya nodal diketahui, maka perilaku keseluruhan balok dapat ditentukan secara lengkap. Perlu diingat kembali dari materi dasar analisis struktur bahwa matriks kekakuan elemen balok Timoshenko K_{T-Beam}, yang menghubungkan gaya nodal dengan perpindahan nodal, adalah:

$$P = K_{T-Beam}U$$

$$P = \lfloor M_1 \quad M_2 \rfloor^T \quad \text{dan} \quad U = \lfloor \alpha_1 \quad \alpha_2 \rfloor^T$$



Gambar 2.22 Contoh 2.4.



Gambar 2.23 Contoh 2.4 (Lanjutan).

$$K_{T-Beam} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

Matriks kekakuan elemen balok ini juga dapat diperoleh dari persamaan diferensial yang mendasarinya.

Perlu dicatat bahwa koefisien pengaruh kekakuan K_{ij} bersesuaian dengan reaksi pada derajat kebebasan i akibat perpindahan satuan pada derajat kebebasan j. Kolom 1 dari K_{T-Beam} diperoleh dengan menerapkan syarat batas esensial berikut, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2.23a:

$$v_0(0) = 0\ ,\ \alpha_0(0) = 1.0\ ,\ v_0(L) = 0\ ,\ \text{dan}\ \alpha_0(L) = 0$$

Perlu diingat bahwa:

$$GA_s\left[\frac{d^2v_0(x)}{dx^2} - \frac{d\alpha_0(x)}{dx}\right] = 0 \qquad (a)$$

$$GA_s\left[\frac{dv_0(x)}{dx} - \alpha_0(x)\right] + IE\frac{d^2\alpha_0(x)}{dx^2} = 0 \qquad (b)$$

Dari persamaan pengatur kedua (b),

$$\frac{dv_0(x)}{dx} = \alpha_0(x) - \frac{IE}{GA_s}\frac{d^2\alpha_0(x)}{dx^2} \qquad (c)$$

Dengan menyubstitusikan (c) ke dalam persamaan penentu pertama (a), diperoleh hubungan berikut:

$$\frac{d^3\alpha_0(x)}{dx^3} = 0 \qquad (d)$$

Mengintegralkan (d) menghasilkan:

$$\alpha_0(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 \qquad (e)$$

Mensubstitusikan (e) ke dalam (c) menghasilkan:

$$\frac{dv_0(x)}{dx} = -\frac{2IE}{GA_s}C_3 + C_1 + C_2x + C_3x^2 \qquad (f)$$

Mengintegralkan (f) terhadap x:

$$v_0(x) = C_4 + \left(C_1 - \frac{2IE}{GA_s}C_3\right)x + \frac{C_2x^2}{2} + \frac{C_3x^3}{3} \qquad (g)$$

Syarat Batas:

(1) $v_0(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$:Essential

(2) $\alpha_0(0) = 1.0 \Rightarrow C_1 = 1.0$:Essential

(3) $v_0(L) = 0 \Rightarrow \left(-\frac{2IE}{GA_s}C_3 + 1\right) + \frac{C_2L^2}{2} + \frac{C_3L^3}{3} = 0$:Essential

(4) $\alpha_0(L) = 0 \Rightarrow 1 + C_2L + C_3L^2 = 0$:Essential

$$\Rightarrow \quad C_3 = \frac{1}{2\left(\frac{L^2}{6} + \frac{2IE}{GA_s}\right)} \quad \text{dan} \quad C_2 = -\frac{1}{L} - \frac{L}{2\left(\frac{L^2}{6} + \frac{2IE}{GA_s}\right)}$$

$$\alpha_0(x) = 1 - \left(\frac{1}{L} + \frac{L}{2\left(\frac{L^2}{6} + \frac{2IE}{GA_s}\right)}\right)x + \frac{1}{2\left(\frac{L^2}{6} + \frac{2IE}{GA_s}\right)}x^2$$

Dengan demikian:

$$M(x) = IE\frac{d\alpha_0(x)}{dx} = IE\left[-\frac{1}{L} - \frac{L}{2\left(\frac{L^2}{6} + \frac{2IE}{GA_s}\right)} + \frac{1}{\frac{L^2}{6} + \frac{2IE}{GA_s}}x\right]$$

Dengan demikian:

$$K_{11} = M_1 = -M(0) = IE\left[\frac{1}{L} + \frac{L}{2\left(\frac{L^2}{6} + \frac{2IE}{GA_s}\right)}\right] \quad \text{dan}$$

$$K_{21} = M_2 = M(L) = IE\left[-\frac{1}{L} + \frac{L}{2\left(\frac{L^2}{6} + \frac{2IE}{GA_s}\right)}\right]$$

$\Phi = 12IE/GA_sL^2$ didefinisikan sebagai ukuran tak berdimensi dari hubungan kekakuan lentur-geser. Oleh karena itu, ekspresi di atas dapat disederhanakan menjadi

$$K_{11} = \frac{(4+\Phi)IE}{L(1+\Phi)} \quad \text{dan} \quad K_{21} = \frac{(2-\Phi)IE}{L(1+\Phi)}$$

Kolom 2 dari K_{T-Beam} diperoleh dengan menerapkan syarat batas esensial berikut sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2.23b:

$$v_0(0) = 0\ ,\ \alpha_0(0) = 0\ ,\ v_0(L) = 0\ ,\ \text{dan}\ \alpha_0(L) = 1.0$$

Mengikuti prosedur yang sama akan menghasilkan:

$$K_{12} = \frac{(2-\Phi)IE}{L(1+\Phi)} \quad \text{dan} \quad K_{22} = \frac{(4+\Phi)IE}{L(1+\Phi)}$$

Akibatnya, matriks kekakuan adalah:

$$K_{T-Beam} = \frac{IE}{L(1+\Phi)}\begin{bmatrix}(4+\Phi) & (2-\Phi)\\ (2-\Phi) & (4+\Phi)\end{bmatrix}$$

Jika balok bersifat langsing, deformasi geser akan sangat kecil dibandingkan dengan deformasi lentur, sehingga $\Phi \to 0$ (GA_s bernilai besar dibandingkan dengan EI) dan matriks kekakuan balok Timoshenko pada akhirnya tereduksi menjadi matriks kekakuan balok Euler-Bernoulli.

$$\Phi = 0 \Rightarrow K_{EB-Beam} = K_{T-Beam} = \frac{IE}{L}\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

BAB 3
PERSAMAAN KESETIMBANGAN

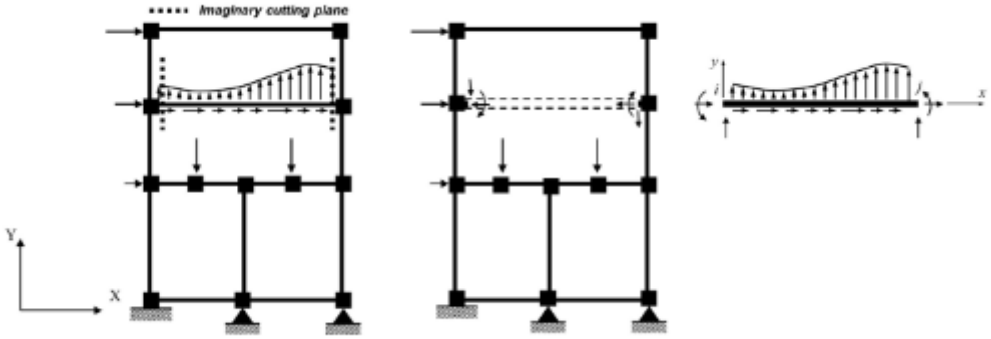
3.1 KESETIMBANGAN STATIS PADA STRUKTUR RANGKA

Sebagaimana disebutkan dalam Bab 1, kesetimbangan merupakan salah satu dari tiga unsur dasar yang diperlukan dalam setiap pendekatan analisis struktur. Dalam bab ini, fokus utamanya adalah pada berbagai sudut pandang mengenai pertimbangan kesetimbangan (*statis*) yang dihadapi dalam analisis struktur. Terdapat beragam bentuk untuk mendeskripsikan kondisi kesetimbangan. Kondisi tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk tegangan atau gaya (resultan tegangan). Bentuk pertama sering dijumpai dalam mata kuliah Mekanika Kontinum, sedangkan bentuk kedua yang telah dibahas pada Bab 2 ditemukan dalam mata kuliah dasar Mekanika Bahan dan Analisis Struktur. Hubungan kesetimbangan harus berlaku untuk semua tingkatan benda bebas, termasuk segmen diferensial, elemen struktur, bagian struktur, maupun struktur secara keseluruhan. Dalam buku teks ini, pembahasan hanya mencakup pertimbangan kesetimbangan untuk struktur rangka. Pertimbangan kesetimbangan bagi jenis struktur lainnya (misalnya pelat atau cangkang) akan dipelajari dalam mata kuliah yang lebih lanjut, seperti Metode Elemen Hingga.

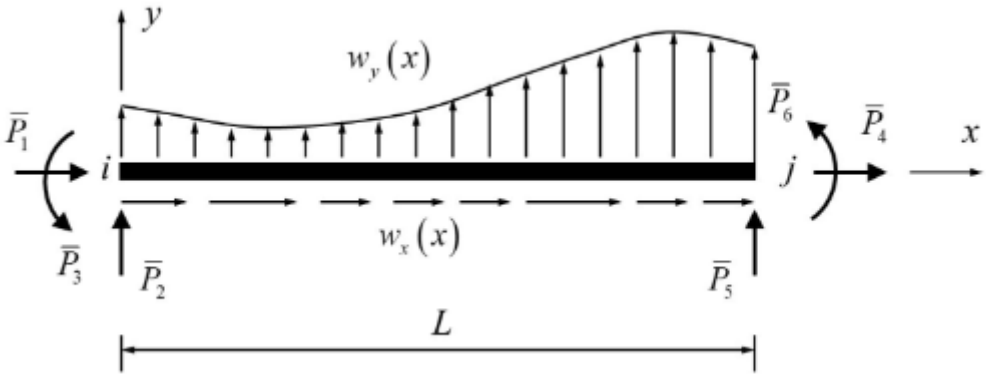
3.2 GAYA ELEMEN DASAR DAN KESETIMBANGAN RANGKA 2D

Sebuah struktur rangka dua dimensi yang mengalami pembebanan umum diperlihatkan pada Gambar 3.1. Sistem referensi Cartesian $X - Y - Z$ digunakan untuk mendeskripsikan geometri dan besaran-besaran global struktur tersebut. Sumbu Z tegak lurus terhadap bidang struktur dan mengarah ke arah pembaca. Gelagar pada tingkat ketiga diambil sebagai contoh elemen rangka umum. Bidang potong imajiner digunakan untuk mengisolasi gelagar ini. Karena buku teks ini hanya membahas struktur bidang, setiap potongan imajiner tersebut menghasilkan tiga pasang gaya, yaitu sepasang gaya yang sejajar dengan sumbu elemen, sepasang gaya yang tegak lurus terhadap sumbu elemen, dan sepasang momen. Gelagar yang telah diisolasi, beserta beban elemen dan gaya ujung yang timbul akibat pemotongan tersebut, diperlihatkan pada Gambar 3.2.

Pada bagian ini, hubungan kesetimbangan untuk elemen rangka umum tersebut dirumuskan berdasarkan sistem referensi lokalnya. Sistem referensi Cartesian $x - y - z$ digunakan sebagai sumbu referensi lokal untuk setiap elemen. Secara konvensional, simpul i dipilih sebagai titik awal sedangkan simpul j dipilih sebagai titik akhir. Sumbu x lokal yang positif mengarah dari simpul i menuju simpul j. Untuk struktur bidang, sumbu z lokal umumnya ditetapkan agar berimpit dengan sumbu Z global yang mengarah ke pembaca. Dengan demikian, sumbu-y lokal terdefinisi secara unik. Diasumsikan bahwa gaya-gaya yang bekerja pada sisi elemen di setiap titik potongan memiliki arah positif terhadap sumbu-sumbu lokal. Berdasarkan hukum gerak ketiga Newton, arah gaya yang bekerja pada sisi simpul (*node*) dari potongan tersebut dapat ditentukan.



Gambar 3.1 Struktur Rangka Dua Dimensi di Bawah Pembebanan Umum.



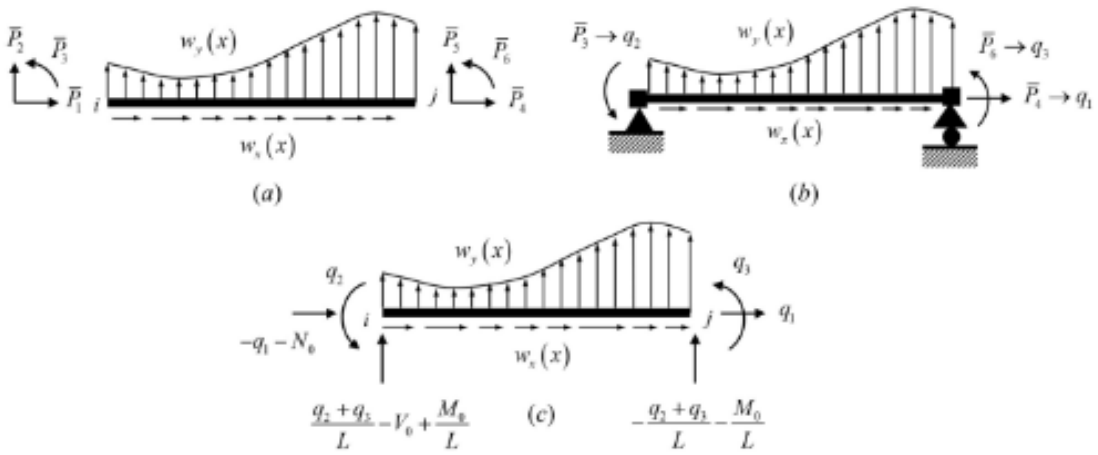
Gambar 3.2 Elemen Rangka Dua Dimensi.

Gaya-gaya pada ujung elemen dalam sistem acuan lokal (Gambar 3.2) dapat dikelompokkan ke dalam vektor $\overline{P}$ sebagai berikut:

$$\overline{P} = \lfloor \overline{P}_1 \quad \overline{P}_2 \rfloor^T = \lfloor \overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \overline{P_3} \quad \overline{P_4} \quad \overline{P_5} \quad \overline{P_6} \rfloor^T \tag{3.1}$$

Komponen-komponen vektor gaya ujung $\overline{P}$ disusun dengan cara berikut: dimulai dari titik simpul i, pertama-tama ditetapkan derajat kebebasan (DOF) pada sumbu-x lokal (komponen pertama), kemudian DOF pada sumbu-y lokal (komponen kedua), lalu DOF terhadap sumbu-z lokal (komponen ketiga), dan seterusnya hingga mencapai titik simpul j pada elemen tersebut. Keenam komponen ini membentuk rangkaian lengkap gaya ujung untuk elemen yang ditinjau sebagai benda bebas dalam sistem acuan lokal.

Namun, hanya tiga dari keenam gaya tersebut yang bersifat independen. Akibatnya, hanya tiga dari enam gaya itu yang dapat dipilih sebagai gaya independen yang dikenal sebagai "gaya elemen dasar" (*basic member forces*). Tiga gaya ujung lainnya bersifat dependen dan dapat dinyatakan dalam bentuk gaya elemen dasar tersebut. Hubungan antara gaya ujung independen dan dependen dapat ditentukan berdasarkan kondisi kesetimbangan elemen sebagai benda bebas. Dalam hal ini, sistem "balok dengan tumpuan sederhana" (*simply supported beam*) yang diperlihatkan pada Gambar 3.3 digunakan untuk menetapkan hubungan antara gaya ujung independen dan dependen tersebut.



Gambar 3.3 Model Balok Tumpuan Sederhana: (a) Sistem Lengkap, (b) Sistem Dasar, (c) Sistem Dasar dengan Gaya Reaksi.

Dengan meninjau tiga kondisi kesetimbangan pada elemen rangka yang ditunjukkan dalam Gambar 3.3a, diperoleh hal berikut:
Penjumlahan gaya pada sumbu-x lokal:

$$\sum F_x = 0; \overline{P_1} + \overline{P_4} + \int_0^L w_x(x)dx = 0 \Rightarrow \overline{P_1} = -\overline{P_4} - N_0 \tag{3.2}$$

Penjumlahan momen terhadap titik simpul j pada elemen rangka:

$$\sum_j M_z = 0; \overline{P_3} - \overline{P_2}L + \overline{P_6} - \int_0^L (L-x)w_y(x)dx = 0 \Rightarrow \overline{P_2} = \frac{\overline{P_3}}{L} + \frac{\overline{P_6}}{L} - V_0 + \frac{M_0}{L} \tag{3.3}$$

Penjumlahan momen terhadap titik simpul i pada elemen rangka:

$$\sum_i M_z = 0; \overline{P_3} + \overline{P_5}L + \overline{P_6} + \int_0^L w_y(x)xdx = 0 \Rightarrow \overline{P_5} = -\frac{\overline{P_3}}{L} - \frac{\overline{P_6}}{L} - \frac{M_0}{L} \tag{3.4}$$

Di mana

$$N_0 = \int_0^L w_x(x)dx\,; \quad V_0 = \int_0^L w_y(x)dx\,; \quad \text{dan} \quad M_0 = \int_0^L w_y(x)xdx \tag{3.5}$$

Berdasarkan ketiga persamaan kesetimbangan ((3.2), (3.3), dan (3.4)), $\overline{P_3}$, $\overline{P_4}$, dan $\overline{P_6}$ dipilih sebagai gaya ujung bebas. Dengan demikian, $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$, dan $\overline{P_5}$ merupakan gaya ujung terikat dan

dapat dinyatakan dalam bentuk gaya ujung bebas melalui tinjauan kesetimbangan. Untuk kemudahan, gaya ujung bebas tersebut dapat dinamai ulang sebagai berikut:

$$\overline{P_4} \rightarrow q_1; \quad \overline{P_3} \rightarrow q_2; \quad \text{dan} \quad \overline{P_6} \rightarrow q_3 \tag{3.6}$$

Akibatnya, vektor gaya elemen dasar q didefinisikan sebagai:

$$q = \lfloor q_1 \quad q_2 \quad q_3 \rfloor^T = \lfloor \overline{P_4} \quad \overline{P_3} \quad \overline{P_6} \rfloor^T \tag{3.7}$$

Sistem dasar ini dapat dipandang sebagai balok dengan tumpuan sederhana seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.3b. Sistem tumpuan virtual ini semata-mata membantu pembaca dalam memilih kondisi kesetimbangan dan digunakan oleh Limkatanyu untuk mendeskripsikan sistem dasar bagi model rangka dengan nonlinearitas geometris yang didasarkan pada penyatuan teori balok Euler-Bernoulli-von Karman dan konsep corotational. Akan tetapi, konsep visualisasi ini dapat menimbulkan kesalahpahaman. Berdasarkan Persamaan (3.2), (3.3), dan (3.4), bentuk matriks persamaan kesetimbangan untuk sistem balok dengan tumpuan sederhana tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} \overline{P_1} \\ \overline{P_2} \\ \overline{P_5} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_0 \\ -V_0 + \frac{M_0}{L} \\ -\frac{M_0}{L} \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

$$\begin{Bmatrix} \overline{P_4} \\ \overline{P_3} \\ \overline{P_6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.9}$$

dan untuk sistem lengkap (Gambar 3.3a dan c) sebagai:

$$\begin{Bmatrix} \overline{P_1} \\ \overline{P_2} \\ \overline{P_3} \\ \overline{P_4} \\ \overline{P_5} \\ \overline{P_6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_0 \\ -V_0 + \frac{M_0}{L} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{M_0}{L} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.10}$$

atau dalam format ringkas sebagai:

$$\begin{Bmatrix} \overline{P_1} \\ \overline{P_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{b_{1B}} \\ \overline{b_{2B}} \end{bmatrix} q + \begin{Bmatrix} \overline{P_{10}} \\ \overline{P_{20}} \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \overline{P} = \overline{b_B} q + \overline{P_0} \tag{3.11}$$

di mana vektor $\overline{P_{10}}$ dan $\overline{P_{20}}$ memuat gaya-gaya ujung batang akibat beban batang, dan $\overline{b_B}$ adalah matriks kesetimbangan batang untuk model balok dengan tumpuan sederhana. Terlihat bahwa hanya gaya-gaya dependen yang dipengaruhi oleh adanya beban batang.

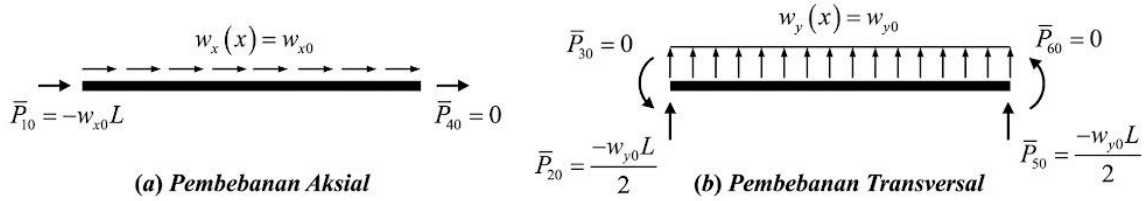
Untuk kasus beban batang terbagi rata (Gambar 3.4), komponen-komponen vektor beban batang $\overline{P_0}$ adalah:

$$\overline{P_{10}} = -w_{x0}L; \quad \overline{P_{20}} = -\frac{w_{y0}L}{2}; \quad \overline{P_{30}} = 0; \quad \overline{P_{40}} = 0; \quad \overline{P_{50}} = -\frac{w_{y0}L}{2}; \quad \text{dan} \quad \overline{P_{60}} = 0 \qquad (3.12)$$

Catatan

(i) Perlu dicatat bahwa pemilihan sistem gaya dasar tidaklah tunggal, dan terdapat pilihan lain untuk sistem gaya dasar tersebut, misalnya: sistem balok dengan sambungan jepit (fixed) dan tumpuan rol. Penurunan persamaan kesetimbangan matriks untuk sistem balok dengan sambungan jepit dan tumpuan rol ini diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

(ii) Untuk jenis pembebanan elemen lainnya (misalnya beban terbagi rata linear pada elemen), penurunan vektor beban elemen $\overline{P_0}$ dapat dilakukan dengan cara serupa dan diserahkan kepada pembaca sebagai latihan akhir bab.



Gambar 3.4 Beban Terbagi Rata: Model Balok dengan Tumpuan Sederhana.

3.3 TRANSFORMASI GAYA UJUNG ANTARA SISTEM KOORDINAT LOKAL DAN GLOBAL

Pada bagian sebelumnya, persamaan kesetimbangan matriks (3.11) telah dinyatakan terhadap sistem acuan lokal (x, y, dan z). Namun, penting juga untuk menyatakan persamaan kesetimbangan matriks tersebut dalam sistem acuan global (X, Y, dan Z). Dengan kata lain, hubungan antara gaya-gaya di ujung elemen dalam sistem acuan lokal dan global harus ditetapkan. Hal ini dapat dicapai melalui transformasi komponen-komponen vektor.

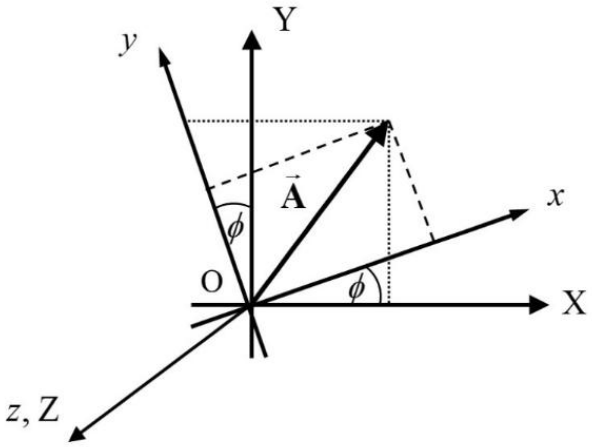
Pada Gambar 3.5, sumbu acuan lokal membentuk sudut ϕ terhadap sumbu acuan global. Ini berarti sudut ϕ diukur dari sistem acuan global ke sistem acuan lokal. Tanda sudut ϕ mengikuti aturan tangan kanan. Vektor $\bar{A}$ pada Gambar 3.5 dapat diuraikan menjadi komponen-komponen $x - y$ maupun $X - Y$. Perlu dicatat bahwa $\bar{A}$ dapat dianggap sebagai vektor gaya yang bekerja pada titik simpul i atau j. Kini perlu dicari hubungan antara komponen-komponen vektor yang didefinisikan terhadap sistem acuan global dan lokal.

Berdasarkan tinjauan geometris terhadap vektor $\bar{A}$ pada Gambar 3.5, hubungan untuk mentransformasikan komponen vektor dari sistem acuan $x - y$ ke sistem acuan $X - Y$ adalah:

$$A_X = A_x \cos\phi - A_y \sin\phi \quad \text{dan} \quad A_Y = A_x \sin\phi + A_y \cos\phi \tag{3.13}$$

atau dalam bentuk matriks sebagai:

$$\begin{Bmatrix} A_X \\ A_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad A_{XY} = T_{ROT}^T A_{xy} \tag{3.14}$$



Gambar 3.5 Transformasi Komponen Vektor Bidang→ A.

di mana A_X dan A_Y masing-masing merupakan komponen X dan Y dari vektor $\bar{A}$; serta A_X dan A_Y masing-masing merupakan komponen x dan y dari vektor $\bar{A}$. Matriks T_{ROT} dikenal sebagai "Matriks Rotasi". Sebaliknya, hubungan untuk mentransformasikan komponen vektor dari sistem acuan $X - Y$ ke sistem acuan $x - y$ adalah:

$$A_x = A_X \cos\phi + A_Y \sin\phi \quad \text{dan} \quad A_y = -A_X \sin\phi + A_Y \cos\phi \tag{3.15}$$

atau dalam bentuk matriks sebagai:

$$\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_X \\ A_Y \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad A_{xy} = T_{ROT} A_{XY} \tag{3.16}$$

Berdasarkan Persamaan (3.14) dan (3.16), dapat disimpulkan bahwa T_{ROT} merupakan matriks ortogonal yang memiliki sifat yang sangat berguna:

$$T_{ROT}^T = T_{ROT}^{-1} \quad \text{dan} \quad |T_{ROT}| = 1 \tag{3.17}$$

Seperti disebutkan sebelumnya, akan lebih mudah untuk menjaga sumbu z lokal tetap bertepatan dengan sumbu Z global untuk struktur bidang. Oleh karena itu, jika vektor $\bar{A}$

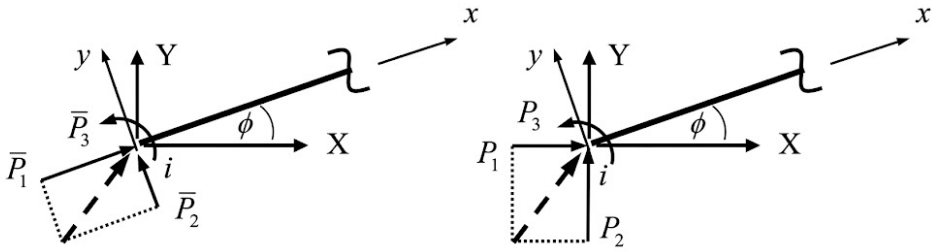
mempunyai proyeksi sepanjang sumbu z, maka vektor tersebut adalah sama seperti sepanjang sumbu Z, atau sebaliknya. Hubungan transformasi Persamaan. (3.14) dan (3.16) dapat ditambah menjadi:

$$\begin{Bmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad A_{XYZ} = T_{ROT}^T A_{xyz} \tag{3.18}$$

Dan

$$\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad A_{xyz} = T_{ROT} A_{XYZ} \tag{3.19}$$

secara berturut-turut. Perlu dicatat bahwa sifat ortogonal dari matriks rotasi T_{ROT} tetap terjaga. Karena tujuan saat ini adalah menetapkan hubungan transformasi antara komponen gaya ujung yang bekerja pada sistem koordinat lokal dan global, maka gaya yang bekerja pada titik simpul i sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 3.6 akan ditinjau. Gambar 3.6a memperlihatkan komponen-komponen gaya dalam sistem acuan lokal, sedangkan Gambar 3.6b memperlihatkannya dalam sistem acuan global. Berdasarkan hubungan transformasi pada Persamaan (3.18), hubungan antara komponen-komponen gaya yang ditunjukkan pada Gambar 3.6a dan *b* adalah:



(a) Sistem Koordinat Lokal **(b)** Sistem Koordinat Global

Gambar 3.6 Transformasi gaya ujung elemen pada titik simpul i.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{P_1} \\ \overline{P_2} \\ \overline{P_3} \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad P_1 = T_{ROT}^T \overline{P_1} \tag{3.20}$$

dan sebaliknya,

$$\begin{Bmatrix} \overline{P_1} \\ \overline{P_2} \\ \overline{P_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \overline{P_1} = T_{ROT} P_1 \tag{3.21}$$

Pertimbangan serupa diterapkan pada gaya yang bekerja pada titik simpul j (Gambar 3.7) dan menghasilkan hubungan transformasi yang sama, yaitu:

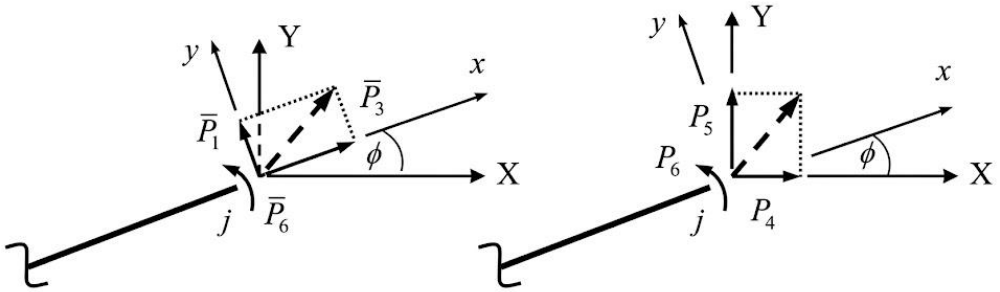
$$\begin{Bmatrix} P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{P_4} \\ \overline{P_5} \\ \overline{P_6} \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad P_2 = T_{ROT}^T \overline{P_2} \tag{3.22}$$

dan sebaliknya,

$$\begin{Bmatrix} \overline{P_4} \\ \overline{P_5} \\ \overline{P_6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \overline{P_2} = T_{ROT} P_2 \tag{3.23}$$

Menggabungkan Pers. (3.20) dan (3.22) menghasilkan hubungan transformasi untuk gaya ujung batang:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{P_1} \\ \overline{P_2} \\ \overline{P_3} \\ \overline{P_4} \\ \overline{P_5} \\ \overline{P_6} \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad P = \Gamma_{ROT}^T \bar{P} \tag{3.24}$$



(a) Sistem Koordinat Lokal ***(b) Sistem Koordinat Global***

Gambar 3.7 Transformasi gaya ujung batang pada titik simpul j.

atau sebaliknya

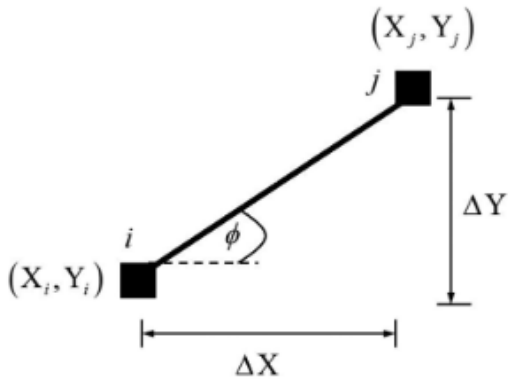
$$\begin{Bmatrix} \overline{P_1} \\ \overline{P_2} \\ \overline{P_3} \\ \overline{P_4} \\ \overline{P_5} \\ \overline{P_6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \bar{P} = \Gamma_{ROT} P \tag{3.25}$$

Di mana

$$\Gamma_{ROT} = \begin{bmatrix} T_{ROT} & 0 \\ 0 & T_{ROT} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

Terlihat bahwa suku-suku di luar diagonal pada matriks Γ_{ROT} bernilai nol. Hal ini mengimplikasikan bahwa komponen gaya ujung pada titik simpul i dan j ditransformasikan secara independen. Perlu dicatat bahwa susunan komponen vektor P serupa dengan susunan komponen vektor $\bar{P}$. Dimulai dari titik simpul i, derajat kebebasan (DOF) ditetapkan terlebih dahulu pada sumbu X global (komponen pertama), kemudian DOF pada sumbu Y global (komponen kedua), lalu DOF terhadap sumbu Z global (komponen ketiga), dan seterusnya dengan urutan yang sama hingga mencapai titik simpul j pada elemen tersebut.

Dalam implementasi komputer program analisis matriks, nilai sudut ϕ untuk setiap elemen tidak harus diberikan secara eksplisit karena nilai kosinus arah ($\cos\phi$ dan $\sin\phi$) tidak dihitung secara langsung. Sebaliknya, nilai-nilai tersebut dihitung secara tidak langsung berdasarkan data koordinat titik simpul i dan j (Gambar 3.8) sebagai berikut:



Gambar 3.8 Perhitungan Tak Langsung Kosinus Arah.

$$\Delta X = X_j - X_i; \quad \Delta Y = Y_j - Y_i; \text{ dan } L = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2} \tag{3.27}$$

$$\cos\phi = \Delta X/L \text{ dan } \sin\phi = \Delta Y/L \tag{3.28}$$

3.4 KESEIMBANGAN DALAM SISTEM ACUAN GLOBAL: ELEMEN RANGKA

Sejauh ini, persamaan keseimbangan matriks untuk sistem balok dengan tumpuan sederhana telah dirumuskan berdasarkan sumbu acuan lokal. Selain itu, hubungan transformasi (3.24) antara gaya-gaya ujung elemen yang dinyatakan dalam sistem koordinat lokal dan global juga telah diperoleh. Berdasarkan hubungan transformasi tersebut, persamaan keseimbangan matriks untuk sistem balok dengan tumpuan sederhana dapat dengan mudah dinyatakan terhadap sumbu acuan global.

Substitusi Persamaan (3.10) ke dalam (3.24) menghasilkan persamaan keseimbangan matriks terhadap sistem acuan global sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\phi & -\frac{\sin\phi}{L} & -\frac{\sin\phi}{L} \\ -\sin\phi & \frac{\cos\phi}{L} & \frac{\cos\phi}{L} \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\phi & \frac{\sin\phi}{L} & \frac{\sin\phi}{L} \\ \sin\phi & -\frac{\cos\phi}{L} & -\frac{\cos\phi}{L} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\cos\phi\ N_0 - \sin\phi\left(\frac{M_0}{L} - V_0\right) \\ \cos\phi\left(\frac{M_0}{L} - V_0\right) - \sin\phi\ N_0 \\ 0 \\ \sin\phi\frac{M_0}{L} \\ -\cos\phi\frac{M_0}{L} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.29}$$

atau dalam format ringkas sebagai:

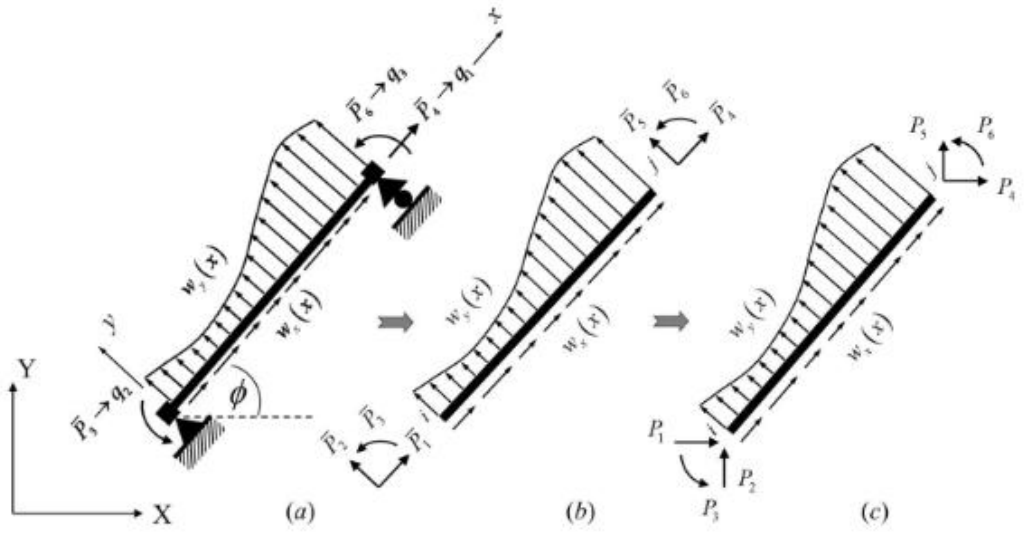
$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1B} \\ b_{2B} \end{bmatrix} q + \begin{Bmatrix} P_{10} \\ P_{20} \end{Bmatrix} \text{ atau } P = b_B q + P_0 \tag{3.30}$$

di mana b_B adalah matriks kesetimbangan untuk model balok dengan tumpuan sendi-rol (*simply supported beam*) dalam sistem acuan global. Proses transformasi gaya elemen dari sistem dasar ke sistem lengkap dalam sumbu acuan global disajikan secara skematis pada Gambar 3.9.

3.5 PERSAMAAN KESETIMBANGAN MATRIKS UNTUK STRUKTUR RANGKA

Pada bagian ini, tujuan utamanya adalah merumuskan persamaan kesetimbangan matriks untuk struktur rangka. Persamaan matriks ini menghubungkan gaya-gaya elemen dasar dengan beban luar yang bekerja pada struktur. Beban luar dapat dikategorikan menjadi beban elemen dan beban yang bekerja pada titik simpul (*nodal*). Aksi beban elemen telah diperhitungkan dalam persamaan kesetimbangan elemen sebagaimana dibahas pada bagian-bagian sebelumnya, sehingga menghasilkan beban simpul ekuivalen. Beban yang bekerja pada titik simpul dapat dibagi menjadi dua bagian berdasarkan kondisi kekangan pada derajat kebebasan.

Bagian pertama adalah gaya-gaya yang umumnya diketahui nilainya, yang terkait dengan derajat kebebasan yang tidak terkekang (bebas). Bagian kedua adalah gaya-gaya yang umumnya tidak diketahui nilainya (reaksi tumpuan) dan terkait dengan derajat kebebasan yang terkekang. Persamaan kesetimbangan matriks struktur dapat diperoleh dengan meninjau kondisi kesetimbangan pada seluruh derajat kebebasan secara bersamaan.



Gambar 3.9 Model Balok Tumpuan Sederhana: (a) Sistem Dasar; (b) Sistem Lengkap dalam Sumbu Referensi Lokal; (c) Sistem Lengkap dalam Sumbu Referensi Global.

Untuk struktur rangka secara keseluruhan, sebuah vektor yang diperluas Q memuat gaya-gaya dasar dari seluruh elemen dan didefinisikan sebagai:

$$Q = \lfloor Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_k \quad \dots \quad Q_m \rfloor^T_{3m\times 1} \tag{3.31}$$

dengan m adalah jumlah elemen dan sub-vektor Q_k memuat gaya-gaya dasar elemen k. Oleh karena itu, ukuran Q adalah $3m \times 1$.

Demikian pula, beban simpul dikelompokkan ke dalam vektor F yang didefinisikan sebagai:

$$F = \lfloor F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_k \quad \dots \quad F_n \rfloor^T_{3n\times 1} \tag{3.32}$$

dengan n adalah jumlah titik simpul dan sub-vektor F_k memuat beban yang bekerja pada titik simpul k. Oleh karena itu, ukuran F adalah $3n \times 1$.

Setelah kondisi kesetimbangan ditinjau secara keseluruhan pada semua derajat kebebasan, diperoleh persamaan kesetimbangan matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} b_1^{(1)} & b_1^{(2)} & \dots & \dots \\ b_2^{(1)} & b_2^{(2)} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & . & . \\ \vdots & \vdots & . & . \end{bmatrix}_{3n\times 3m} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_m \end{Bmatrix}_{3m\times 1} + \begin{Bmatrix} F_1^0 \\ F_2^0 \\ \vdots \\ F_n^0 \end{Bmatrix}_{3n\times 1} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}_{3n\times 1} \tag{3.33}$$

atau dalam format ringkas sebagai:

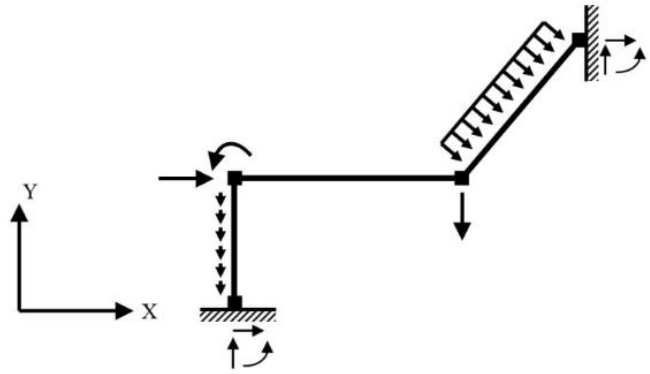
$$BQ + F^0 = F \text{ or } BQ = F - F^0 \tag{3.34}$$

di mana vektor F^0 memuat beban nodal ekuivalen akibat adanya beban pada elemen.

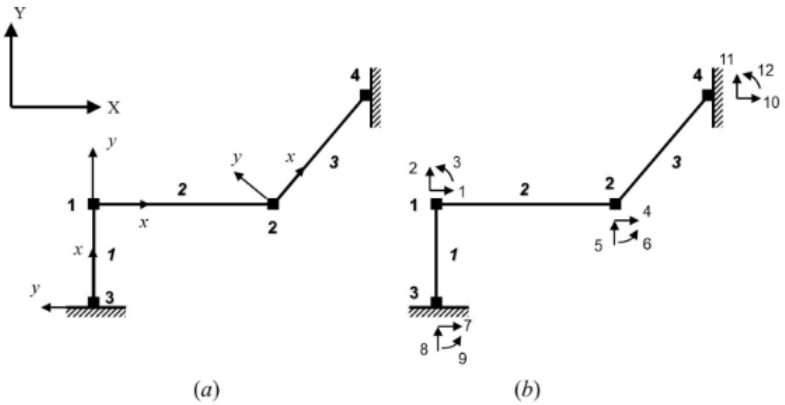
Selanjutnya, persamaan kesetimbangan matriks pada Pers. (3.34) dapat dipartisi berdasarkan beban nodal yang diketahui dan yang tidak diketahui sebagai berikut:

$$F = \begin{Bmatrix} F_{free} \\ F_{constr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{free} \\ B_{constr} \end{bmatrix} Q + \begin{Bmatrix} F^0_{free} \\ F^0_{constr} \end{Bmatrix} \text{ atau } F^* = \begin{Bmatrix} F_{free} \\ F_{constr} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F^0_{free} \\ F^0_{constr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{free} \\ B_{constr} \end{bmatrix} Q \quad (3.35)$$

di mana F_{free} dan F_{constr} masing-masing memuat beban nodal yang bekerja pada derajat kebebasan bebas dan terkekang, B_{free} dan B_{constr} masing-masing merupakan matriks kesetimbangan yang terkait dengan derajat kebebasan bebas dan terkekang, serta F^0_{free} dan F^0_{constr} masing-masing memuat beban nodal ekuivalen elemen yang bersesuaian dengan derajat kebebasan bebas dan terkekang.

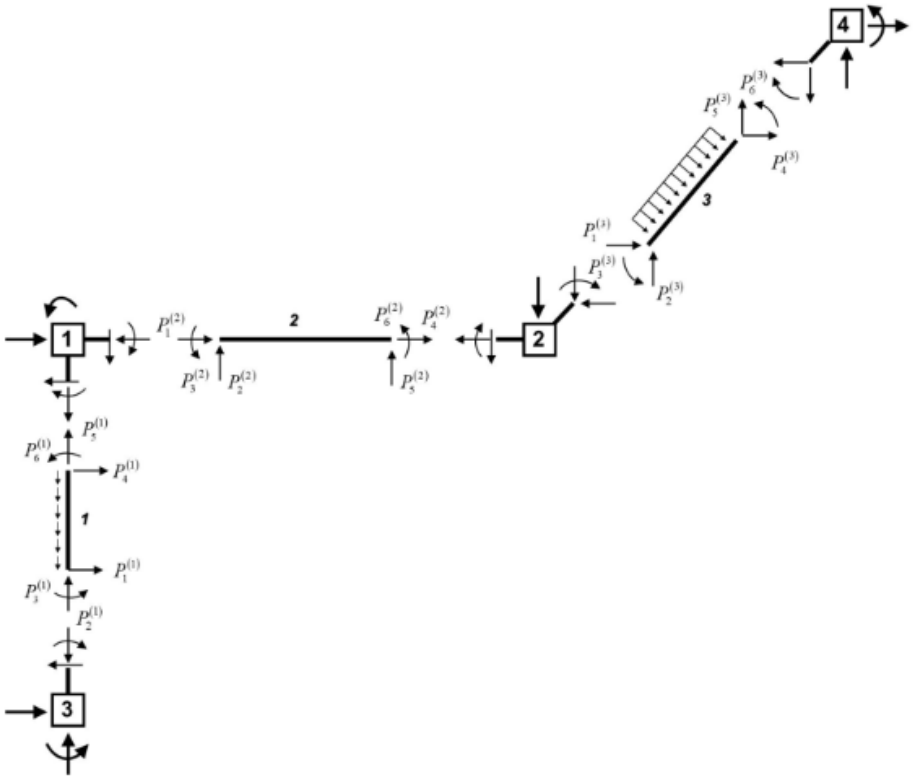


Gambar 3.10 Rangka Prototipe: Beban Simpul, Beban Batang, dan Reaksi Tumpuan.



Gambar 3.11 Portal Prototipe: (a) Sumbu Referensi Lokal; (b) Sistem Penomoran Simpul, Elemen, dan Derajat Kebebasan (DOF).

Dapat diamati bahwa dengan memindahkan beban elemen ke ruas kiri, aksi beban elemen tersebut pada akhirnya diubah menjadi beban nodal terapan ekuivalen F^0.



Gambar 3.12 Kondisi Kesetimbangan Titik Simpul.

Untuk mengilustrasikan konsep penyusunan persamaan kesetimbangan matriks struktur yang telah disebutkan sebelumnya, ditinjau sebuah rangka prototipe yang diperlihatkan pada Gambar 3.10. Gambar 3.11 menampilkan sumbu acuan lokal serta sistem penomoran untuk titik simpul, elemen, dan derajat kebebasannya.

Berdasarkan kondisi kesetimbangan titik simpul yang ditunjukkan pada Gambar 3.12, kondisi kesetimbangan pada titik simpul 1 adalah:

$$\begin{Bmatrix} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_Z = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_4^{(1)} \\ P_5^{(1)} \\ P_6^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} \\ P_3^{(2)} \end{Bmatrix} \text{ atau } F_1 = P_2^{(1)} + P_1^{(2)} \qquad (3.36)$$

Diasumsikan bahwa model balok dengan tumpuan sederhana (Gambar 3.9) digunakan untuk merepresentasikan sistem elemen dasar. Akibatnya, gaya-gaya ujung $P_2^{(1)}$ dan $P_1^{(2)}$ dapat dinyatakan dalam bentuk gaya-gaya elemen dasar Q_1 dan Q_2 sebagai berikut:

$$P_2^{(1)} = b_{2B}^{(1)} Q_1 + P_{20}^{(1)} \text{ ad} P_1^{(2)} = b_{1B}^{(2)} Q_2 + P_{10}^{(2)} \qquad (3.37)$$

Persamaan kesetimbangan nodal pada titik simpul 1 dapat dinyatakan dalam bentuk gaya-gaya dasar elemen dengan menyubstitusikan Persamaan (3.37) ke dalam Persamaan (3.36):

$$F_1 = b_{2B}^{(1)} Q_1 + b_{1B}^{(2)} Q_2 + P_{20}^{(1)} + P_{10}^{(2)} \tag{3.38}$$

Demikian pula pada
Node 2:

$$F_2 = b_{2B}^{(2)} Q_2 + b_{1B}^{(3)} Q_3 + P_{20}^{(2)} + P_{10}^{(3)} \tag{3.39}$$

Simpul 3:

$$F_3 = b_{1B}^{(1)} Q_1 + P_{10}^{(1)} \tag{3.40}$$

Simpul 4:

$$F_4 = b_{2B}^{(3)} Q_3 + P_{20}^{(3)} \tag{3.41}$$

Persamaan (3.38), (3.39), (3.40), dan (3.41) dapat ditulis secara kolektif, sehingga menghasilkan persamaan kesetimbangan matriks struktur sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}_{12\times1} = \begin{bmatrix} b_{2B}^{(1)} & b_{1B}^{(2)} & 0 \\ 0 & b_{2B}^{(2)} & b_{1B}^{(3)} \\ b_{1B}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{2B}^{(3)} \end{bmatrix}_{12\times9} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}_{9\times1} + \begin{Bmatrix} P_{20}^{(1)} + P_{10}^{(2)} \\ P_{20}^{(2)} + P_{10}^{(3)} \\ P_{10}^{(1)} \\ P_{20}^{(3)} \end{Bmatrix}_{12\times1} \tag{3.42}$$

atau dalam format ringkas sebagai:

$$F = BQ + F^0 \text{ o } F - F^0 = BQ \tag{3.43}$$

atau dalam format terpartisi sebagai:

$$F^* = \begin{Bmatrix} F_{free} \\ F_{constr} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_{free}^0 \\ F_{constr}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{free} \\ B_{constr} \end{bmatrix} Q \tag{3.44}$$

Dimana

$$F_{free} = \lfloor F_1 \quad F_2 \rfloor^T \text{ dan } F_{constr} = \lfloor F_3 \quad F_4 \rfloor^T \tag{3.45}$$

$$B_{free} = \begin{bmatrix} b_{2B}^{(1)} & b_{1B}^{(2)} & 0 \\ 0 & b_{2B}^{(2)} & b_{1B}^{(3)} \end{bmatrix} \text{ dan } B_{constr} = \begin{bmatrix} b_{1B}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{2B}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

$$F_{free}^{0} = \begin{bmatrix} P_{20}^{(1)} + P_{10}^{(2)} & P_{20}^{(2)} + P_{10}^{(3)} \end{bmatrix}^{T} \text{ dan } F_{constr}^{0} = \begin{bmatrix} P_{10}^{(1)} & P_{20}^{(3)} \end{bmatrix}^{T} \quad (3.47)$$

Dalam persamaan kesetimbangan matriks ini, terdapat 15 gaya yang tidak diketahui, yaitu 9 gaya elemen dasar Q dan 6 gaya yang bekerja pada derajat kebebasan yang terkekang (gaya reaksi) F_{constr}, namun hanya tersedia 12 persamaan kesetimbangan. Oleh karena itu, struktur ini bersifat statis tak tentu, dan terdapat jumlah solusi kesetimbangan yang tak terhingga. Derajat ketidaktentuan statis sistem tersebut adalah 15 – 12 = 3.

Perlu dicatat pula bahwa derajat ketidaktentuan statis dapat ditentukan dengan mudah berdasarkan ukuran matriks kesetimbangan B_{free}. Matriks B_{free} pada Persamaan (3.46) memiliki ukuran 6×9. Hal ini menunjukkan adanya enam persamaan kesetimbangan pada derajat kebebasan bebas, namun terdapat sembilan gaya elemen dasar dalam sistem tersebut. Dengan demikian, derajat ketidaktentuan statis sistem adalah 9 – 6 = 3. Hasil ini sama persis dengan yang diperoleh ketika seluruh persamaan kesetimbangan struktur dipertimbangkan. Perlu ditekankan bahwa persamaan kesetimbangan pada derajat kebebasan yang terkekang tidak membantu dalam menentukan gaya elemen dasar. Hal ini dikarenakan pada derajat kebebasan yang terkekang, jumlah persamaan kesetimbangan sama dengan jumlah gaya yang tidak diketahui (reaksi).

Secara umum, matriks kesetimbangan B_{free} memiliki jumlah baris yang sama dengan jumlah persamaan kesetimbangan yang tersedia pada derajat kebebasan bebas dan jumlah kolom yang sama dengan jumlah gaya dasar sistem yang tidak diketahui. Akibatnya, derajat ketidaktentuan statis (SI) merupakan selisih antara jumlah kolom n_{column} dan jumlah baris n_{row}.

$$SI = n_{column} - n_{row} \quad (3.48)$$

Secara matematis, derajat ketidaktentuan statis berkaitan dengan rank matriks kesetimbangan B_{free}. Hal ini dirangkum dalam Tabel 3.1 untuk berbagai skenario.

Contoh 3.1

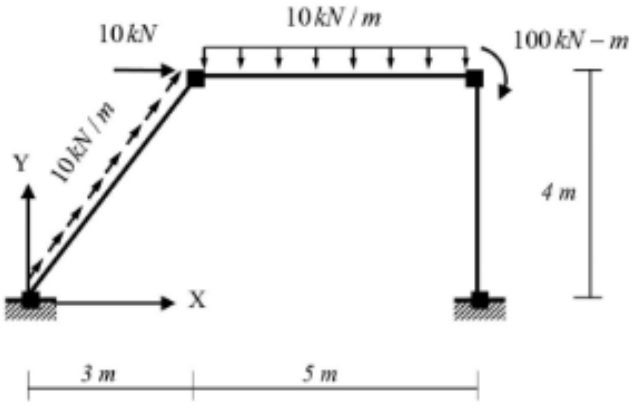
Untuk struktur rangka yang ditunjukkan pada Gambar 3.13, tugas-tugas berikut diberikan:

a) Berikan penomoran pada derajat kebebasan (baik yang terkekang maupun yang tidak terkekang) dan gaya-gaya batang dasar (*independen*) dengan menggunakan model balok dengan tumpuan sederhana (*simply supported beam*).
b) Rumuskan persamaan kesetimbangan pada derajat kebebasan yang terkekang dan yang tidak terkekang dengan menggunakan model balok dengan tumpuan sederhana.

- **Penyelesaian**: Sistem penomoran batang, titik simpul, dan derajat kebebasan (DOF) ditunjukkan pada Gambar 3.14a: Berdasarkan sistem penomoran DOF tersebut, vektor pemetaan untuk setiap batang adalah:

Tabel 3.1 Ketidaktentuan Statis dan Rank Matriks Kesetimbangan B_{free}

Skenario	$n_{\text{baris}} \times n_{\text{kolom}}$ dari Matriks $\boldsymbol{B_{free}}$	Rank r dari Matriks $\boldsymbol{B_{free}}$	Tipe Struktur
1	$n_{\text{baris}} = n_{\text{kolom}}$	$r = n_{\text{baris}}$	Statis Tertentu dan Stabil
2	$n_{\text{baris}} < n_{\text{kolom}}$	$r = n_{\text{baris}}$	Statis Tak Tentu dan Stabil
3	$n_{\text{baris}} \leq n_{\text{kolom}}$	$r < n_{\text{baris}}$	Beberapa bagian struktur membentuk mekanisme, atau moda benda tegar tidak
4	$n_{\text{baris}} > n_{\text{kolom}}$	$r \leq n_{\text{kolom}}$	dikekang dengan baik oleh tumpuan



Gambar 3.13 Contoh 3.1.

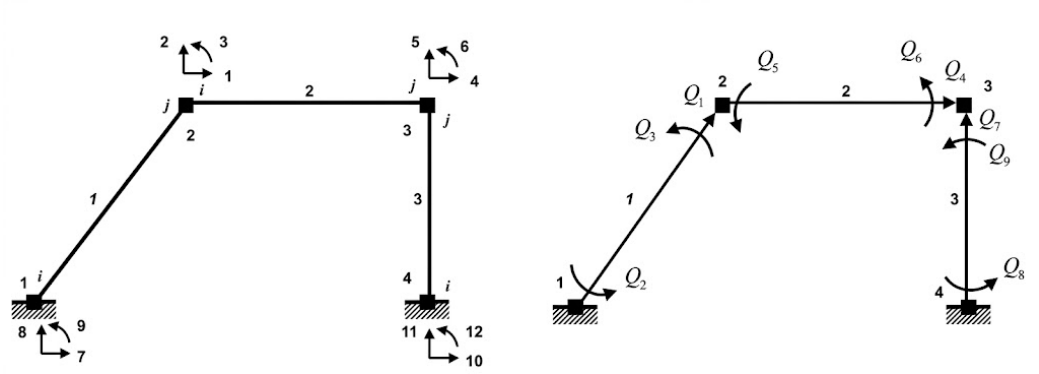
$$LM_1 = \begin{Bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}_1 ; LM_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}_2 ; \text{dan } LM_3 = \begin{Bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}_3$$

Sistem penomoran gaya batang dasar (independen) ditunjukkan pada Gambar 3.14b.

Berdasarkan persamaan kesetimbangan matriks untuk model balok dengan tumpuan sederhana, dengan meninjau sistem gaya pada setiap batang:

Batang 1 (Gambar 3.15):

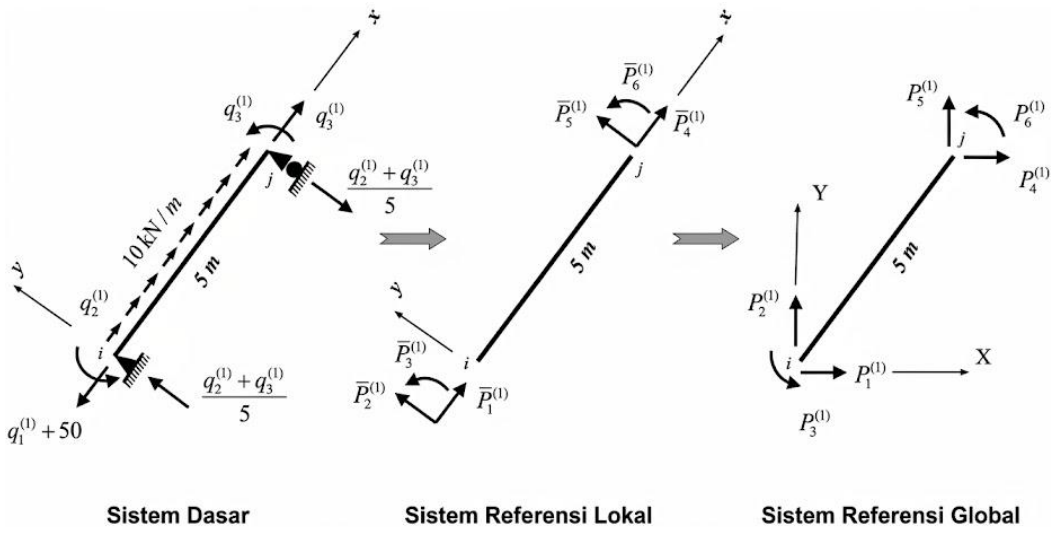
Dari Sistem Dasar ke Sistem Referensi Lokal



(a) Sistem penomoran batang, simpul, dan derajaat kebebasan (DOFs)

(b) Sistem penomoran gaya batang dasar (Independen)

Gambar 3.14 Contoh 3.1 (Lanjutan).



Gambar 3.15 Contoh 3.1 (Lanjutan).

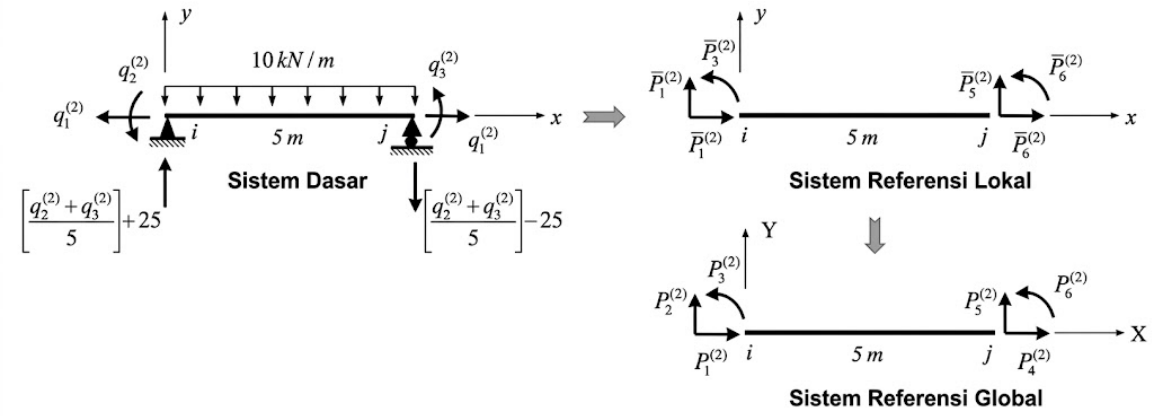
$$\begin{Bmatrix} \overline{P_1^{(1)}} \\ \overline{P_2^{(1)}} \\ \overline{P_3^{(1)}} \\ \overline{P_4^{(1)}} \\ \overline{P_5^{(1)}} \\ \overline{P_6^{(1)}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \\ q_3^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -50 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Menetapkan $\begin{bmatrix} q_1^{(1)} & q_2^{(1)} & q_3^{(1)} \end{bmatrix}^T$ sebagai $\lfloor Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \rfloor^T$ Kemudian

$$\begin{Bmatrix} \overline{P_1^{(1)}} \\ \overline{P_2^{(1)}} \\ \overline{P_3^{(1)}} \\ \overline{P_4^{(1)}} \\ \overline{P_5^{(1)}} \\ \overline{P_6^{(1)}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -50 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dari Sistem Referensi Lokal ke Sistem Referensi Global

$$\begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_3^{(1)} \\ P_4^{(1)} \\ P_5^{(1)} \\ P_6^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.16 & -0.16 \\ -0.8 & 0.12 & 0.12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0.16 & 0.16 \\ 0.8 & -0.12 & -0.12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -30 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Gambar 3.16 Contoh 3.1 (Lanjutan).

Elemen 2 (Gambar 3.16):
Dari Sistem Dasar ke Sistem Referensi Lokal

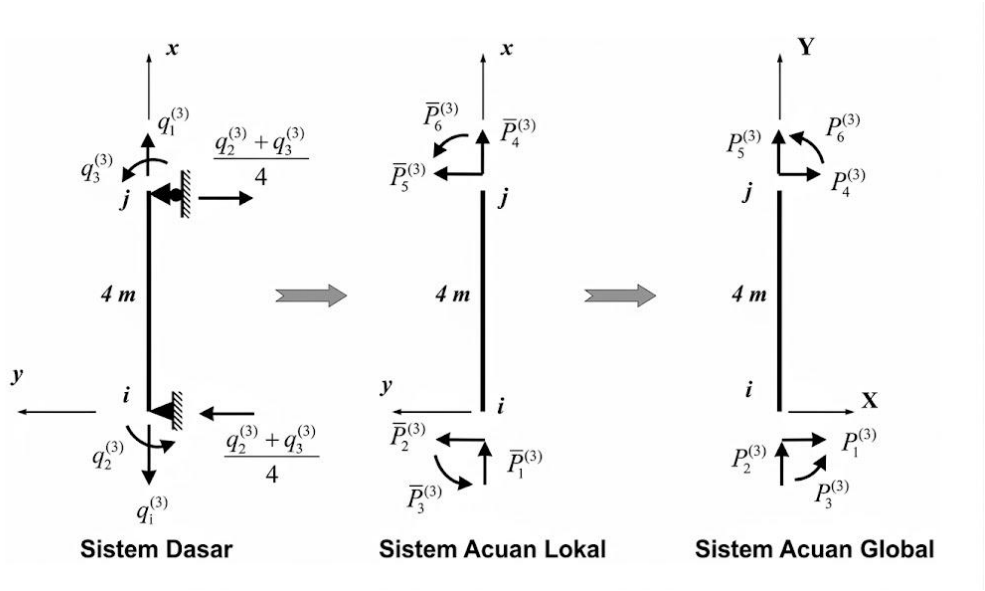
$$\begin{Bmatrix} \overline{P_1^{(2)}} \\ \overline{P_2^{(2)}} \\ \overline{P_3^{(2)}} \\ \overline{P_4^{(2)}} \\ \overline{P_5^{(2)}} \\ \overline{P_6^{(2)}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^{(2)} \\ q_2^{(2)} \\ q_3^{(2)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Menetapkan $\begin{bmatrix} q_1^{(2)} & q_2^{(2)} & q_3^{(2)} \end{bmatrix}^T$ sebagai $\lfloor Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \rfloor^T$ Kemudian

$$\begin{Bmatrix} \overline{P_1^{(2)}} \\ \overline{P_2^{(2)}} \\ \overline{P_3^{(2)}} \\ \overline{P_4^{(2)}} \\ \overline{P_5^{(2)}} \\ \overline{P_6^{(2)}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dari Sistem Referensi Lokal ke Sistem Referensi Global

$$\begin{Bmatrix} P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} \\ P_3^{(2)} \\ P_4^{(2)} \\ P_5^{(2)} \\ P_6^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Gambar 3.17 Contoh 3.1 (Lanjutan).

Elemen 3 (Gambar 3.17):
Dari Sistem Dasar ke Sistem Referensi Lokal

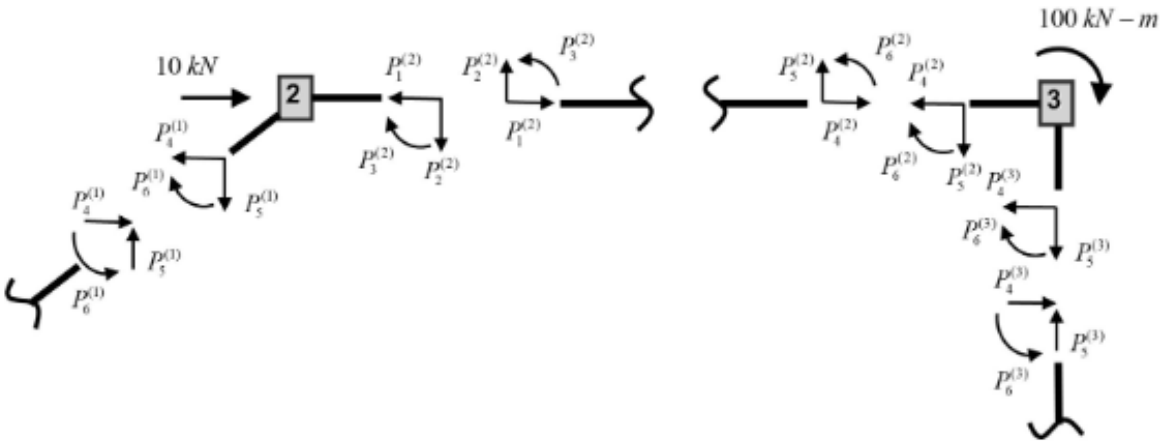
$$\begin{Bmatrix} \overline{P_1^{(3)}} \\ \overline{P_2^{(3)}} \\ \overline{P_3^{(3)}} \\ \overline{P_4^{(3)}} \\ \overline{P_5^{(3)}} \\ \overline{P_6^{(3)}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^{(3)} \\ q_2^{(3)} \\ q_3^{(3)} \end{Bmatrix}$$

Menetapkan $\begin{bmatrix} q_1^{(3)} & q_2^{(3)} & q_3^{(3)} \end{bmatrix}^T$ sebagai $\lfloor Q_7 \quad Q_8 \quad Q_9 \rfloor^T$ Kemudian

$$\begin{Bmatrix} \overline{P_1^{(3)}} \\ \overline{P_2^{(3)}} \\ \overline{P_3^{(3)}} \\ \overline{P_4^{(3)}} \\ \overline{P_5^{(3)}} \\ \overline{P_6^{(3)}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{Bmatrix}$$

Dari Sistem Referensi Lokal ke Sistem Referensi Global

$$\begin{Bmatrix} P_1^{(3)} \\ P_2^{(3)} \\ P_3^{(3)} \\ P_4^{(3)} \\ P_5^{(3)} \\ P_6^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.25 & -0.25 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.25 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{Bmatrix}$$



Gambar 3.18 Contoh 3.1 (Lanjutan).

Tinjau kondisi kesetimbangan pada titik simpul bebas (tanpa kendala) yang ditunjukkan pada Gambar 3.18:

Titik simpul 2:

$$\sum F_X = 0; \quad 10 - P_4^{(1)} - P_1^{(2)} = 0 \rightarrow 10 = 0.6Q_1 + 0.16Q_2 + 0.16Q_3 - Q_4$$

$$\sum F_Y = 0; \quad -P_5^{(1)} - P_2^{(2)} = 0 \rightarrow 0 = 0.8Q_1 - 0.12Q_2 - 0.2Q_3 + 0.2Q_4 + 0.2Q_5 + 25$$

$$\sum M_Z = 0; \quad -P_6^{(1)} - P_3^{(2)} = 0 \rightarrow 0 = Q_3 + Q_5 5$$

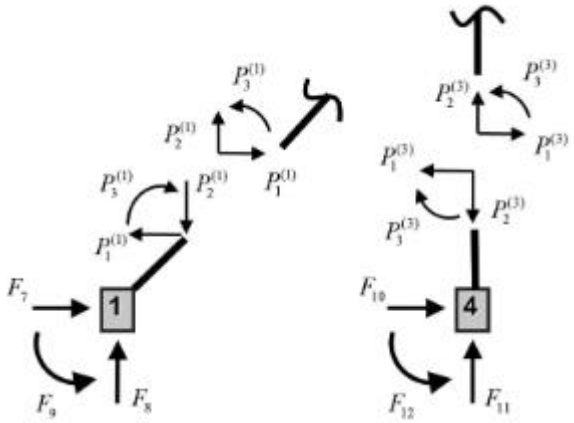
Simpul 3:

$$\sum F_X = 0; \quad -P_4^{(2)} - P_4^{(3)} = 0 \rightarrow 0 = Q_4 + 0.25Q_8 + 0.25Q_9$$

$$\sum F_Y = 0; \quad -P_5^{(2)} - P_5^{(3)} = 0 \rightarrow 0 = -0.2Q_5 - 0.2Q_6 + Q_7 + 25$$

$$\sum M_Z = 0; \quad -100 - P_6^{(2)} - P_6^{(3)} = 0 \rightarrow -100 = Q_6 + Q_9$$

Perhatikan kondisi kesetimbangan pada titik simpul dengan batasan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.19:



Gambar 3.19 Contoh 3.1 (Lanjutan).

Node 1:

$$\sum F_X = 0; \quad F_7 - P_1^{(1)} = 0 \rightarrow F_7 = -0.6Q_1 - 0.16Q_2 - 0.16Q_3 - 30$$

$$\sum F_Y = 0; \quad F_8 - P_2^{(1)} = 0 \rightarrow F_8 = -0.8Q_1 + 0.12Q_2 + 0.12Q_3 - 40$$

$$\sum M_Z = 0; \quad F_9 - P_3^{(1)} = 0 \rightarrow F_9 = Q_2$$

Simpul 4:

$$\sum F_X = 0; \quad F_{10} - P_1^{(3)} = 0 \rightarrow F_{10} = -0.25Q_8 - 0.25Q_9$$

$$\sum F_Y = 0; \quad F_{11} - P_2^{(3)} = 0 \rightarrow F_{11} = -Q_7$$

$$\sum M_Z = 0; \quad F_{12} - P_3^{(3)} = 0 \rightarrow F_{12} = Q_8$$

Secara keseluruhan, semua persamaan kesetimbangan simpul dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.16 & 0.16 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & -0.12 & -0.12 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & -0.2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -0.6 & -0.16 & -0.16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.12 & 0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \\ 0 \\ -30 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

atau dalam format ringkas:

$$F = BQ + F^0 \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} F_{free} \\ F_{constr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{free} \\ B_{constr} \end{bmatrix} Q + \begin{Bmatrix} F^0_{free} \\ F^0_{constr} \end{Bmatrix}$$

Secara terpisah, persamaan kesetimbangan pada derajat kebebasan bebas dan terkendala dinyatakan sebagai berikut:

$$F_{free} = B_{free}Q + F^0_{free} \quad \text{dan} \quad F_{constr} = B_{constr}Q + F^0_{constr}$$

Dengan memindahkan beban batang ke sisi kiri, pengaruh beban batang tersebut diubah menjadi beban terapan ekuivalen sebagai berikut:

$$F_{free} - F^0_{free} = B_{free}Q \quad \text{dan} \quad F_{constr} - F^0_{constr} = B_{constr}Q$$

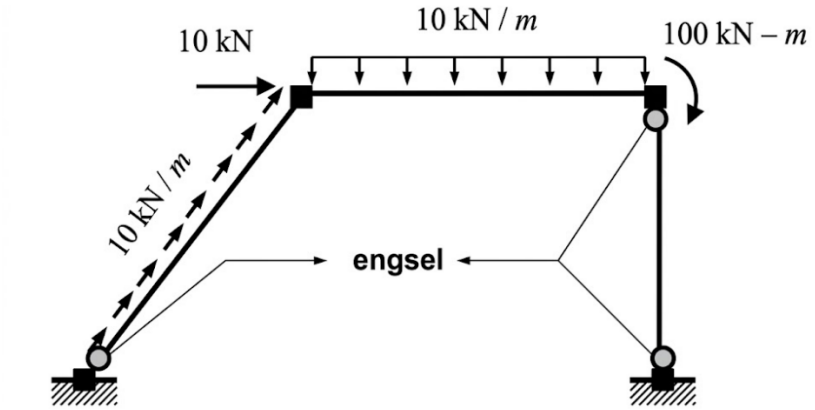
Persamaan kesetimbangan yang terkait dengan derajat kebebasan bebas (tanpa kendala) adalah:

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ -25 \\ -100 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.16 & 0.16 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & -0.12 & -0.12 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & -0.2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{Bmatrix}$$

Dalam bentuk matriks persamaan kesetimbangan yang telah disederhanakan ini, terdapat 6 persamaan kesetimbangan dan 9 variabel gaya batang dasar yang tidak diketahui. Oleh karena itu, derajat ketidaktentuan statisnya adalah 9 – 6 = 3. Jika tiga sendi (pelepasan momen) dipasang pada ujung-ujung batang seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.20, struktur ini menjadi statis tertentu.

Persamaan kesetimbangan struktur yang telah dimodifikasi ini dapat diperoleh dari persamaan kesetimbangan struktur aslinya dengan menetapkan $Q_2 = Q_8 = Q_9 = 0$. Terlihat bahwa pelepasan momen tersebut dapat dengan mudah diterapkan dalam model. Hal ini dimungkinkan karena penggunaan model balok dengan tumpuan sederhana sebagai sistem dasarnya.

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ -25 \\ -100 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.16 & 0.16 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & -0.12 & -0.12 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & -0.2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ 0 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Gambar 3.20 Contoh 3.1 (Lanjutan).

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ -25 \\ 0 \\ 0 \\ -25 \\ -100 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.16 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & -0.12 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 & -0.2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{Bmatrix}$$

Kini, terdapat 6 gaya dasar yang tidak diketahui dan 6 persamaan kesetimbangan. Dengan demikian, sistem yang statis tertentu ini dapat diselesaikan dan menghasilkan:

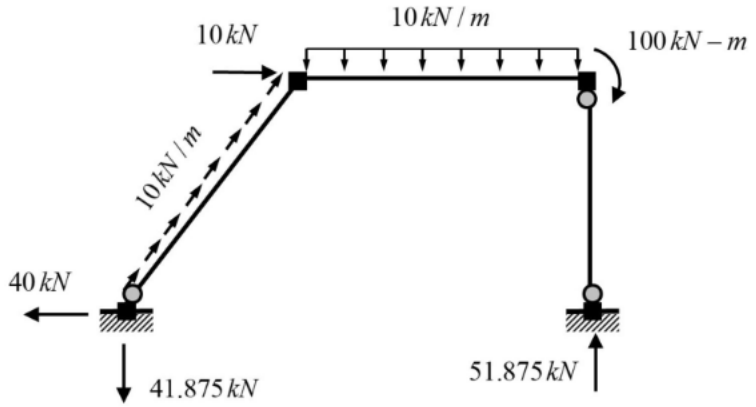
$Q_1 = 7.5$ kN; $Q_3 = 34.375$ kN-m; $Q_4 = 0$; $Q_5 = -34.375$ kN-m; $Q_6 = -100$ kN-m; dan $Q_7 = -51.875$ kN

$$Q = \lfloor Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \quad Q_7 \quad Q_8 \quad Q_9 \rfloor^T$$
$$= \lfloor 7.5 \quad 0 \quad 34.375 \quad 0 \quad -34.375 \quad -100 \quad -51.875 \quad 0 \quad 0 \rfloor^T$$

Gaya-gaya reaksi yang ditunjukkan pada Gambar 3.21 dapat diperoleh dengan mudah:

$$F_{constr} = B_{constr}Q + F^0_{constr} \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.16 & -0.16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.12 & 0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 7.5 \\ 0 \\ 34.375 \\ 0 \\ -34.375 \\ -100 \\ -51.875 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -30 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$F_7 = -40$ kN; $F_8 = -41.875$ kN; $F_9 = 0$; $F_{10} = 0$; $F_{11} = 51.875$ kN; dan $F_{12} = 0$

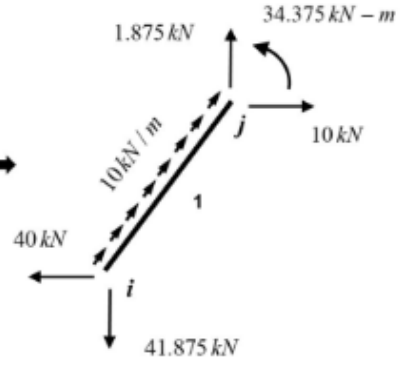


Gambar 3.21 Contoh 3.1 (Lanjutan).

Gaya-gaya ujung elemen dapat diperoleh dengan menyubstitusikan gaya-gaya dasarnya ke dalam persamaan kesetimbangan elemen.

Sebagai contoh, elemen 1 (Gambar 3.22):

$$\begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_3^{(1)} \\ P_4^{(1)} \\ P_5^{(1)} \\ P_6^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.16 & -0.16 \\ -0.8 & 0.12 & 0.12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0.16 & 0.16 \\ 0.8 & -0.12 & -0.12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 7.5 \\ 0 \\ 34.375 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -30 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -40 \\ -41.875 \\ 0 \\ 10 \\ 1.875 \\ 34.375 \end{Bmatrix}$$



Gambar 3.22 Contoh 3.1 (Lanjutan).

3.6 ANALISIS STRUKTUR RANGKA BATANG

Sejauh ini, hanya struktur yang terdiri dari elemen rangka (*frame*) yang telah dibahas. Pada bagian ini, perhatian difokuskan pada struktur dengan sambungan sendi yang umum dikenal sebagai struktur rangka batang (*truss*). Persamaan keseimbangan matriks yang diturunkan pada bagian-bagian sebelumnya dapat diterapkan dengan mudah pada struktur rangka batang karena elemen rangka batang pada dasarnya hanyalah bentuk khusus dari elemen rangka (*frame*).

Hal ini dapat dilakukan dengan memodifikasi model balok dengan tumpuan sederhana pada Gambar 3.3 sebagai berikut. Jika tidak ada beban pada elemen $\left(w_x(x) = w_y(x) = 0\right)$, elemen rangka batang diperoleh dengan melepaskan momen ujung pada sistem dasar (Gambar 3.3b). Secara fisik, hal ini setara dengan pemasangan sendi pada setiap ujung elemen. Secara matematis, hal ini berarti bahwa:

$$q_2 = 0 \text{ dan } q_3 = 0 \tag{3.49}$$

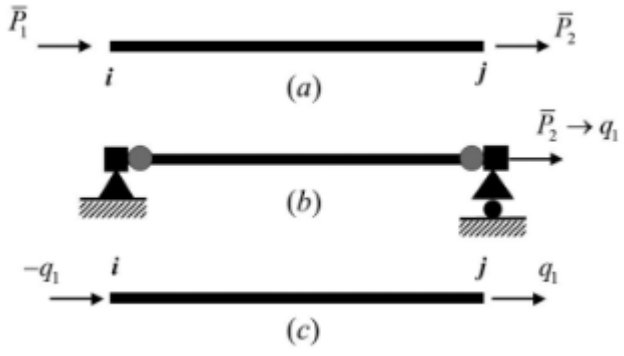
Mensubstitusikan Pers. (3.49) ke dalam (3.10) dan menghilangkan momen ujung dari vektor gaya ujung $\bar{P}$ menghasilkan:

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} q_1 \quad \text{atau} \quad \bar{P} = \overline{b^{truss}} q_1 \tag{3.50}$$

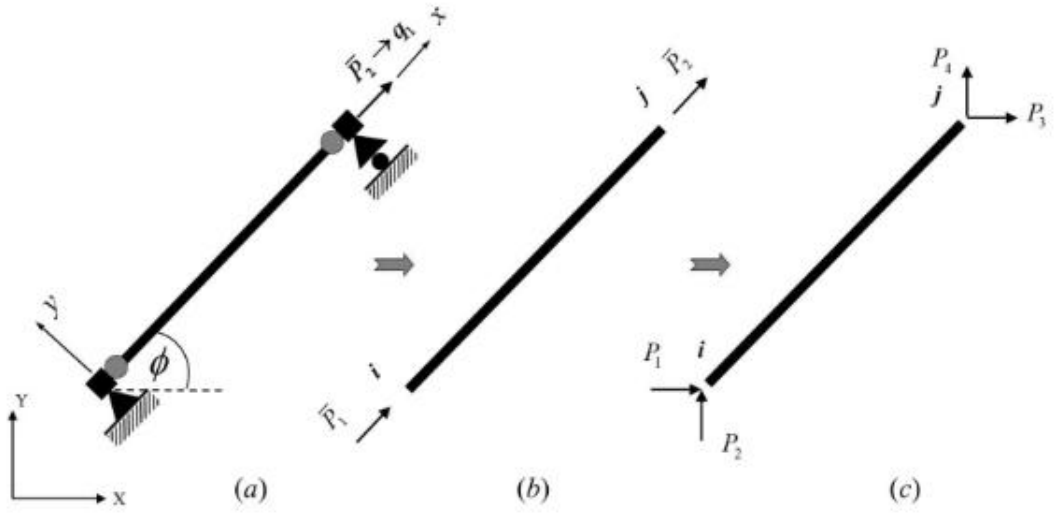
di mana $\overline{b^{truss}}$ adalah matriks kesetimbangan sistem rangka batang dasar dalam sumbu acuan lokal. Representasi skematis dari keseluruhan proses modifikasi tersebut ditunjukkan pada Gambar 3.23.

Persamaan kesetimbangan matriks untuk elemen rangka batang dalam sumbu acuan global dapat diperoleh dengan cara serupa. Substitusi Persamaan (3.49) ke dalam Persamaan (3.29) serta penghilangan momen ujung dari vektor gaya ujung P menghasilkan:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\phi \\ -\sin\phi \\ \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix} q_1 \quad \text{atau} \quad P = b^{truss} q_1 \tag{3.51}$$



Gambar 3.23 Elemen Rangka Batang dalam Sistem Acuan Lokal: (a) Sistem Lengkap, (b) Sistem Dasar, (c) Sistem Dasar dengan Gaya Reaksi.



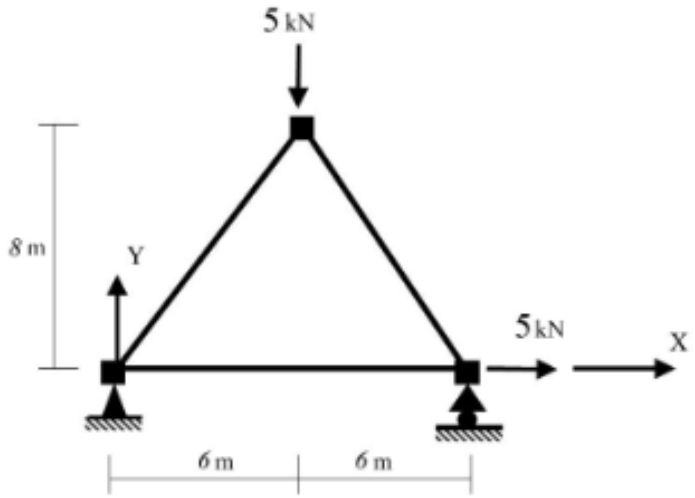
Gambar 3.24 Elemen Rangka Batang dalam Sistem Referensi Global: (a) Sistem Dasar, (b) Sistem Lengkap dalam Sumbu Referensi Lokal, (c) Sistem Lengkap dalam Sumbu Referensi Global.

di mana $\overline{b^{truss}}$ adalah matriks kesetimbangan sistem rangka batang dasar dalam sumbu referensi global. Representasi skematis dari keseluruhan proses modifikasi tersebut ditunjukkan pada Gambar 3.24.

Contoh 3.2

Analisislah rangka batang yang ditunjukkan pada Gambar 3.25 untuk menentukan gaya-gaya dalam dan reaksi tumpuan melalui langkah-langkah berikut:

(a) Berikan penomoran pada derajat kebebasan (baik yang terkekang maupun yang tidak terkekang) dan gaya-gaya elemen dasar (*independen*).
(b) Rumuskan persamaan kesetimbangan pada derajat kebebasan yang tidak terkekang.
(c) Hitung nilai gaya-gaya elemen dasar tersebut.



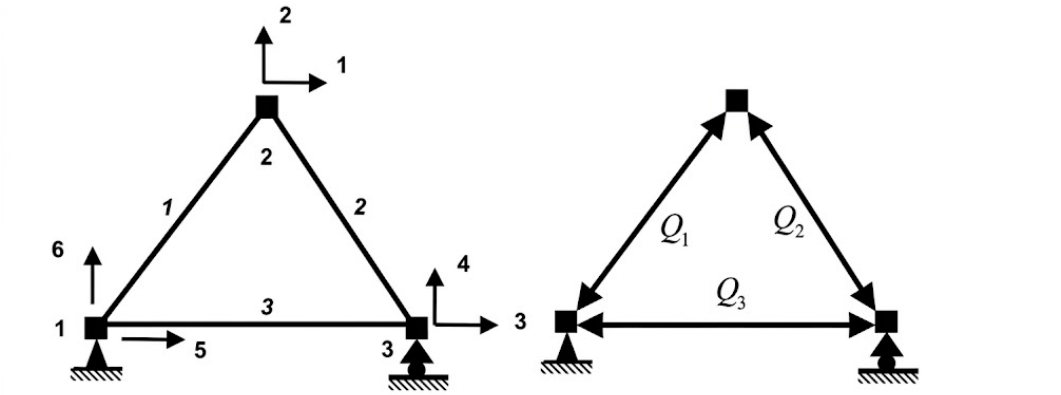
Gambar 3.25 Contoh 3.2.

(d) Gunakan persamaan kesetimbangan yang terkait dengan derajat kebebasan yang terkekang untuk menghitung reaksi tumpuan.

- **Penyelesaian**: Sistem penomoran elemen, titik simpul, dan derajat kebebasan (DOF) ditunjukkan pada Gambar 3.26a: Berdasarkan sistem penomoran DOF tersebut, vektor pemetaan untuk setiap elemen adalah:

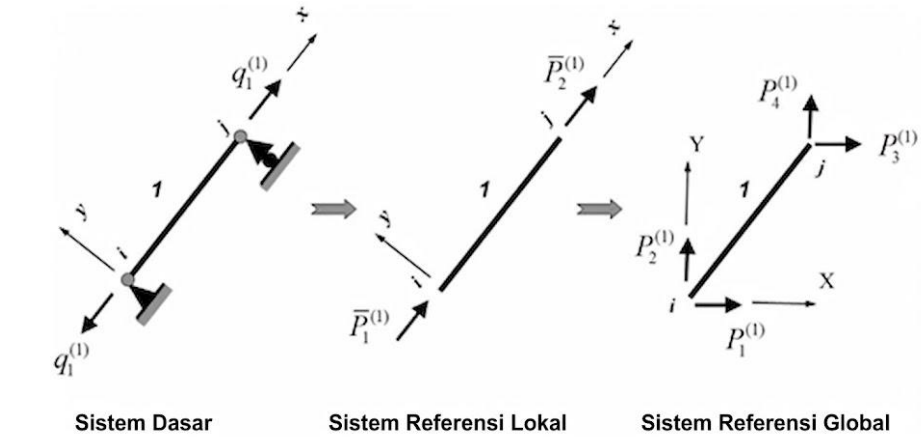
$$LM_1 = \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}_1 \; ; \quad LM_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}_2 \; ; \quad \text{dan} \quad LM_3 = \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}_3$$

Sistem penomoran gaya batang dasar (*independen*) ditunjukkan pada Gambar 3.26b.



(*a*) Sistem penomoran Elemen, Simpul, dan DOF (*b*) Sistem penomoran gaya elemen Dasar (Independen)

Gambar 3.26 Contoh 3.2 (Lanjutan).



Gambar 3.27 Contoh 3.2 (Lanjutan).

Berdasarkan persamaan kesetimbangan matriks untuk elemen rangka batang, dengan meninjau sistem gaya pada setiap elemen:

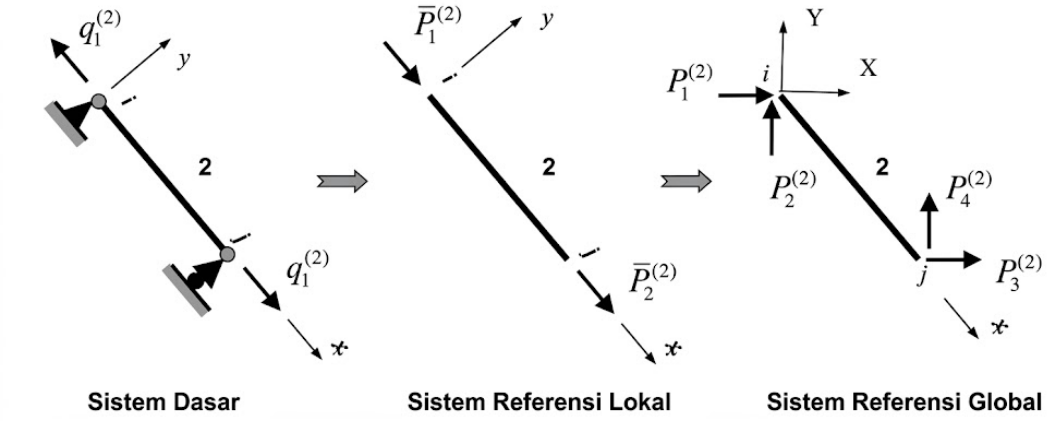
Elemen 1 (Gambar 3.27):
Dari Sistem Dasar ke Sistem Referensi Lokal

$$\begin{Bmatrix}\overline{P_1^{(1)}}\\ \overline{P_2^{(1)}}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} q_1^{(1)} \rightarrow Q_1 = q_1^{(1)} \rightarrow \begin{Bmatrix}\overline{P_1^{(1)}}\\ \overline{P_2^{(1)}}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} Q_1$$

Dari Sistem Referensi Lokal ke Sistem Referensi Global

$$\begin{Bmatrix}P_1^{(1)}\\ P_2^{(1)}\\ P_3^{(1)}\\ P_4^{(1)}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.6\\ -0.8\\ 0.6\\ 0.8\end{bmatrix} Q_1$$

Elemen 2 (Gambar 3.28):
Dari Sistem Dasar ke Sistem Referensi Lokal



Gambar 3.28 Contoh 3.2 (Lanjutan).

$$\begin{Bmatrix}\overline{P_1^{(2)}}\\ \overline{P_2^{(2)}}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} q_1^{(2)} \rightarrow Q_2 = q_1^{(2)} \rightarrow \begin{Bmatrix}\overline{P_1^{(2)}}\\ \overline{P_2^{(2)}}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} Q_2$$

Dari Sistem Referensi Lokal ke Sistem Referensi Global

$$\begin{Bmatrix}P_1^{(2)}\\ P_2^{(2)}\\ P_3^{(2)}\\ P_4^{(2)}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.6\\ 0.8\\ 0.6\\ -0.8\end{bmatrix} Q_2$$

Elemen 3 (Gambar 3.29):
Dari Sistem Dasar ke Sistem Referensi Lokal

$$\begin{Bmatrix}\overline{P_1^{(3)}}\\ \overline{P_2^{(3)}}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} q_1^{(3)} \rightarrow Q_3 = q_1^{(3)} \rightarrow \begin{Bmatrix}\overline{P_1^{(3)}}\\ \overline{P_2^{(3)}}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} Q_3$$

Dari Sistem Referensi Lokal ke Sistem Referensi Global

$$\begin{Bmatrix}P_1^{(3)}\\ P_2^{(3)}\\ P_3^{(3)}\\ P_4^{(3)}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} Q_3$$

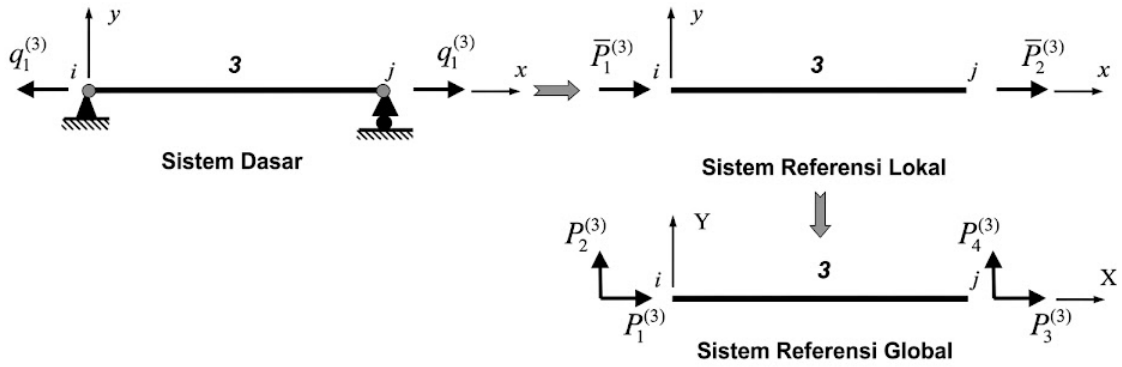
Tinjau kondisi kesetimbangan pada semua titik simpul sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 3.30:

Titik simpul 1:

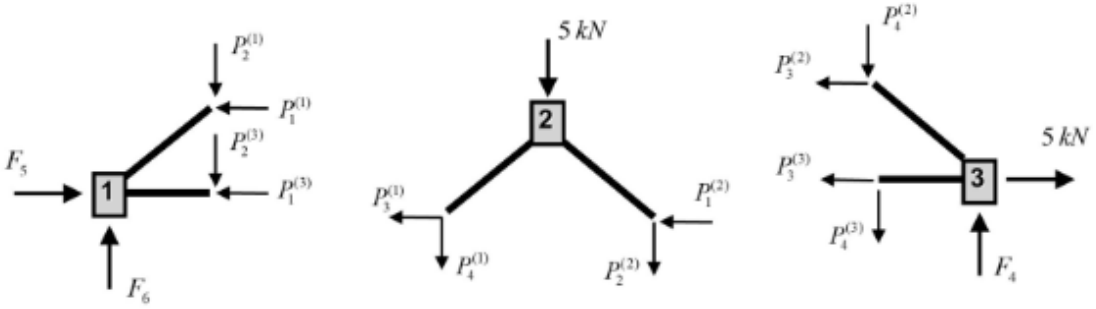
$$\sum F_X = 0; \quad F_5 - P_1^{(1)} - P_1^{(3)} = 0 \rightarrow F_5 = -0.6Q_1 - Q_3$$
$$\sum F_Y = 0; \quad F_6 - P_2^{(1)} - P_2^{(3)} = 0 \rightarrow F_6 = -0.8Q_1$$

Simpul 2:

$$\sum F_X = 0; \quad -P_3^{(1)} - P_1^{(2)} = 0 \rightarrow 0 = 0.6Q_1 - 0.6Q_2$$
$$\sum F_Y = 0; \quad -5 - P_4^{(1)} - P_2^{(2)} = 0 \rightarrow -5 = 0.8Q_1 + 0.8Q_2$$



Gambar 3.29 Contoh 3.2 (Lanjutan).



Gambar 3.30 Contoh 3.2 (Lanjutan).

Node 3:

$$\sum F_X = 0; \quad 5 - P_3^{(2)} - P_3^{(3)} = 0 \rightarrow 5 = 0.6Q_2 + Q_3$$

$$\sum F_Y = 0; \quad F_4 - P_4^{(2)} - P_4^{(3)} = 0 \rightarrow F_4 = -0.8Q_2$$

Secara keseluruhan, semua persamaan kesetimbangan nodal dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.6 & 0 \\ 0.8 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.6 & 1 \\ 0 & -0.8 & 0 \\ -0.6 & 0 & -1 \\ -0.8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

atau dalam bentuk ringkas sebagai:

$$F = BQ \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} F_{free} \\ F_{constr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{free} \\ B_{constr} \end{bmatrix} Q$$

Secara terpisah, persamaan kesetimbangan pada derajat kebebasan bebas dan terkendala dinyatakan sebagai berikut:

$$F_{free} = B_{free}Q \quad \text{dan} \quad F_{constr} = B_{constr}Q$$

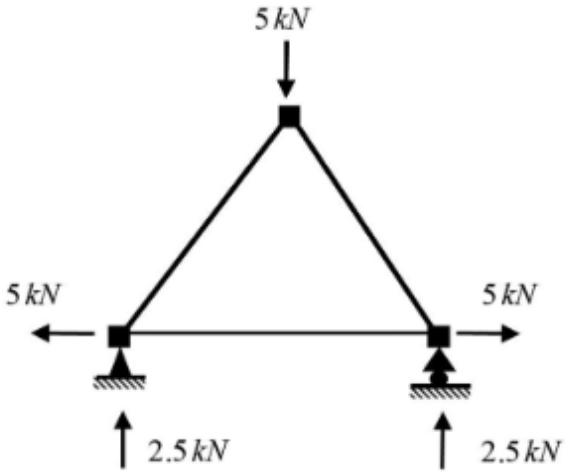
Dalam persamaan kesetimbangan matriks ini, terdapat 6 gaya yang tidak diketahui; yaitu 3 gaya batang dasar Q dan 3 gaya yang bekerja pada derajat kebebasan yang terkekang (gaya reaksi) F_{constr}, serta tersedia 6 persamaan kesetimbangan. Oleh karena itu, rangka batang ini bersifat statis tertentu dan derajat ketidaktentuan statisnya adalah 6–6 = 0.

Persamaan kesetimbangan yang terkait dengan derajat kebebasan bebas (tidak terkekang) adalah:

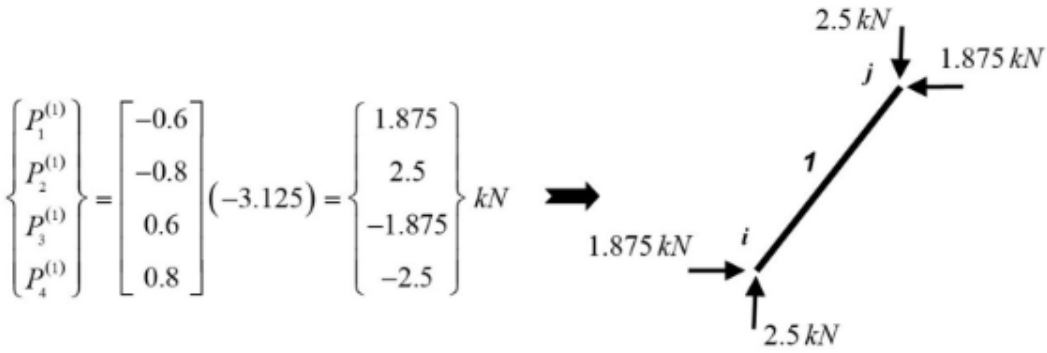
$$F_{free} = B_{free}Q \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.6 & 0 \\ 0.8 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.6 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

Dalam bentuk matriks tereduksi dari persamaan kesetimbangan ini, terdapat 3 persamaan kesetimbangan dan 3 variabel gaya batang dasar yang tidak diketahui. Oleh karena itu, derajat ketidaktentuan statisnya adalah 3 – 3 = 0. Dengan demikian, penyelesaian persamaan matriks tereduksi ini menghasilkan gaya-gaya batang dasar sebagai berikut:

$$Q_1 = -3.125 \text{ kN}; \quad Q_2 = -3.125 \text{ kN}; \quad \text{dan} \quad Q_3 = 6.875 \text{ kN}$$



Gambar 3.31 Contoh 3.2 (Lanjutan).



Gambar 3.32 Contoh 3.2 (Lanjutan).

Berdasarkan konvensi tanda, nilai positif gaya batang dasar menunjukkan tarik (*tension*), sedangkan nilai negatif menunjukkan tekan (*compression*).

Dengan menyubstitusikan gaya-gaya batang dasar ini ke dalam persamaan kesetimbangan yang terkait dengan derajat kebebasan yang terkekang, reaksi tumpuan ditentukan sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 3.31:

$$F_{constr} = B_{constr} Q \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & 0 \\ -0.6 & 0 & -1 \\ -0.8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3.125 \\ -3.125 \\ 6.875 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.5 \\ -5 \\ 2.5 \end{Bmatrix} \text{ kN}$$

Gaya-gaya pada ujung elemen dapat diperoleh dengan menyubstitusikan gaya-gaya dasar yang relevan ke dalam persamaan elemen. Sebagai contoh, elemen 1 (Gambar 3.32):

3.7 PENYUSUNAN OTOMATIS PERSAMAAN KESEIMBANGAN

Pada bagian-bagian sebelumnya, persamaan keseimbangan matriks suatu struktur telah disusun dengan cara berikut: pertama, gaya ujung lokal $\bar{P}$ dari setiap elemen dinyatakan dalam bentuk gaya elemen dasar (*independen*) q; kemudian, gaya ujung elemen lokal $\bar{P}$ ditransformasikan menjadi gaya ujung elemen global P menggunakan matriks rotasi; dan akhirnya, persamaan keseimbangan pada semua derajat kebebasan ditinjau secara kolektif. Proses penyusunan persamaan keseimbangan tersebut bisa menjadi sangat melelahkan untuk sistem struktur yang besar.

Pada bagian ini, disajikan pendekatan sistematis untuk menyusun persamaan keseimbangan struktur. Pendekatan ini secara alami dapat dikembangkan menjadi penyusunan persamaan keseimbangan yang berorientasi pada komputer. Untuk mendemonstrasikan pendekatan penyusunan otomatis ini, struktur rangka pada Contoh 3.1 ditinjau kembali. Ditinjau dari sudut pandang setiap elemen, setiap gaya ujung pada derajat kebebasan elemen hanya berkaitan dengan satu derajat kebebasan struktur. Korespondensi satu-ke-satu ini direpresentasikan oleh vektor pemetaan sebagaimana dibahas dalam Bab 1. Perlu ditegaskan kembali bahwa vektor pemetaan untuk elemen 1, 2, dan 3 adalah:

$$\begin{Bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}_{structure} \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}_{member\ 1} \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}_{structure} \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}_{member\ 2} \quad \begin{Bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}_{structure} \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}_{member\ 3} \tag{3.52}$$

Persamaan kesetimbangan global pada semua derajat kebebasan dapat dituliskan dalam bentuk gaya-gaya ujung batang sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \\ 0 \\ -30 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_3^{(1)} \\ P_4^{(1)} \\ P_5^{(1)} \\ P_6^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} \\ P_3^{(2)} \\ P_4^{(2)} \\ P_5^{(2)} \\ P_6^{(2)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^{(3)} \\ P_2^{(3)} \\ P_3^{(3)} \\ P_4^{(3)} \\ P_5^{(3)} \\ P_6^{(3)} \end{Bmatrix} \tag{3.53}$$

atau dalam bentuk ringkas sebagai:

$$F - F^0 = H^{(1)}P^{(1)} + H^{(2)}P^{(2)} + H^{(3)}P^{(3)} \tag{3.54}$$

Dalam persamaan kesetimbangan global (3.54), matriks H yang mengalikan gaya-gaya ujung elemen dari arah kiri disebut sebagai "matriks pemetaan" dan hanya memuat angka 1 dan 0. Perlu dicatat bahwa matriks yang hanya memuat angka 1 dan 0 dikenal sebagai "matriks Boolean". Vektor pemetaan dapat digunakan untuk menyusun matriks pemetaan bagi setiap elemen.

Sebagai contoh, angka 1 pada matriks pemetaan untuk elemen 1 terletak pada posisi-posisi berikut:

$$(1,4), (2,5), (3,6), (7,1), (8,2), \text{dan } (9,3)$$

Terlihat bahwa indeks baris sesuai dengan derajat kebebasan struktural, sedangkan indeks kolom sesuai dengan derajat kebebasan anggota. Hal ini menjadi jelas ketika kita mengamati korespondensi antara derajat kebebasan struktural dan anggota pada Persamaan (3.52). Langkah selanjutnya adalah menyatakan gaya ujung anggota dalam bentuk gaya anggota dasar melalui Persamaan (3.30) dan mensubstitusikannya ke dalam Persamaan (3.54).

Pada Persamaan (3.53), persamaan kesetimbangan tampaknya melibatkan perkalian awal vektor gaya ujung anggota dengan matriks pemetaan anggota. Namun, pada kenyataannya, proses operasional ini tidak diperlukan karena dapat dicapai dengan pengindeksan langsung. Sebagai contoh, persamaan pertama pada Persamaan (3.53) melibatkan gaya ujung $P_4^{(1)}$ anggota 1. Seperti yang diingat dari Contoh 3.1,

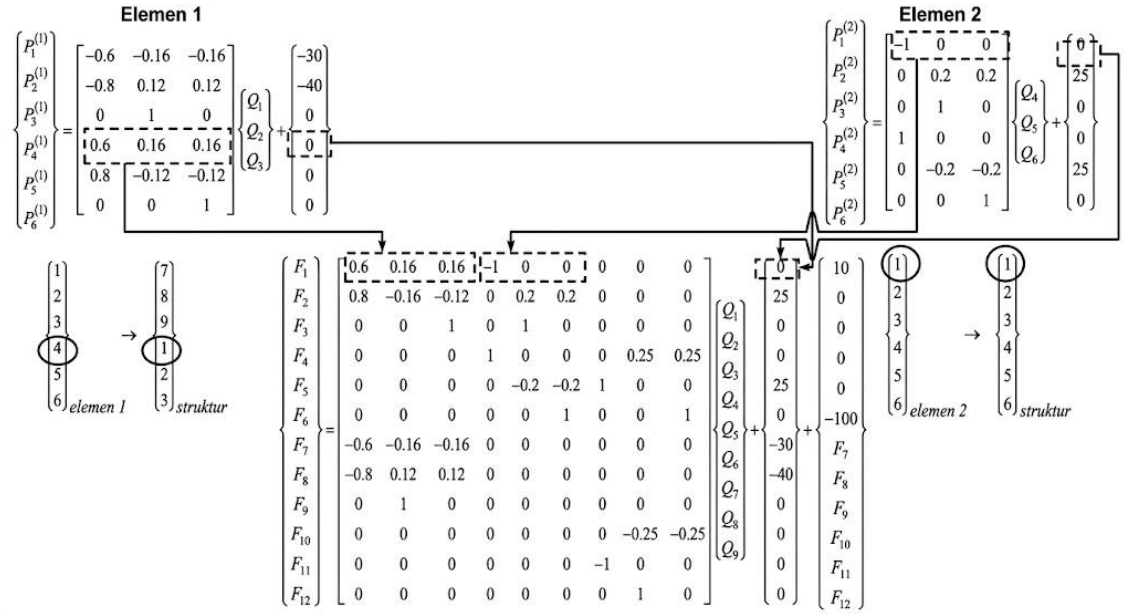
$$P_4^{(1)} = b_{41}^{(1)}Q_1 + b_{42}^{(1)}Q_2 + b_{43}^{(1)}Q_3 = 0.6Q_1 + 0.16Q_2 + 0.16Q_3 \tag{3.55}$$

Bayangkan, setelah melakukan perkalian antara matriks pemetaan dan gaya ujung elemen yang dinyatakan dalam bentuk gaya elemen dasar, koefisien-koefisien Q_1, Q_2, dan Q_3 masing-masing akan mengisi baris pertama serta kolom 1, 2, dan 3 dari matriks kesetimbangan B. Secara umum, baris ke-i dari matriks b untuk elemen 1 akan mengisi baris pada matriks kesetimbangan B yang bersesuaian dengan derajat kebebasan struktur yang terletak pada baris ke-i vektor pemetaan elemen 1. Tiga kolom pertama matriks kesetimbangan B masing-masing berkaitan dengan Q_1, Q_2, dan Q_3. Untuk elemen 2, skenarionya sama dalam hal penentuan nomor barisnya. Kolom-kolom matriks kesetimbangan b untuk elemen 2 bersesuaian dengan gaya dasar Q_4, Q_5, dan Q_6.

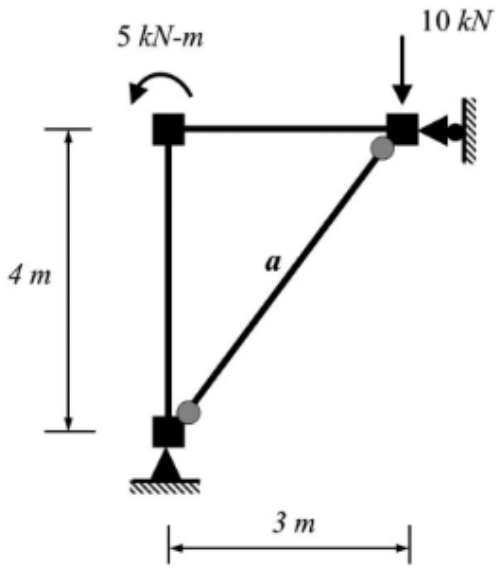
Oleh karena itu, kolom-kolom tersebut masing-masing mengisi kolom 4, 5, dan 6 dari matriks kesetimbangan B. Representasi skematis mengenai pembentukan baris pertama matriks kesetimbangan B ditunjukkan pada Gambar 3.33. Proses yang sama diterapkan untuk semua derajat kebebasan lainnya.

Contoh 3.3

Untuk rangka dengan pengaku (*braced frame*) yang ditunjukkan pada Gambar 3.34, tugas-tugas berikut diberikan:



Gambar 3.33 Demonstrasi perakitan otomatis matriks kesetimbangan struktural: Baris pertama.



Gambar 3.34 Contoh 3.3.

(a) Berikan penomoran pada derajat kebebasan (baik yang terkekang maupun yang tidak terkekang) dan gaya batang dasar (*independen*) berdasarkan model balok dengan tumpuan sederhana (*simply supported beam*).

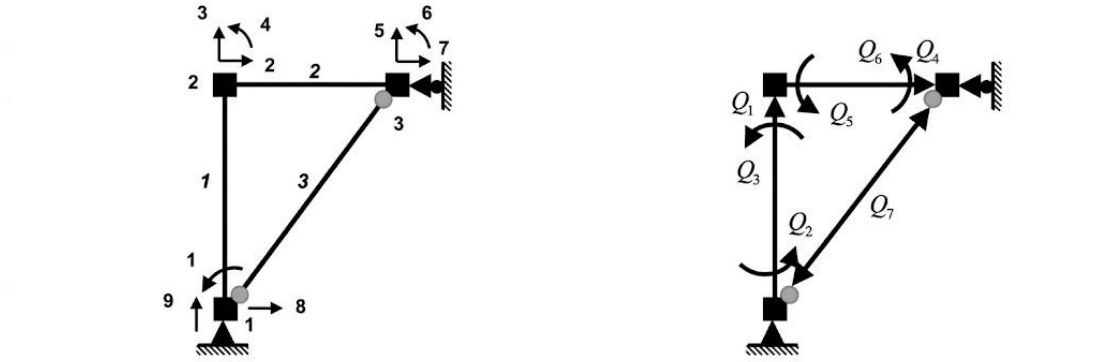
(b) Rumuskan persamaan kesetimbangan pada derajat kebebasan yang tidak terkekang.

Jumlah persamaan yang diperoleh akan satu lebih sedikit dibandingkan jumlah gaya tak-diketahui dasar. Dengan demikian, struktur tersebut bersifat statis tak-tentu.

(c) Diketahui gaya aksial pada batang pengaku (*bracing*) a sebesar $-6{,}8\ kN$. Gunakan gaya dasar yang diketahui ini untuk menyelesaikan gaya-gaya tak-diketahui lainnya serta reaksi tumpuan.

Properti batang adalah: $IE = 20 \times 10^3\ kN \cdot m^2$ dan $AE = 50 \times 10^3\ kN$ untuk batang 1 dan 2, serta $AE = 10 \times 10^3\ kN$ untuk batang pengaku a.

- **Penyelesaian**: Sistem penomoran batang, titik simpul, dan derajat kebebasan (DOF) ditunjukkan pada Gambar 3.35a:
  Sistem penomoran gaya batang dasar (*independen*) berdasarkan model balok dengan tumpuan sederhana ditunjukkan pada Gambar 3.35b:
  Vektor pemetaan dan persamaan kesetimbangan matriks untuk setiap batang adalah:



(a) Sistem penomoran Elemen, Simpul, dan DOF *(b)* Sistem penomoran gaya elemen Dasar (Independen)

Gambar 3.35 Contoh 3.3 (Lanjutan).

$$LM_1 = \begin{Bmatrix} 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}_1 ; \quad \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_3^{(1)} \\ P_4^{(1)} \\ P_5^{(1)} \\ P_6^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.25 & -0.25 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.25 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix};$$

$$LM_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}_2 ; \quad \begin{Bmatrix} P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} \\ P_3^{(2)} \\ P_4^{(2)} \\ P_5^{(2)} \\ P_6^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0.333 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & -0.333 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix}; \quad \text{dan} \quad LM_3 = \begin{Bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 5 \end{Bmatrix}_3 ; \quad \begin{Bmatrix} P_1^{(3)} \\ P_2^{(3)} \\ P_3^{(3)} \\ P_4^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ -0.8 \\ 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix} Q_7.$$

Demonstrasi perakitan otomatis matriks kesetimbangan struktural disajikan pada Gambar 3.36:

Bentuk ringkas persamaan kesetimbangan matriks untuk rangka berpenguat adalah:

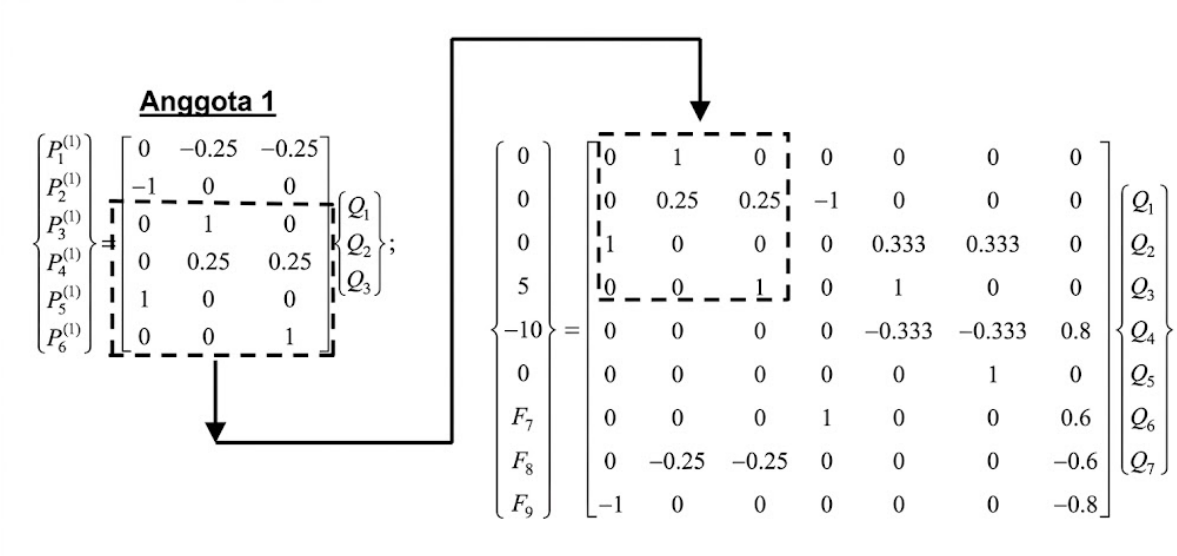
$$F = BQ \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} F_{free} \\ F_{constr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{free} \\ B_{constr} \end{bmatrix} Q$$

Secara terpisah, persamaan kesetimbangan pada derajat kebebasan bebas dan terkendala dinyatakan sebagai berikut:

$$F_{free} = B_{free}Q \quad \text{dan} \quad F_{constr} = B_{constr}Q$$

Dalam persamaan kesetimbangan matriks ini, terdapat 10 gaya yang tidak diketahui, yaitu tujuh gaya batang dasar Q dan tiga gaya yang bekerja pada derajat kebebasan yang terkekang (gaya reaksi), F_{constr}, serta tersedia sembilan persamaan kesetimbangan. Oleh karena itu, struktur ini bersifat statis tak tentu, dan derajat ketidaktentuan statisnya adalah 10–9 = 1.

Persamaan kesetimbangan yang terkait dengan derajat kebebasan bebas (tidak terkekang) adalah:



Gambar 3.36 Contoh 3.3 (Lanjutan).

$$F_{free} = B_{free}Q \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -10 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.25 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.333 & -0.333 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{Bmatrix}$$

Dalam bentuk matriks tereduksi dari persamaan kesetimbangan ini, terdapat enam persamaan kesetimbangan dan tujuh variabel gaya batang dasar yang tidak diketahui. Oleh karena itu,

derajat ketidaktentuan statis adalah 7 – 6 = 1. Jika satu gaya batang dasar, yaitu Q_7, diketahui, sistem ini menjadi statis tertentu.

Selanjutnya, matriks kesetimbangan B_{free} dapat dibagi menjadi dua sub-matriks, yaitu B^1_{free} dan B^2_{free}, yang masing-masing berkaitan dengan gaya dasar yang tidak diketahui dan yang diketahui.

$$B_{free} = \left[B^1_{free} \mid B^2_{free}\right]$$

Dimana

$$B^1_{free} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.25 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0.333 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.333 & -0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B^2_{free} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang serupa, vektor gaya dasar Q dapat dipisahkan sebagai berikut:

$$Q = \lfloor Q^1 \quad Q^2 \rfloor^T$$

Dimana

$$Q^1 = \lfloor Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \rfloor^T \Rightarrow unknowns \quad \text{and} \quad Q^2 = \lfloor Q_7 \rfloor^T \Rightarrow known$$

Persamaan kesetimbangan matriks untuk derajat kebebasan bebas dapat ditulis ulang sebagai berikut:

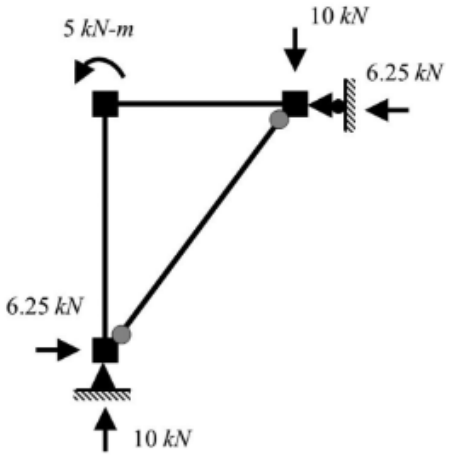
$$F_{free} = \left[B^1_{free} \mid B^2_{free}\right] \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{Bmatrix} = B^1_{free} Q^1 + B^2_{free} Q^2 \Rightarrow F_{free} - B^2_{free} Q^2 = B^1_{free} Q^1$$

Gaya dasar yang diketahui dinyatakan sebagai:

$$Q_7 = -6.8 \text{ kN} \quad \text{atau} \quad Q^2 = \lfloor -6.8 \rfloor^T$$

Terlihat bahwa peran suku $B^2_{free}\, Q^2$ serupa dengan peran beban anggota pada Contoh 3.1. Sekarang, gaya-gaya tak-diketahui dasar dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Q^1 &= \left[B^1_{free}\right]^{-1} \left(F_{free} - B^2_{free} Q^2\right) \\ &= \lfloor -4.56 \quad 0 \quad -8.69 \quad -2.17 \quad 13.69 \quad 0 \rfloor^T \end{aligned}$$



Gambar 3.37 Contoh 3.3 (Lanjutan).

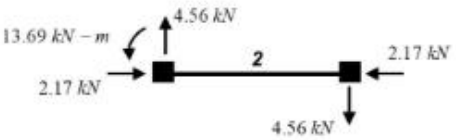
Dengan menyubstitusikan gaya-gaya batang dasar ini ke dalam persamaan kesetimbangan yang terkait dengan derajat kebebasan yang terkekang, reaksi tumpuan (Gambar 3.37) dihitung sebagai berikut:

$$F_{constr} = B_{constr} Q \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & -0.25 & -0.25 & 0 & 0 & 0 & -0.6 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -4.56 \\ 0 \\ -8.69 \\ -2.17 \\ 13.69 \\ 0 \\ -6.8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.25 \\ 6.25 \\ 10 \end{Bmatrix} \text{ kN}$$

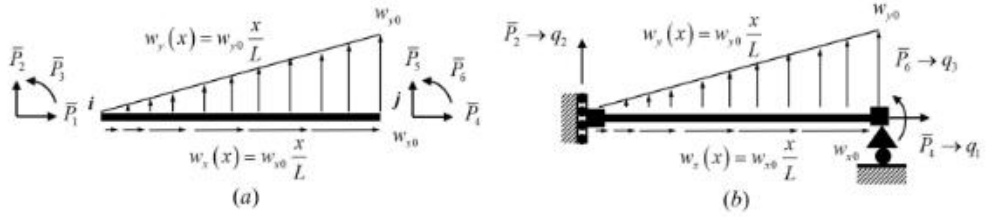
Gaya-gaya ujung elemen dapat diperoleh dengan menyubstitusikan gaya-gaya dasarnya ke dalam persamaan elemen.

Sebagai contoh, elemen 2 (Gambar 3.38):

$$\begin{Bmatrix} P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} \\ P_3^{(2)} \\ P_4^{(2)} \\ P_5^{(2)} \\ P_6^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0.333 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & -0.333 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2.17\ kN \\ 13.69\ kN\text{-}m \\ 0\ kN\text{-}m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.17\ kN \\ 4.56\ kN \\ 13.69\ kN\text{-}m \\ -2.17\ kN \\ -4.56\ kN \\ 0\ kN\text{-}m \end{Bmatrix}$$



Gambar 3.38 Contoh 3.3 (Lanjutan).



Gambar 3.39 Soal 3.1.

BAB 4
KOMPATIBILITAS GEOMETRIS

4.1 KONSEP KOMPATIBILITAS DALAM ANALISIS STRUKTUR

Sebagaimana telah dijelaskan pada Bab 1, kompatibilitas merupakan salah satu dari tiga unsur fundamental yang harus dipenuhi dalam setiap pendekatan analisis struktur. Kompatibilitas berkaitan dengan keteraturan dan kesinambungan deformasi yang terjadi pada suatu struktur ketika struktur tersebut menerima beban. Prinsip ini memastikan bahwa perpindahan, rotasi, dan deformasi pada setiap bagian struktur berlangsung secara selaras, tidak saling bertentangan, serta tetap memenuhi batasan yang ditetapkan oleh hubungan antar-elemen dan kondisi tumpuan.

Dalam bab ini, pembahasan difokuskan pada berbagai sudut pandang yang berkaitan dengan penerapan kompatibilitas kinematis dalam analisis struktur. Istilah kinematis mengacu pada hubungan antara perpindahan, deformasi, dan regangan tanpa secara langsung mempertimbangkan gaya penyebabnya. Dengan demikian, analisis kompatibilitas berupaya menjawab pertanyaan mengenai bagaimana setiap elemen struktur bergerak dan berubah bentuk, serta bagaimana perubahan tersebut harus saling berhubungan agar struktur tetap menjadi suatu sistem yang utuh.

Secara umum, kondisi kompatibilitas dapat dideskripsikan melalui beberapa bentuk. Salah satunya adalah bentuk regangan, yaitu ukuran perubahan bentuk atau perubahan dimensi yang terjadi pada suatu material atau bagian struktur akibat perpindahan titik-titik material. Pendekatan ini banyak digunakan dalam kajian Mekanika Kontinum karena analisis dilakukan pada tingkat diferensial dan melibatkan hubungan matematis antara medan perpindahan dengan komponen regangan. Pada tingkat ini, kompatibilitas mengharuskan distribusi regangan berlangsung secara kontinu dan tidak menghasilkan celah, tumpang tindih, atau diskontinuitas yang tidak sesuai dengan kondisi fisik material.

Bentuk lainnya adalah deformasi atau resultan regangan. Dalam pendekatan ini, perubahan bentuk yang terjadi pada elemen struktur direpresentasikan melalui besaran-besaran deformasi tertentu, seperti perubahan panjang, perpindahan, atau rotasi. Konsep tersebut telah dibahas pada Bab 2 dan umumnya dijumpai dalam mata kuliah dasar Mekanika Bahan serta Analisis Struktur. Pendekatan deformasi memberikan cara yang lebih praktis untuk menganalisis perilaku elemen struktur, terutama pada struktur rangka yang terdiri atas elemen-elemen batang yang dihubungkan melalui titik-titik simpul.

Pada struktur rangka batang, kompatibilitas berperan dalam memastikan bahwa perpindahan setiap simpul dan perubahan panjang setiap batang memiliki hubungan yang konsisten. Sebagai contoh, apabila dua batang terhubung pada satu simpul, perpindahan simpul tersebut harus sama bagi kedua batang pada titik sambung yang bersangkutan. Kedua batang tidak boleh mengalami perpindahan yang berbeda pada simpul yang sama karena kondisi tersebut akan menyebabkan terjadinya celah, penetrasi, atau pemisahan hubungan antar-elemen. Dengan demikian, hubungan antara perpindahan simpul dan deformasi batang

harus ditentukan berdasarkan geometri struktur, arah sumbu batang, serta jenis sambungan yang digunakan.

Hubungan kompatibilitas harus dipenuhi pada seluruh tingkatan benda bebas yang digunakan dalam analisis. Penerapannya mencakup segmen diferensial, elemen struktur atau batang, bagian tertentu dari struktur, hingga struktur secara keseluruhan. Pada tingkat segmen diferensial, kompatibilitas berkaitan dengan kesinambungan medan perpindahan dan regangan pada bagian-bagian material yang berdekatan. Pada tingkat elemen batang, kompatibilitas menghubungkan perpindahan atau rotasi pada ujung-ujung elemen dengan deformasi yang dialami oleh elemen tersebut.

Pada tingkat bagian struktur, kompatibilitas memastikan bahwa elemen-elemen yang saling terhubung memiliki perpindahan dan rotasi yang sesuai dengan karakteristik sambungannya. Sebagai contoh, pada sambungan kaku, perpindahan dan rotasi antar-elemen harus memenuhi hubungan yang lebih ketat dibandingkan dengan sambungan sendi. Sementara itu, pada tingkat struktur secara keseluruhan, kompatibilitas harus menjamin bahwa seluruh perpindahan dan deformasi yang terjadi tetap memenuhi kondisi tumpuan serta tidak menyebabkan struktur kehilangan keterhubungan geometrisnya.

Kondisi tumpuan merupakan salah satu faktor penting dalam penerapan kompatibilitas. Tumpuan membatasi perpindahan atau rotasi tertentu pada titik-titik struktur. Sebagai contoh, tumpuan jepit dapat membatasi perpindahan horizontal, perpindahan vertikal, dan rotasi, sedangkan tumpuan sendi umumnya membatasi perpindahan tetapi masih memungkinkan terjadinya rotasi. Oleh karena itu, setiap analisis struktur harus terlebih dahulu mengidentifikasi derajat kebebasan yang tersedia dan derajat kebebasan yang dibatasi oleh tumpuan. Ketidaksesuaian antara kondisi perpindahan dengan batasan tumpuan akan menghasilkan kondisi yang tidak kompatibel secara kinematis.

Secara matematis, kompatibilitas sering kali dinyatakan melalui hubungan antara perpindahan dan deformasi. Untuk elemen batang yang mengalami deformasi aksial, perubahan panjang elemen dapat dikaitkan dengan perpindahan relatif antara kedua ujungnya. Secara sederhana, hubungan tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$\Delta = u_2 - u_1$$

Dengan Δ menyatakan perubahan panjang batang dan u_1 serta u_2 menyatakan perpindahan kedua ujung batang sepanjang sumbu elemen. Untuk elemen yang memiliki orientasi tertentu dalam bidang atau ruang, hubungan tersebut harus disesuaikan dengan komponen perpindahan pada arah sumbu batang. Dengan demikian, perubahan panjang tidak hanya dipengaruhi oleh besar perpindahan, tetapi juga oleh arah elemen terhadap sistem koordinat yang digunakan.

Dalam analisis struktur, kompatibilitas tidak dapat dipisahkan dari kesetimbangan dan hubungan konstitutif material. Kesetimbangan menjelaskan hubungan antara beban eksternal, reaksi tumpuan, dan gaya internal. Kompatibilitas menjelaskan hubungan antara perpindahan, deformasi, dan regangan. Sementara itu, hubungan konstitutif menjelaskan keterkaitan antara

tegangan dan regangan berdasarkan sifat material. Ketiga unsur tersebut harus dipenuhi secara bersamaan agar diperoleh gambaran perilaku struktur yang lengkap dan konsisten.

Sebagai ilustrasi, suatu batang yang menerima gaya tarik akan mengalami pertambahan panjang. Besarnya pertambahan panjang tersebut harus sesuai dengan perpindahan relatif pada kedua ujung batang. Jika batang tersebut merupakan bagian dari struktur rangka, pertambahan panjangnya juga harus konsisten dengan perpindahan simpul-simpul yang menghubungkannya dengan batang lain. Apabila hubungan tersebut tidak terpenuhi, maka bentuk deformasi yang diasumsikan tidak mungkin terjadi secara fisik pada struktur yang bersangkutan. Dalam buku ini, pembahasan kompatibilitas dibatasi pada elemen rangka, khususnya elemen batang pada struktur rangka batang, beserta keseluruhan strukturnya. Pembahasan akan diarahkan pada pemahaman hubungan antara perpindahan simpul, deformasi aksial batang, kondisi sambungan, dan batasan tumpuan. Melalui pembahasan tersebut, mahasiswa diharapkan mampu memahami bagaimana kompatibilitas digunakan untuk menentukan deformasi elemen dan perpindahan struktur.

Pemahaman terhadap konsep kompatibilitas merupakan dasar penting dalam analisis struktur. Prinsip ini membantu memastikan bahwa hasil analisis tidak hanya memenuhi persamaan kesetimbangan, tetapi juga menggambarkan pola deformasi yang mungkin terjadi secara nyata. Penguasaan konsep kompatibilitas selanjutnya akan mendukung pembelajaran mengenai metode perpindahan, metode kekakuan, analisis struktur tak tentu, serta Metode Elemen Hingga yang digunakan untuk menganalisis struktur dengan geometri, pembebanan, dan perilaku material yang lebih kompleks.

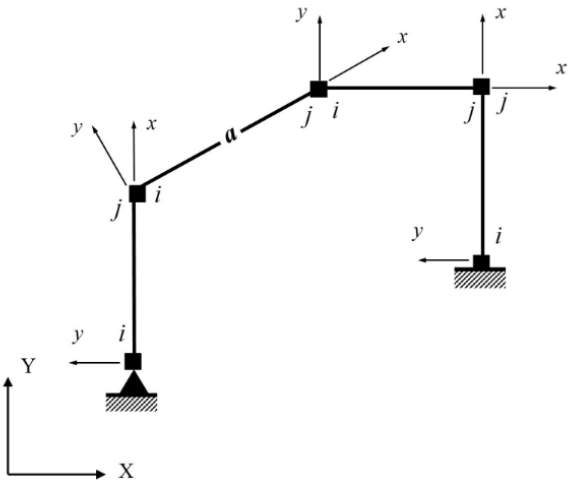
4.2 KOMPATIBILITAS DALAM SISTEM REFERENSI LOKAL: ELEMEN RANGKA

Sebuah struktur rangka dua dimensi beserta sumbu referensi globalnya ($X - Y - Z$) diperlihatkan pada Gambar 4.1. Sumbu Z tegak lurus terhadap bidang struktur dan mengarah ke arah pembaca. Setiap elemen yang terpasang diacu menggunakan sumbu referensi lokalnya sendiri ($x - y - z$). Secara konvensional, simpul i dipilih sebagai titik awal, sedangkan simpul j dipilih sebagai titik akhir. Sumbu x lokal yang positif mengarah dari simpul i menuju simpul j. Untuk struktur bidang, sebaiknya sumbu z lokal dibuat berimpit dengan sumbu Z global yang mengarah ke pembaca. Akibatnya, arah sumbu y lokal menjadi terdefinisi secara unik. Elemen-elemen struktur rangka pada Gambar 4.1 tidak dapat berdeformasi secara independen karena semuanya saling terhubung membentuk kerangka struktur; keseluruhan struktur ini mengalami perpindahan posisi mengikuti konektivitas antar-elemen serta batasan yang diberikan oleh tumpuan. Elemen a pada rangka di Gambar 4.1 diambil sebagai contoh elemen rangka umum. Kinematika elemen umum ini dideskripsikan melalui perpindahan pada ujung-ujungnya dalam sistem referensi lokal (Gambar 4.2). Perpindahan ujung elemen tersebut dikelompokkan ke dalam vektor $\overline{U}$ sebagai berikut:

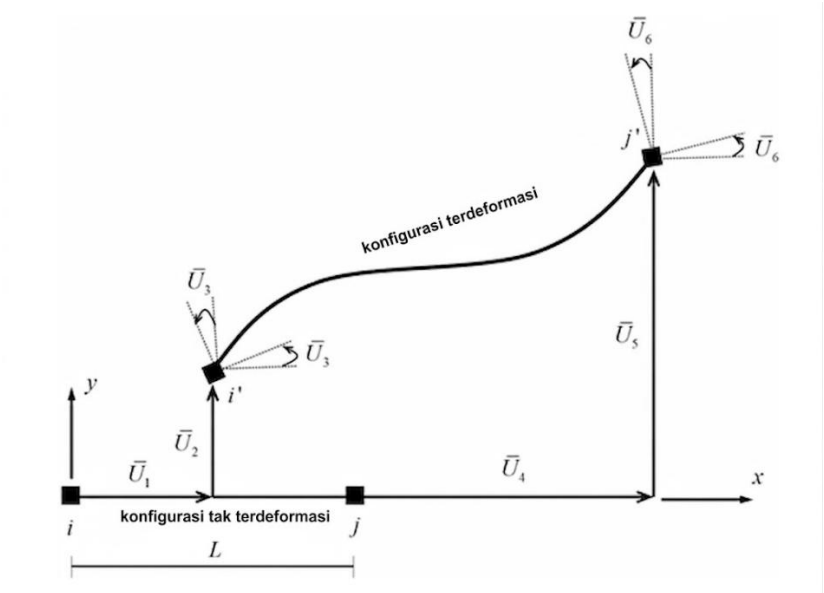
$$\overline{U} = \lfloor \overline{U_1} \quad \overline{U_2} \rfloor^T = \lfloor \overline{U_1} \quad \overline{U_2} \quad \overline{U_3} \quad \overline{U_4} \quad \overline{U_5} \quad \overline{U_6} \rfloor^T \tag{4.1}$$

Komponen-komponen vektor $\overline{U}$ disusun dengan cara berikut: dimulai dari titik simpul i, pertama-tama ditetapkan derajat kebebasan (DOF) pada sumbu-x lokal (komponen pertama), kemudian DOF pada sumbu-y lokal (komponen kedua), lalu DOF terhadap sumbu-z lokal (komponen ketiga), dan seterusnya dilanjutkan dengan cara yang sama hingga titik simpul j pada elemen tersebut. Keenam komponen ini membentuk rangkaian lengkap perpindahan ujung untuk benda bebas elemen dalam sistem acuan lokal.

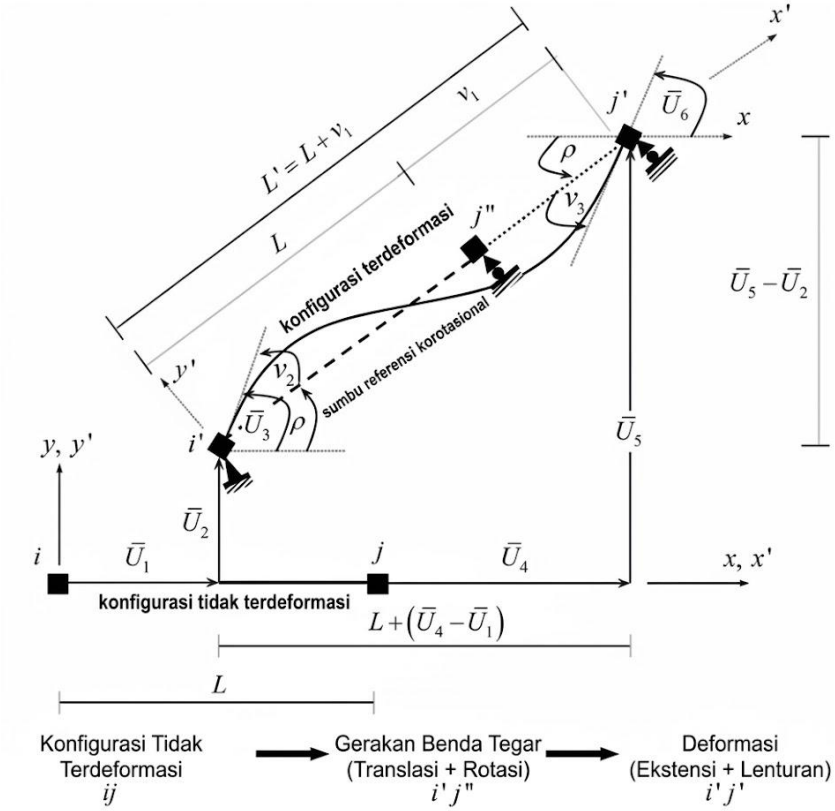
Pada bagian ini, tujuan utamanya adalah menetapkan hubungan kompatibilitas geometris yang mengaitkan perpindahan ujung elemen dengan "deformasi dasar elemen". Deformasi dasar elemen merupakan pasangan kerja konjugat dari gaya-gaya dasar elemen yang telah dibahas dalam Bab 3. Oleh karena itu, sistem balok dengan tumpuan sederhana yang diperlihatkan pada Gambar 4.3 dipilih secara khusus untuk menetapkan hubungan kompatibilitas geometris tersebut.



Gambar 4.1 Struktur Rangka Dua Dimensi: Sumbu Referensi Global dan Lokal.



Gambar 4.2 Perpindahan Ujung Elemen dalam Sistem Referensi Lokal.



Gambar 4.3 Deformasi dan Perpindahan Model Balok dengan Tumpuan Sederhana: Deskripsi Kinematis Eksak.

Dalam sistem dasar ini, sumbu acuan korotasional ($x' - y' - z'$) terikat secara kaku pada penampang melintang di ujung i dalam konfigurasi tanpa deformasi dan di ujung i' dalam konfigurasi terdeformasi. Pada konfigurasi tanpa deformasi, sumbu acuan korotasional ($x' - y' - z'$) berimpit dengan sumbu acuan lokal ($x - y - z$). Jika elemen mengalami perpindahan sebagai benda tegar, sumbu acuan korotasional akan ikut berpindah bersamanya dan tidak ada deformasi elemen yang timbul. Sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 4.3, deformasi dasar elemen didefinisikan sebagai perpindahan relatif terhadap sumbu acuan korotasional. Relatif terhadap sistem acuan ini, elemen tersebut dapat divisualisasikan sebagai balok dengan tumpuan sederhana yang memiliki sendi di ujung i' serta rol di ujung j' dan j''. Sistem tumpuan virtual ini semata-mata membantu pembaca untuk mengabaikan moda benda tegar. Deformasi dasar elemen pada sistem ini didefinisikan sebagai: perpindahan relatif v_1 di ujung j' sepanjang garis penghubung (*chord*) antara ujung i' dan j'; deformasi rotasi v_2 di ujung i' relatif terhadap garis penghubung $i'j'$; dan deformasi rotasi v_3 di ujung j' relatif terhadap garis penghubung $i'j'$. Akibatnya, deformasi dasar elemen ini dikelompokkan dalam bentuk vektor:

$$v = \lfloor v_1 \quad v_2 \quad v_3 \rfloor^T \tag{4.2}$$

dan didefinisikan sebagai:

$$v_1 = L' - L; \quad v_2 = \overline{U_3} - \rho; \quad \text{dan} \quad v_3 = \overline{U_6} - \rho \tag{4.3}$$

di mana L adalah panjang batang dalam konfigurasi awal (sebelum deformasi) dan L' adalah panjang batang pada posisi akhir, yang dapat diperoleh menggunakan teorema Pythagoras sebagai berikut:

$$L' = \sqrt{\left(L + (\overline{U_4} - \overline{U_1})\right)^2 + (\overline{U_5} - \overline{U_2})^2} = \sqrt{(L + \Delta\overline{U_x})^2 + \left(\Delta\overline{U_y}\right)^2} \tag{4.4}$$

L dikeluarkan sebagai faktor dan suku binomial dijabarkan. Hal ini menghasilkan:

$$L' = L\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta\overline{U_x}}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\overline{U_y}}{L}\right)^2} \tag{4.5}$$

$$L' = L\sqrt{1 + 2\frac{\Delta\overline{U_x}}{L} + \left(\frac{\Delta\overline{U_x}}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\overline{U_y}}{L}\right)^2} \tag{4.6}$$

$$L' = L\sqrt{1 + 2\frac{\overline{U_4} - \overline{U_1}}{L} + \left(\frac{\overline{U_4} - \overline{U_1}}{L}\right)^2 + \left(\frac{\overline{U_5} - \overline{U_2}}{L}\right)^2} \tag{4.7}$$

ρ adalah sudut rotasi chord dan didefinisikan sebagai:

$$\rho = arctan\frac{(\overline{U_5} - \overline{U_2})}{L + (\overline{U_4} - \overline{U_1})} = \arctan\left(\frac{\left(\frac{\overline{U_5} - \overline{U_2}}{L}\right)}{1 + \left(\frac{\overline{U_4} - \overline{U_1}}{L}\right)}\right) = arctan\frac{\frac{\Delta\overline{U_y}}{L}}{1 + \frac{\Delta\overline{U_x}}{L}} \tag{4.8}$$

$$\cos\rho = \frac{L + (\overline{U_4} - \overline{U_1})}{L'} = \frac{L + \Delta\overline{U_x}}{L'} \quad \text{dan} \quad \sin\rho = \frac{(\overline{U_5} - \overline{U_2})}{L'} = \frac{\Delta\overline{U_y}}{L'} \tag{4.9}$$

Persamaan (4.3) merepresentasikan hubungan kompatibilitas geometris "eksak" untuk elemen rangka pada Gambar 4.3 dan digunakan oleh Limkatanyu untuk mengembangkan model rangka nonlinier secara geometris yang didasarkan pada penyatuan teori balok Euler-Bernoulli-von Karman dan konsep corotational.

Hubungan-hubungan ini disebut "eksak" karena kinematika gerak benda tegar ditinjau tanpa adanya pendekatan apa pun. Jelas terlihat bahwa hubungan kompatibilitas geometris ini merupakan fungsi nonlinier. Hal ini relevan dengan analisis struktur yang bersifat nonlinier secara geometris. Rincian lebih lanjut mengenai analisis struktur nonlinier secara geometris

disajikan dalam buku-buku teks tingkat lanjut mengenai analisis struktur matriks dan analisis elemen. Dengan asumsi-asumsi berikut:

1. Deformasi aksial v_1 bernilai kecil dibandingkan dengan panjang elemen L.
2. v_1 diasumsikan memiliki besaran yang setara dengan kuadrat dari $\Delta\overline{U_y}/L$.

Hubungan geometris (4.3) yang telah disebutkan sebelumnya dapat didekati sebagai berikut: Pertama, deret pangkat digunakan untuk menguraikan Persamaan (4.6) menjadi:

$$\hat{L} = L\left(1 + \frac{\Delta\overline{U_x}}{L} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\overline{U_x}}{L}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\overline{U_y}}{L}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{2\Delta\overline{U_x}}{L}\right)^2 + istilah\ tingkat\ tinggi\right) \tag{4.10}$$

Perlu dicatat bahwa:

$$\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{8}\alpha^2 + istilah\ tingkat\ tinggi \tag{4.11}$$

Penyederhanaan Persamaan (4.6) dan pengabaian suku-suku orde ketiga dan yang lebih tinggi menghasilkan pendekatan tingkat pertama untuk deformasi aksial sebagai berikut:

$$v_1 = (\overline{U}_4 - \overline{U}_1) + \frac{(\overline{U}_s - \overline{U}_2)^2}{2L} \tag{4.12}$$

Kedua, deret pangkat digunakan untuk menguraikan suku tersebut.
Kedua, deret pangkat digunakan untuk menguraikan suku tersebut dari Persamaan (4.8) sebagai:

$$\left(1 + \frac{\Delta\overline{U}_x}{L}\right)^{-1}$$

$$\left(1 + \frac{\Delta\overline{U}_x}{L}\right)^{-1} = 1 - \frac{\Delta\overline{U}_x}{L} + \left(\frac{\Delta\overline{U}_x}{L}\right)^2 + \text{suku orde lebih tinggi} \tag{4.13}$$

Perlu dicatat bahwa:

$$(1+\alpha)^{-1} = 1 - \alpha + \alpha^2 + \text{suku orde lebih tinggi} \tag{4.14}$$

Mensubstitusikan Persamaan (4.13) ke dalam (4.8) menghasilkan:

$$\rho = \arctan\left[\frac{\Delta\overline{U}_y}{L}\left(1 - \frac{\Delta\overline{U}_x}{L} + \left(\frac{\Delta\overline{U}_x}{L}\right)^2 + \text{suku orde lebih tinggi}\right)\right] \tag{4.15}$$

Persamaan (4.15) dijabarkan menggunakan Deret Taylor sebagai berikut:

$$\rho = \left(\frac{\Delta\overline{U}_y}{L} - \frac{\Delta\overline{U}_x}{L}\frac{\Delta\overline{U}_y}{L} + \left(\frac{\Delta\overline{U}_x}{L}\right)^2\right) + \text{suku orde lebih tinggi} \tag{4.16}$$

Perlu dicatat bahwa (Kreyszig):

$$\arctan\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} + \text{suku orde lebih tinggi} \tag{4.17}$$

Karena suku ΔU_x pada Persamaan (4.16) sebanding dengan v_1 dan bernilai kecil relatif terhadap L, sudut rotasi kord dapat disederhanakan menjadi:

$$\rho = \frac{\Delta\overline{U}_y}{L} = \frac{\overline{U}_5 - \overline{U}_2}{L} \tag{4.18}$$

Mensubstitusikan Persamaan (4.18) ke dalam Persamaan (4.3) menghasilkan hampiran tingkat pertama untuk deformasi rotasi sebagai berikut:

$$v_2 = \overline{U}_3 - \frac{(\overline{U}_5 - \overline{U}_2)}{L} \text{ dan } v_3 = \overline{U}_6 - \frac{(\overline{U}_5 - \overline{U}_2)}{L} \tag{4.19}$$

Diamati bahwa sudut rotasi kord ρ pada Persamaan (4.18) tidak bergantung pada perpindahan ujung batang pada arah x. Oleh karena itu, tersirat bahwa rotasi ujung batang relatif terhadap kord v_2 dan v_3 tidak mempengaruhi perubahan panjang batang. Dengan kata lain, deformasi aksial v_1 tidak dipengaruhi oleh deformasi rotasi ujung batang v_2 dan v_3. Persamaan (4.12) dan (4.19) merupakan hubungan kompatibilitas geometris yang mengikuti pendekatan tingkat pertama. Persamaan tersebut dapat dinyatakan bersama-sama sebagai:

$$v_1 = (\overline{U}_4 - \overline{U}_1) + \frac{(\overline{U}_5 - \overline{U}_2)^2}{2L}; \quad v_2 = \overline{U}_3 - \frac{(\overline{U}_5 - \overline{U}_2)}{L}; \text{ dan } v_3 = \overline{U}_6 - \frac{(\overline{U}_5 - \overline{U}_2)}{L} \tag{4.20}$$

Hubungan kompatibilitas geometris ini relevan dengan analisis struktur orde kedua dengan mempertimbangkan efek $P-\Delta$ mereka. Diamati bahwa hanya hubungan geometris untuk deformasi aksial yang bersifat nonlinier, sedangkan untuk deformasi rotasi bersifat linier. Namun, cakupan buku teks ini terbatas hanya pada struktur linier secara geometris. Hal ini menyiratkan bahwa deformasi dasar batang v (serta regangan resultannya) dinyatakan sebagai kombinasi linier dari perpindahan ujung batang $\overline{U}$. Mengabaikan semua suku nonlinier pada Persamaan (4.20) menghasilkan hubungan kompatibilitas geometris linier dari rangka yang ditunjukkan pada Gambar 4.3 sebagai berikut:

$$v_1 = (\overline{U}_4 - \overline{U}_1); \quad v_2 = \overline{U}_3 - \frac{(\overline{U}_5 - \overline{U}_2)}{L}; \text{ dan } v_3 = \overline{U}_6 - \frac{(\overline{U}_5 - \overline{U}_2)}{L} \tag{4.21}$$

dalam bentuk matriks sebagai:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{U}_2 \\ \overline{U}_3 \\ \overline{U}_4 \\ \overline{U}_5 \\ \overline{U}_6 \end{Bmatrix} \tag{4.22}$$

atau dalam bentuk ringkas sebagai:

$$\mathbf{v} = [\bar{\mathbf{a}}_{1B} \quad \bar{\mathbf{a}}_{2B}] \begin{Bmatrix} \overline{\mathbf{U}}_1 \\ \overline{\mathbf{U}}_2 \end{Bmatrix} \text{ atau } \mathbf{v} = \bar{\mathbf{a}}_B \overline{\mathbf{U}} \tag{4.23}$$

di mana matriks $\bar{\mathbf{a}}_B$ disebut matriks kompatibilitas untuk sistem balok tumpuan sederhana terhadap sumbu referensi lokal. Dari matriks kompatibilitas $\bar{\mathbf{a}}_B$, diamati bahwa deformasi aksial v_1 hanya bergantung pada perpindahan ujung batang ($\overline{U}_1$ dan $\overline{U}_4$) di sepanjang sumbu x sementara deformasi rotasi ujung batang v_2 dan v_3 bergantung pada perpindahan ujung batang ($\overline{U}_2$ dan $\overline{U}_5$) di sepanjang sumbu y dan rotasi ujung batang ($\overline{U}_3$ dan $\overline{U}_6$). Kurangnya kopling antara komponen perpindahan aksial terhadap sistem referensi lokal di satu sisi dengan komponen perpindahan transversal dan rotasi di sisi lain ini disebabkan oleh linierisasi hubungan kompatibilitas geometrik.

Selanjutnya, diamati bahwa matriks $\bar{\mathbf{a}}_B$ sama dengan *transpose* dari matriks kesetimbangan $\bar{\mathbf{b}}_B$ (3/3.11) untuk sistem balok tumpuan sederhana yang didefinisikan pada Bab 3.

$$\overline{\mathbf{P}} - \overline{\mathbf{P}}_0 = \bar{\mathbf{b}}_B \mathbf{q} \tag{3/3.11}$$

Perlu dicatat bahwa linearisasi hubungan kompatibilitas elemen berkaitan dengan pertimbangan kondisi kesetimbangan elemen dalam konfigurasi awalnya (sebelum deformasi). Secara sederhana dapat dinyatakan bahwa transformasi statis (3/3.11) dan kinematik (4.23) bersifat kontragradien.

Dapat disimpulkan bahwa:

1. Deformasi batang dasar $\mathbf{v}$ dari Pers. (4.23) dan gaya batang dasar $\mathbf{q}$ dari Pers. (3/3.11) adalah pasangan kerja konjugat. Dengan kata lain, perkalian skalar dari kedua besaran ini menghasilkan kerja yang konsisten.
2. Perpindahan ujung batang $\overline{\mathbf{U}}$ dari Pers. (4.23) dan gaya ujung batang $\overline{\mathbf{P}} - \overline{\mathbf{P}}_0$ dari Pers. (3/3.11) adalah pasangan kerja konjugat. Dinyatakan lain, perkalian skalar dari kedua besaran ini menghasilkan kerja yang konsisten.

Bentuk hubungan antara matriks transformasi kesetimbangan dan kompatibilitas ini merupakan hal yang umum, dan pembuktian umumnya diberikan melalui prinsip kerja maya sebagaimana akan dibahas pada bab berikutnya.

Secara ringkas, terdapat tiga deformasi elemen dasar untuk elemen rangka, yaitu deformasi aksial v_1, deformasi rotasi ujung-i v_2, dan deformasi rotasi ujung-j v_3. Karena terdapat enam perpindahan ujung, maka terdapat tiga mode perpindahan benda tegar yang menghasilkan deformasi nol. Masing-masing mode perpindahan benda tegar tersebut dapat diperoleh dengan menetapkan nilai nol pada deformasi elemen dasar dalam Pers. (4.22):

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{U}_2 \\ \overline{U}_3 \\ \overline{U}_4 \\ \overline{U}_5 \\ \overline{U}_6 \end{Bmatrix} \tag{4.24}$$

Berdasarkan Persamaan (4.24), moda perpindahan benda tegar adalah:

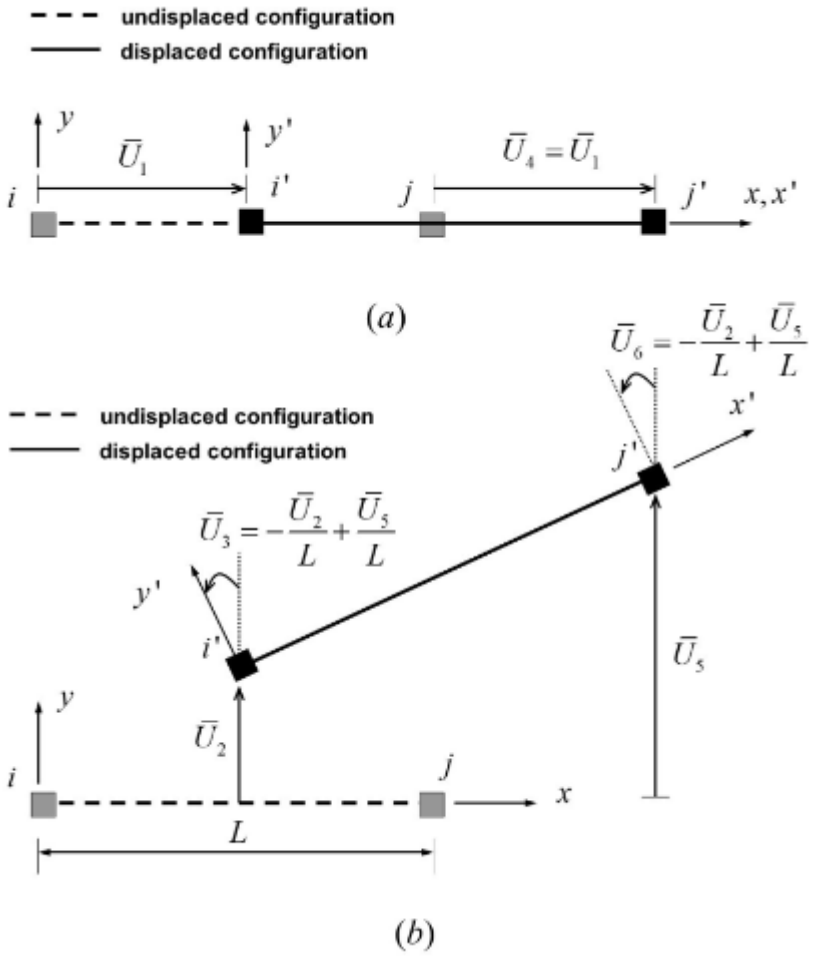
$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v_1 = 0 \Longrightarrow -\overline{U}_1 + \overline{U}_4 = 0 \Longrightarrow \overline{U}_4 = \overline{U}_1} \\ &\boldsymbol{v_2 = 0 \Longrightarrow \frac{\overline{U}_2}{L} + \overline{U}_3 - \frac{\overline{U}_5}{L} = 0 \Longrightarrow \overline{U}_3 = -\frac{\overline{U}_2}{L} + \frac{\overline{U}_5}{L}} \\ &\boldsymbol{v_3 = 0 \Longrightarrow \frac{\overline{U}_2}{L} - \frac{\overline{U}_5}{L} + \overline{U}_6 = 0 \Longrightarrow \overline{U}_6 = -\frac{\overline{U}_2}{L} + \frac{\overline{U}_5}{L}} \end{aligned} \tag{4.25}$$

dan ditampilkan pada Gambar 4.4. Dari perpindahan benda tegar pada Pers. (4.25), dipilih $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$, dan $\overline{U}_5$ sebagai perpindahan yang menahan mode-mode benda tegar dan menyatakannya dalam bentuk vektor sebagai:

$$\overline{\mathbf{U}}_w = \lfloor \overline{U}_1 \quad \overline{U}_2 \quad \overline{U}_5 \rfloor^T \tag{4.26}$$

$\overline{U}_3$, $\overline{U}_4$, dan $\overline{U}_6$ dipilih sebagai perpindahan yang tersisa dan dinyatakan dalam bentuk vektor sebagai:

$$\overline{\mathbf{U}}_r = \lfloor \overline{U}_3 \quad \overline{U}_4 \quad \overline{U}_6 \rfloor^T \tag{4.27}$$



Gambar 4.4 Moda Perpindahan Benda Kaku: Model Balok dengan Tumpuan Sederhana.

Perpindahan ujung elemen $\bar{U}$ dapat didefinisikan sebagai:

$$\bar{\mathbf{U}} = \lfloor \bar{\mathbf{U}}_w \quad \bar{\mathbf{U}}_r \rfloor^T \tag{4.28}$$

Demikian pula, gaya ujung anggota P dapat dipartisi sehingga:

$$\bar{\mathbf{P}} = \lfloor \bar{\mathbf{P}}_w \quad \bar{\mathbf{P}}_r \rfloor^T \tag{4.29}$$

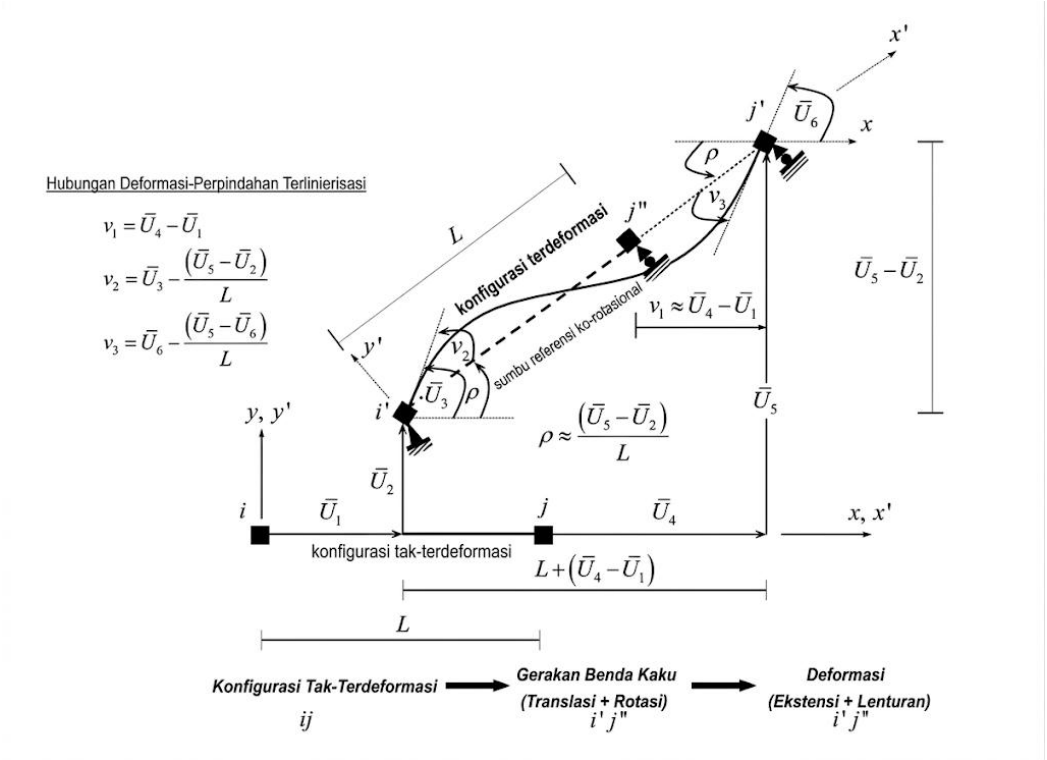
di mana $\bar{\mathbf{P}}_w = \lfloor \bar{P}_1 \quad \bar{P}_2 \quad \bar{P}_5 \rfloor^T$ dan $\bar{\mathbf{P}}_r = \lfloor \bar{P}_3 \quad \bar{P}_4 \quad \bar{P}_6 \rfloor^T$ berturut-turut adalah gaya ujung yang diasosiasikan dengan $\bar{\mathbf{U}}_w$ dan $\bar{\mathbf{U}}_r$. Di bawah kondisi gerak benda tegar ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$), $\bar{\mathbf{U}}_r$ dan $\bar{\mathbf{U}}_w$ dihubungkan melalui ekspresi transformasi berikut:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_3 \\ \bar{U}_4 \\ \bar{U}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{U}_5 \end{Bmatrix} \text{ atau } \bar{\mathbf{U}}_r = \bar{\mathbf{T}}_B \bar{\mathbf{U}}_w \tag{4.30}$$

Dengan adanya deformasi elemen **(v ≠ 0),** hubungan kinematik rangka tersebut adalah:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_3 \\ \bar{U}_4 \\ \bar{U}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{U}_5 \end{Bmatrix} \text{ atau } \bar{\mathbf{U}}_r = \mathbf{v} + \bar{\mathbf{T}}_B \bar{\mathbf{U}}_w \tag{4.31}$$

Himpunan lengkap kinematika elemen yang telah dilinearisasi (deformasi + gerak benda tegar) yang terkait dengan Persamaan (4.31) disajikan secara skematis pada Gambar 4.5. Kondisi kesetimbangan elemen dapat diperoleh dari hubungan kinematik (4.31) melalui prinsip perpindahan maya sebagai berikut:



Gambar 4.5 Deformasi dan Perpindahan Model Balok dengan Tumpuan Sederhana: Deskripsi Kinematis yang Dilinearisasi.

Menerapkan perpindahan virtual sembarang $\delta\bar{\mathbf{U}}_w$, kemudian dari (4.31)

$$\delta\bar{\mathbf{U}}_r = \bar{\mathbf{T}}_B \delta\bar{\mathbf{U}}_w \tag{4.32}$$

dan kerja maya eksternal

$$\delta W_{ext} = \delta\bar{\mathbf{U}}^T\bar{\mathbf{P}} = \delta\bar{\mathbf{U}}_w^T\bar{\mathbf{P}}_w + \delta\bar{\mathbf{U}}_r^T\bar{\mathbf{P}}_r = 0 \tag{4.33}$$

Mensubstitusikan Pers. (4.32) ke dalam (4.33) menghasilkan:

$$\delta W_{ext} = \delta \overline{\mathbf{U}}_w^T (\overline{\mathbf{P}}_w + \overline{\mathbf{T}}_B^T \overline{\mathbf{P}}_r) = 0 \tag{4.34}$$

Karena sifat sembarang dari $\delta \overline{\mathbf{U}}_w$, dapat disimpulkan bahwa:

$$\overline{\mathbf{P}}_w + \overline{\mathbf{T}}_B^T \overline{\mathbf{P}}_r = \mathbf{0} \tag{4.35}$$

Secara eksplisit,

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.36}$$

Persamaan (4.36) merepresentasikan kondisi kesetimbangan keseluruhan elemen (sebagai benda tegar), yaitu:

$$\bar{P}_4 + \bar{P}_1 = 0 \rightarrow \text{Kesetimbangan Horizontal} \tag{4.37}$$

$$\bar{P}_2 - \frac{\bar{P}_3}{L} - \frac{\bar{P}_6}{L} = 0 \rightarrow \text{Kesetimbangan Momen di Ujung } j \tag{4.38}$$

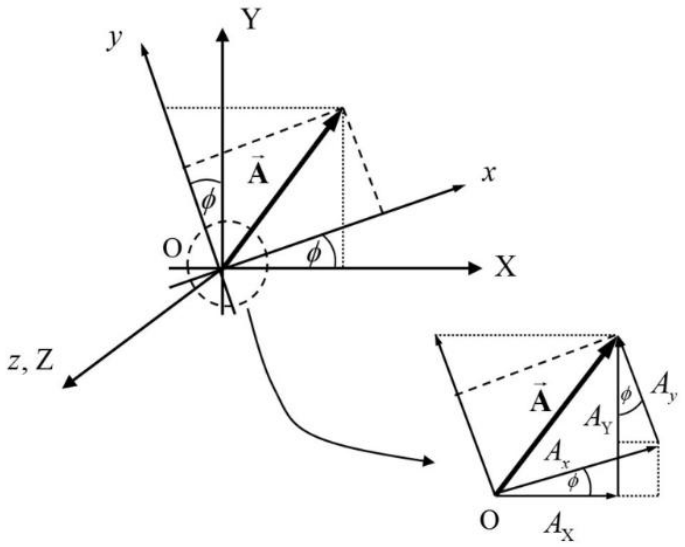
$$\bar{P}_5 + \frac{\bar{P}_3}{L} + \frac{\bar{P}_6}{L} = 0 \rightarrow \text{Kesetimbangan Momen di Ujung } i \tag{4.39}$$

Catatan:

(i) Perlu dicatat bahwa pemilihan sistem deformasi dasar tidaklah tunggal; terdapat pilihan lain untuk sistem deformasi dasar, misalnya: Sistem Balok Kantilever. Penurunan persamaan kompatibilitas matriks untuk sistem balok kantilever diserahkan kepada pembaca sebagai latihan akhir bab.

4.3 TRANSFORMASI KOMPONEN VEKTOR PERPINDAHAN

Pada bagian sebelumnya, persamaan kompatibilitas matriks (4.22) dinyatakan dalam sistem acuan lokal (x, y,dan z). Namun, penting juga untuk menyatakan persamaan kompatibilitas matriks tersebut dalam sistem acuan global (X, Y,dan Z). Dengan kata lain, hubungan antara perpindahan ujung elemen dalam sistem acuan lokal dan global harus dijabarkan. Hal ini dapat dilakukan melalui transformasi komponen vektor.



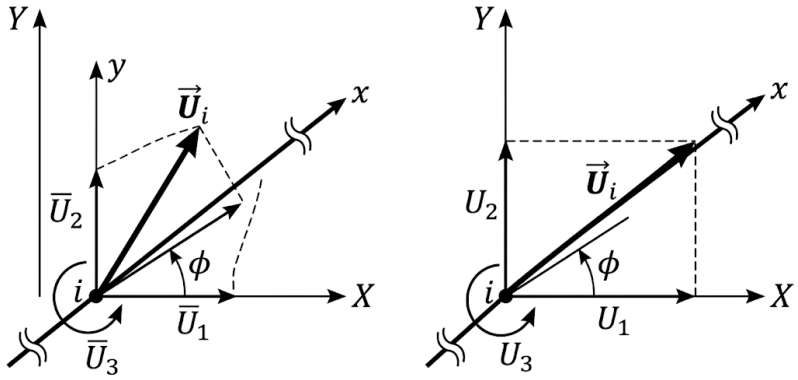
Gambar 4.6 Transformasi Komponen Vektor Bidang.

Pada Gambar 4.6, sumbu referensi lokal miring sebesar sudut ϕ terhadap sumbu referensi global. Ini menyiratkan bahwa sudut ϕ diukur dari referensi global ke sistem referensi lokal. Tanda sudut ϕ mengikuti sistem tangan kanan. Vektor $\vec{A}$ pada Gambar 4.6 dapat diuraikan terhadap komponen x-y dan $X-Y$. Perlu dicatat bahwa $\vec{A}$ dapat dianggap sebagai vektor perpindahan di node i atau j. Pada Bab 3, vektor $\vec{A}$ juga telah dianggap sebagai vektor gaya di node i atau j. Oleh karena itu, hubungan antara komponen vektor yang didefinisikan terhadap sistem referensi global dan lokal yang diberikan dalam Pers. (3/3.18) dan (3/3.19) dapat digunakan dan layak untuk diulangi di sini.

$$\begin{Bmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} \text{ atau } \mathbf{A}_{XYZ} = \mathbf{T}_{ROT}^{T}\mathbf{A}_{xyz} \qquad (4.40)$$

$$\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{Bmatrix} \text{ atau } \mathbf{A}_{xyz} = \mathbf{T}_{ROT}\mathbf{A}_{XYZ} \qquad (4.41)$$

Karena tujuan saat ini adalah menetapkan hubungan transformasi antara komponen perpindahan ujung terhadap sistem koordinat lokal dan global, vektor perpindahan $\overline{\mathbf{U}}_i$ pada node i yang ditunjukkan pada Gambar 4.7 dipertimbangkan. Gambar 4.7a menunjukkan komponen perpindahan sepanjang.



(a) Sistem Koordinat Lokal (b) Sistem Koordinat Global

Gambar 4.7 Transformasi Vektor Perpindahan Ujung Elemen pada Titik Simpul i.

Gambar 4.7a memperlihatkan komponen perpindahan sepanjang sumbu acuan lokal, sedangkan Gambar 4.7b memperlihatkan komponen perpindahan sepanjang sumbu acuan global. Berdasarkan hubungan transformasi pada Persamaan (4.40), hubungan antara komponen perpindahan yang ditunjukkan pada Gambar 4.7a dan b adalah:

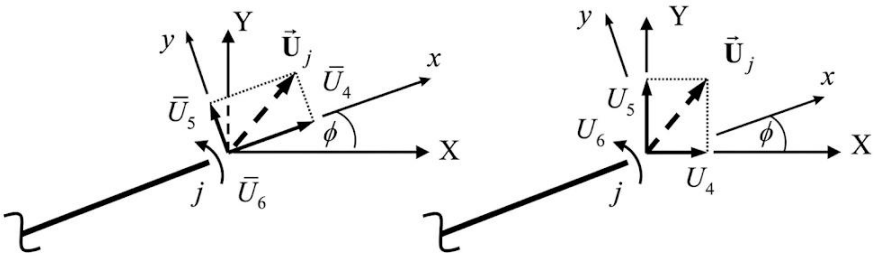
$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{U}_2 \\ \overline{U}_3 \end{Bmatrix} \text{ atau } \mathbf{U}_i = \mathbf{T}_{ROT}^T \overline{\mathbf{U}}_i \qquad (4.42)$$

dan sebaliknya,

$$\begin{Bmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{U}_2 \\ \overline{U}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \text{ atau } \overline{\mathbf{U}}_i = \mathbf{T}_{ROT} \mathbf{U}_i \qquad (4.43)$$

Pertimbangan serupa diterapkan pada vektor perpindahan $\overline{\mathbf{U}}_j$ pada node j (Gambar 4.8) dan menghasilkan hubungan transformasi yang sama seperti:

$$\begin{Bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{U}_4 \\ \overline{U}_5 \\ \overline{U}_6 \end{Bmatrix} \text{ atau } \mathbf{U}_2 = \mathbf{T}_{ROT}^T \overline{\mathbf{U}}_2 \qquad (4.44)$$



(a) Sistem Koordinat Lokal (b) Sistem Koordinat Global

Gambar 4.8 Transformasi Vektor Perpindahan Ujung Elemen pada Titik Simpul j.

dan sebaliknya,

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_4 \\ \bar{U}_5 \\ \bar{U}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} \text{ atau } \bar{\mathbf{U}}_2 = \mathbf{T}_{ROT}\mathbf{U}_2 \qquad (4.45)$$

Menggabungkan Pers. (4.42) dan (4.44) menghasilkan hubungan transformasi untuk perpindahan ujung elemen:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{U}_3 \\ \bar{U}_4 \\ \bar{U}_5 \\ \bar{U}_6 \end{Bmatrix} \text{ atau } \mathbf{U} = \mathbf{T}_{ROT}^T\bar{\mathbf{U}} \qquad (4.46)$$

atau sebaliknya

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{U}_3 \\ \bar{U}_4 \\ \bar{U}_5 \\ \bar{U}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} \text{ atau } \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}\mathbf{U} \qquad (4.47)$$

Di mana

$$\mathbf{\Gamma}_{ROT} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ROT} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{ROT} \end{bmatrix} \qquad (4.48)$$

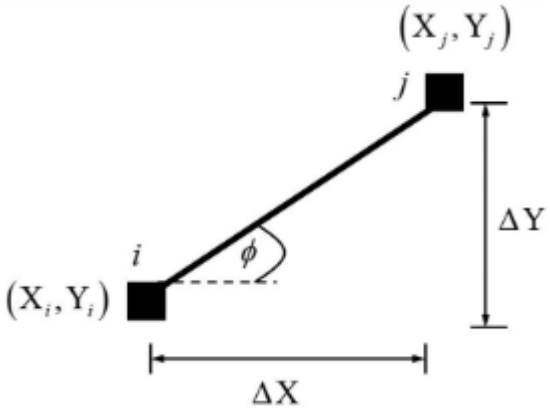
Susunan komponen vektor $\mathbf{U}$ mirip dengan vektor $\bar{\mathbf{U}}$. Dimulai dari node i, pertama-tama ditetapkan derajat kebebasan (*degree of freedom* - DOF) pada sumbu X global (komponen pertama), kemudian DOF pada sumbu Y global (komponen kedua), lalu DOF terhadap sumbu

Z global (komponen ketiga), dan dilanjutkan dengan cara yang sama ke node j dari elemen tersebut.

Dalam implementasi komputer dari program analisis matriks, nilai sudut ϕ dari setiap elemen tidak harus diberikan karena nilai kosinus arah ($\cos\phi$ dan $\sin\phi$) tidak dihitung secara langsung. Sebagai gantinya, nilai-nilai tersebut dihitung secara tidak langsung berdasarkan data koordinat dari node i dan j (Gambar 4.9) sebagai berikut:

$$\Delta X = X_j - X_i; \quad \Delta Y = Y_j - Y_i; \text{ dan } L = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2} \tag{4.49}$$

$$\cos\phi = \frac{\Delta X}{L} \text{ dan } \sin\phi = \frac{\Delta Y}{L} \tag{4.50}$$



Gambar 4.9 Perhitungan Tak Langsung Kosinus Arah.

4.4 KOMPATIBILITAS DALAM SISTEM REFERENSI GLOBAL

Sejauh ini, persamaan kompatibilitas matriks pada Pers. (4.22) telah dirumuskan berdasarkan sumbu referensi lokal. Selain itu, hubungan transformasi (4.47) antara perpindahan ujung elemen yang dinyatakan dalam sistem koordinat lokal dan global juga telah diperoleh. Berdasarkan hubungan transformasi tersebut, persamaan kompatibilitas matriks dapat dengan mudah dinyatakan dalam sumbu referensi global.

Substitusi Pers. (4.47) ke dalam Pers. (4.22) menghasilkan persamaan kompatibilitas matriks terhadap sistem referensi global sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\phi & -\sin\phi & 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\frac{\sin\phi}{L} & \frac{\cos\phi}{L} & 1 & \frac{\sin\phi}{L} & -\frac{\cos\phi}{L} & 0 \\ -\frac{\sin\phi}{L} & \frac{\cos\phi}{L} & 0 & \frac{\sin\phi}{L} & -\frac{\cos\phi}{L} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} \tag{4.51}$$

atau dalam format ringkas sebagai berikut:

$$\mathbf{v} = [\mathbf{a}_{1B} \quad \mathbf{a}_{2B}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{Bmatrix} \text{ atau } \mathbf{v} = \mathbf{a}_B \mathbf{U} \tag{4.52}$$

di mana $\mathbf{a}_B$ adalah matriks kompatibilitas untuk model balok tumpuan sederhana dalam sistem referensi global. Selain itu, diamati bahwa matriks $\mathbf{a}_B$ sama dengan transpos dari matriks kesetimbangan $\mathbf{b}_B$ (3/3.30) untuk sistem balok tumpuan sederhana yang didefinisikan dalam Bab 3.

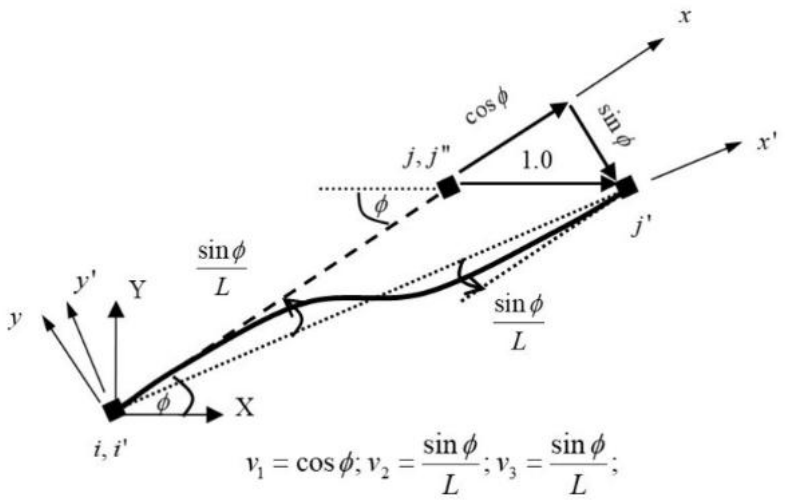
$$\mathbf{P} - \mathbf{P}_0 = \mathbf{b}_B \mathbf{q} \tag{3/3.30}$$

Dapat dikatakan secara sederhana bahwa transformasi statis (3/3.30) dan kinematik (4.52) bersifat kontragradien.

Dapat disimpulkan bahwa:

1. Deformasi elemen dasar $\mathbf{v}$ pada Pers. (4.52) dan gaya elemen dasar $\mathbf{q}$ pada Pers. (3/3.30) adalah pasangan kerja konjugat (*conjugate-work pairs*). Dengan kata lain, hasil kali skalar dari kedua kuantitas ini menghasilkan kerja yang konsisten.
2. Perpindahan ujung elemen $\mathbf{U}$ pada Pers. (4.52) dan gaya ujung elemen $\mathbf{P} - \mathbf{P}_0$ pada Pers. (3/3.30) adalah pasangan kerja konjugat (*conjugate-work pairs*). Dengan kata lain, hasil kali skalar dari kedua kuantitas ini menghasilkan kerja yang konsisten.

Selanjutnya, perlu dicatat bahwa setiap kolom matriks kompatibilitas merepresentasikan mode deformasi elemen untuk perpindahan satuan yang diberikan pada derajat kebebasan perpindahan yang bersesuaian dalam sistem acuan global. Sebagai contoh, interpretasi geometris dari kolom keempat matriks kompatibilitas aB ditunjukkan pada Gambar 4.10.



Gambar 4.10 Mode Deformasi Independen dari Model Balok Tumpuan Sederhana yang Terkait dengan Perpindahan Satuan yang Diberikan $U_4 = 1.0$.

4.5 PERSAMAAN MATRIKS KOMPATIBILITAS UNTUK STRUKTUR RANGKA

Pada bagian ini, tujuan utamanya adalah merumuskan persamaan matriks kompatibilitas untuk struktur rangka. Persamaan matriks ini menghubungkan deformasi dasar elemen dengan perpindahan simpul pada derajat kebebasan global. Persamaan matriks kompatibilitas struktur dapat diperoleh dengan meninjau persamaan kompatibilitas seluruh elemen secara kolektif.

Untuk struktur rangka secara keseluruhan, digunakan vektor yang diperluas (*augmented vector*) $\mathbf{V}$ untuk menghimpun deformasi dasar dari setiap elemen, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_k \quad \dots \quad \mathbf{v}_m]^T_{3m\times 1} \tag{4.53}$$

di mana m adalah jumlah elemen dan sub-vektor $\mathbf{v}_k$ berisi deformasi dasar dari elemen k. Oleh karena itu, ukuran vektor $\mathbf{V}$ adalah $3m \times 1$. Demikian pula, perpindahan nodal dikelompokkan ke dalam vektor tambahan $\mathbf{U}$ yang didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2 \quad \dots \quad \mathbf{U}_k \quad \dots \quad \mathbf{U}_n]^T_{3n\times 1} \tag{4.54}$$

di mana n adalah jumlah node dan sub-vektor $\mathbf{U}_k$ berisi perpindahan dari node k. Oleh karena itu, ukuran vektor $\mathbf{U}$ adalah $3n \times 1$. Setelah kondisi kompatibilitas dipertimbangkan secara kolektif untuk semua elemen, persamaan kompatibilitas matriks diperoleh sebagai:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_n \end{Bmatrix}_{3m\times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{(1)} & \mathbf{a}_2^{(1)} & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_1^{(2)} & \mathbf{a}_2^{(2)} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \end{bmatrix}_{3m\times 3n} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_n \end{Bmatrix}_{3n\times 1} \tag{4.55}$$

atau dalam format ringkas sebagai berikut:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{U} \tag{4.56}$$

di mana $\mathbf{A}$ adalah matriks kompatibilitas struktur. Matriks $\mathbf{A}$ diformulasikan dalam bentuk matriks $\mathbf{a}$ dari elemen melalui persamaan kompatibilitas elemen pada Pers. (4.52). Nomor node elemen diganti dengan nomor node struktur melalui konektivitas elemen.

Sebagai contoh, misalkan suatu elemen a pada Gambar 4.11 memiliki ujung-ujungnya i dan j yang terletak pada node struktur I dan J, secara berurutan. Persamaan kompatibilitas matriks untuk elemen a dituliskan sebagai:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{a}_1^{(a)}\mathbf{U}_I + \mathbf{a}_2^{(a)}\mathbf{U}_J \tag{4.57}$$

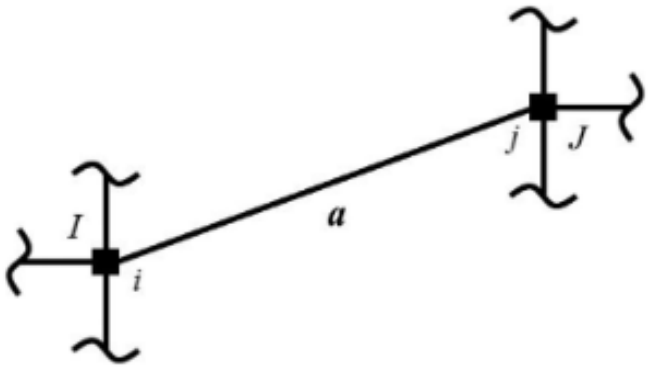
Karena konektivitas anggota a:

$$\mathbf{U}_I = \mathbf{U}_1^{(a)} \text{ dan } \mathbf{U}_J = \mathbf{U}_2^{(a)} \tag{4.58}$$

Persamaan kompatibilitas untuk elemen a dimodifikasi menjadi:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{a}_1^{(a)}\mathbf{U}_I + \mathbf{a}_2^{(a)}\mathbf{U}_J \tag{4.59}$$

Proses ini diulangi untuk semua elemen secara berurutan. Pada akhirnya, diperoleh persamaan kompatibilitas struktural (4.56). Perlu dicatat pula bahwa berdasarkan Persamaan (4.56), deformasi elemen **V** selalu dapat ditentukan dari derajat kebebasan perpindahan **U** yang diketahui.



Gambar 4.11 Elemen rangka umum a dengan ujung-ujungnya $i$dan $j$terhubung ke titik simpul struktural Idan J.

Persamaan kompatibilitas matriks (4.56) dapat dipartisi berdasarkan perpindahan titik simpul yang diketahui dan yang tidak diketahui sebagai berikut:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{A}_{free} \quad \vdots \quad \mathbf{A}_{constr}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{free} \\ \mathbf{U}_{constr} \end{Bmatrix} \tag{4.60}$$

di mana $\mathbf{U}_{free}$ dan $\mathbf{U}_{constr}$ masing-masing berisi perpindahan nodal yang berkaitan dengan derajat kebebasan bebas dan terkekang; $\mathbf{A}_{free}$ dan $\mathbf{A}_{constr}$ masing-masing adalah matriks kompatibilitas yang berkaitan dengan derajat kebebasan bebas dan terkekang. $\mathbf{U}_{constr}$ diketahui dan biasanya berkaitan dengan kondisi tumpuan. Dalam hal di mana tidak ada pergerakan tumpuan ($\mathbf{U}_{constr} = \mathbf{0}$), Pers. (4.60) direduksi menjadi:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{free} = \mathbf{A}_{free}\mathbf{U}_{free} \tag{4.61}$$

Perlu dicatat bahwa jumlah baris dari matriks kompatibilitas $\mathbf{A}_{free}$ bersesuaian dengan jumlah deformasi dasar, yang sama dengan jumlah gaya dasar seperti yang dibahas dalam Bab 3. Jumlah kolom dari matriks kompatibilitas $\mathbf{A}_{free}$ berkaitan dengan jumlah derajat kebebasan

bebas. Akibatnya, jumlah baris melebihi jumlah kolom sebesar derajat ketidaktentuan statis (*degree of statical indeterminacy*, SI). Dengan kata lain, derajat ketidaktentuan statis (SI) dapat ditentukan dari dimensi matriks $\mathbf{A}_{free}$ sebagai:

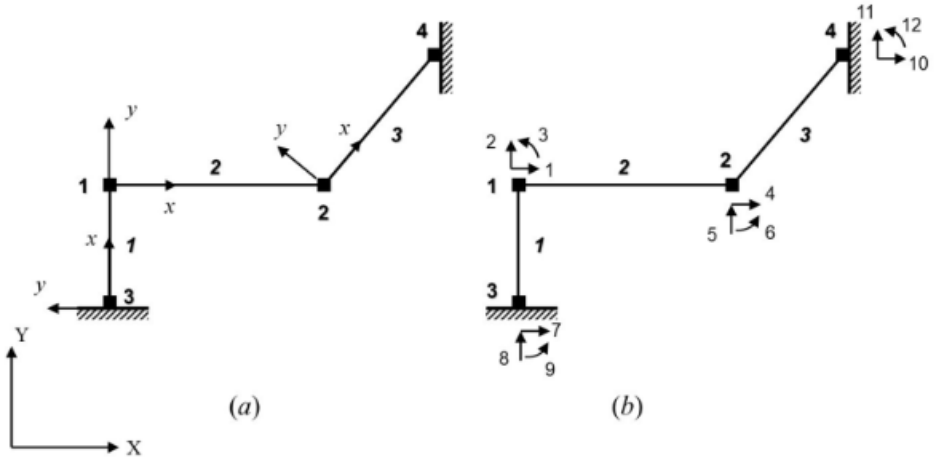
$$SI = n_{row} - n_{column} \tag{4.62}$$

Untuk mengilustrasikan konsep penyusunan persamaan kompatibilitas matriks struktur yang telah disebutkan sebelumnya, ditinjau sebuah rangka prototipe yang diperlihatkan pada Gambar 4.12. Diasumsikan bahwa model balok dengan tumpuan sederhana (Gambar 4.3) digunakan untuk merepresentasikan sistem elemen dasar. Sistem deformasi dasar rangka tersebut diperlihatkan pada Gambar 4.13.

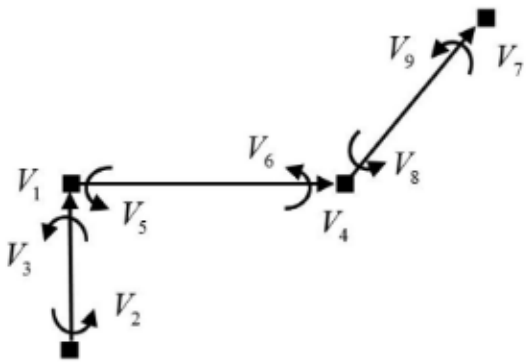
Tinjau persamaan kompatibilitas elemen 1:

Berdasarkan hubungan kinematik pada Persamaan (4.52), kompatibilitas elemen tersebut adalah:

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{a}_{1B}^{(1)}\mathbf{U}_1^{(1)} + \mathbf{a}_{2B}^{(1)}\mathbf{U}_2^{(1)} \tag{4.63}$$



Gambar 4.12 Portal Prototipe: (a) Sumbu Referensi Lokal; (b) Sistem Penomoran Titik Simpul, Elemen, dan Derajat Kebebasan (DOF).



Gambar 4.13 Rangka Prototipikal: Sistem Deformasi Dasar.

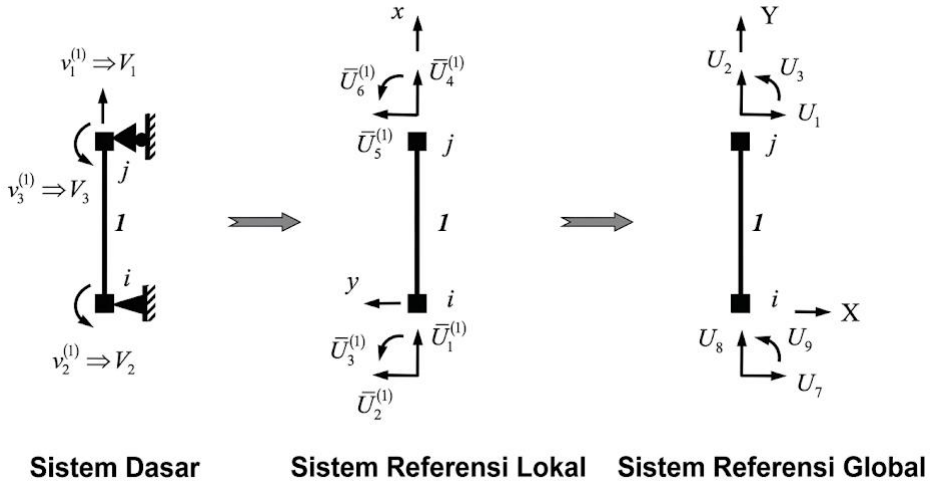
Menerapkan konektivitas elemen dan identifikasi deformasi:

$$\mathbf{U}_1^{(1)} \Rightarrow \mathbf{U}_3 \text{ dan } \mathbf{U}_2^{(1)} \Rightarrow \mathbf{U}_1 \tag{4.64}$$

$$\mathbf{v}^{(1)} \Rightarrow \mathbf{V}_1 \tag{4.65}$$

Persamaan (4.63) dapat ditulis dalam bentuk variabel struktural sebagai:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{a}_{1B}^{(1)}\mathbf{U}_3 + \mathbf{a}_{2B}^{(1)}\mathbf{U}_1 \tag{4.66}$$



Gambar 4.14 Transformasi Deformasi–Pergeseran Anggota 1: Sistem Dasar ke Sistem Referensi Global.

dan ditempatkan dalam persamaan kompatibilitas matriks struktur sebagai:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{2B}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{a}_{1B}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_4 \end{Bmatrix} \tag{4.67}$$

Seluruh proses penetapan hubungan kompatibilitas untuk elemen 1 digambarkan secara skematis pada Gambar 4.14.

Proses yang sama juga diterapkan pada elemen 2 dan 3. Dengan demikian, hubungan kompatibilitas elemen tersebut yang dinyatakan dalam variabel struktural adalah:

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{a}_{1B}^{(2)}\mathbf{U}_1 + \mathbf{a}_{2B}^{(2)}\mathbf{U}_2 \tag{4.68}$$

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{a}_{1B}^{(3)}\mathbf{U}_2 + \mathbf{a}_{2B}^{(3)}\mathbf{U}_4 \tag{4.69}$$

Relasi kompatibilitas ini ditempatkan dalam relasi kompatibilitas struktural sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{V}_1\\ \mathbf{V}_2\\ \mathbf{V}_3\end{Bmatrix}_{9\times1} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_{2B}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{a}_{1B}^{(1)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{a}_{1B}^{(2)} & \mathbf{a}_{2B}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{a}_{1B}^{(3)} & \mathbf{0} & \mathbf{a}_{2B}^{(3)}\end{bmatrix}_{9\times12} \begin{Bmatrix}\mathbf{U}_1\\ \mathbf{U}_2\\ \mathbf{U}_3\\ \mathbf{U}_4\end{Bmatrix}_{12\times1} \tag{4.70}$$

Ini adalah persamaan kompatibilitas matriks untuk keseluruhan struktur dan dapat dinyatakan dalam format ringkas sebagai:

$$\mathbf{V} = \mathbf{AU} \tag{4.71}$$

Dapat diamati bahwa matriks kompatibilitas ini merupakan transpos dari matriks kesetimbangan (3/3.42) dari struktur yang sama. Dapat disimpulkan bahwa:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^T \tag{4.72}$$

Dimana

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_{2B}^{(1)} & \mathbf{b}_{1B}^{(2)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_{2B}^{(2)} & \mathbf{b}_{1B}^{(3)}\\ \mathbf{b}_{1B}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_{2B}^{(3)}\end{bmatrix}_{12\times9} \tag{3/3.42}$$

$$\mathbf{a}_{1B} = \mathbf{b}_{1B}^T \text{ and } \mathbf{a}_{2B} = \mathbf{b}_{2B}^T \tag{4.73}$$

Jenis hubungan ini disebabkan oleh sifat kontragradien antara hubungan statis dan kinematik dan dapat dibuktikan dengan prinsip kerja virtual pada bab berikut.
Kondisi batas dari kerangka prototipe ini adalah:

$$\mathbf{U}_{constr} = \lfloor \mathbf{U}_3 \quad \mathbf{U}_4 \rfloor^T = \mathbf{0} \quad \text{(tidak ada penurunan tumpuan)} \tag{4.74}$$

Substitusi Persamaan (4.74) ke dalam Persamaan (4.70) menghasilkan hubungan kompatibilitas yang terkait dengan derajat kebebasan bebas sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{V}_1\\ \mathbf{V}_2\\ \mathbf{V}_3\end{Bmatrix}_{9\times1} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_{2B}^{(1)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{a}_{1B}^{(2)} & \mathbf{a}_{2B}^{(2)}\\ \mathbf{0} & \mathbf{a}_{1B}^{(3)}\end{bmatrix}_{9\times6} \begin{Bmatrix}\mathbf{U}_1\\ \mathbf{U}_2\end{Bmatrix}_{6\times1} \quad \text{atau} \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_{free} = \mathbf{A}_{free}\mathbf{U}_{free} \tag{4.75}$$

Menarik juga untuk dicatat bahwa setiap kolom dari matriks $\mathbf{A}_{free}$ mewakili deformasi elemen yang berkaitan dengan perpindahan satuan yang diberikan pada setiap derajat kebebasan. Sebagai contoh, deformasi elemen yang bersesuaian dengan perpindahan satuan yang diberikan $U_5 = 1.0$ disajikan pada Gambar 4.15.

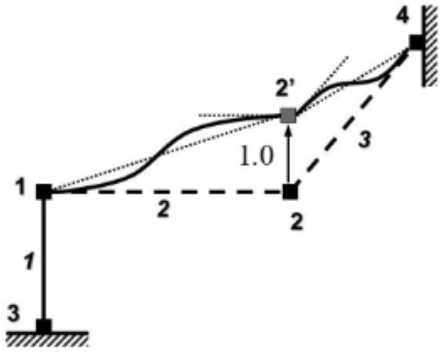
Contoh 4.1

Untuk struktur rangka pada Contoh 3.1, rumuskan persamaan kompatibilitas matriks yang menghubungkan derajat kebebasan bebas global dengan deformasi elemen.

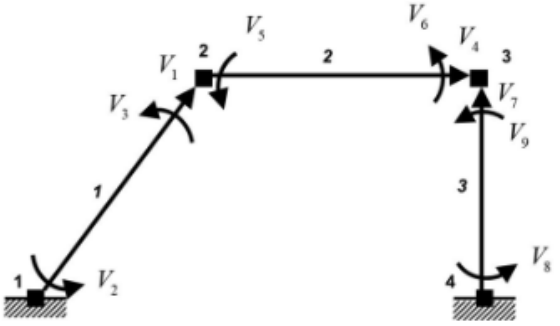
- **Penyelesaian**: Dengan menggunakan sistem penomoran dari Contoh 3.1 dan sistem penomoran dasar deformasi elemen pada Gambar 4.16, proses penyusunan persamaan kompatibilitas geometris untuk elemen 1 disajikan secara skematis pada Gambar 4.17.

Dari Sistem Dasar ke Sistem Referensi Lokal:

$$\begin{Bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{U}_1^{(1)} \\ \overline{U}_2^{(1)} \\ \overline{U}_3^{(1)} \\ \overline{U}_4^{(1)} \\ \overline{U}_5^{(1)} \\ \overline{U}_6^{(1)} \end{Bmatrix}$$



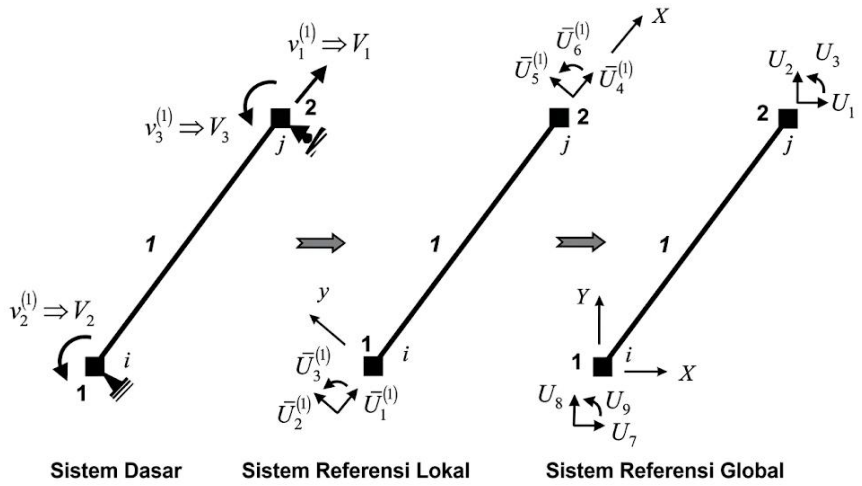
Gambar 4.15 Deformasi elemen akibat perpindahan satuan U_5 = 1,0 yang diberikan.



Gambar 4.16 Contoh 4.1.

Konektivitas elemen dan identifikasi deformasi:

$$LM_1 = \begin{Bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}_1 ; \quad \begin{Bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ U_4^{(1)} \\ U_5^{(1)} \\ U_6^{(1)} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}; \quad \text{dan} \quad \begin{Bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}$$



Gambar 4.17 Contoh 4.1 (Lanjutan).

Dari Sistem Referensi Lokal ke Sistem Referensi Global:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.8 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.16 & 0.12 & 1 & 0.16 & -0.12 & 0 \\ -0.16 & 0.12 & 0 & 0.16 & -0.12 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

Persamaan kompatibilitas matriks untuk elemen 1 ditempatkan ke dalam persamaan kompatibilitas matriks struktur sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.16 & -0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.16 & 0.12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.16 & -0.12 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.16 & 0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{Bmatrix}$$

Dengan menerapkan prosedur yang sama pada elemen 2 dan 3, persamaan kompatibilitas matriks untuk keseluruhan struktur diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.16 & -0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.16 & 0.12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.16 & -0.12 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.16 & 0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{Bmatrix}$$

atau dalam format ringkas sebagai:

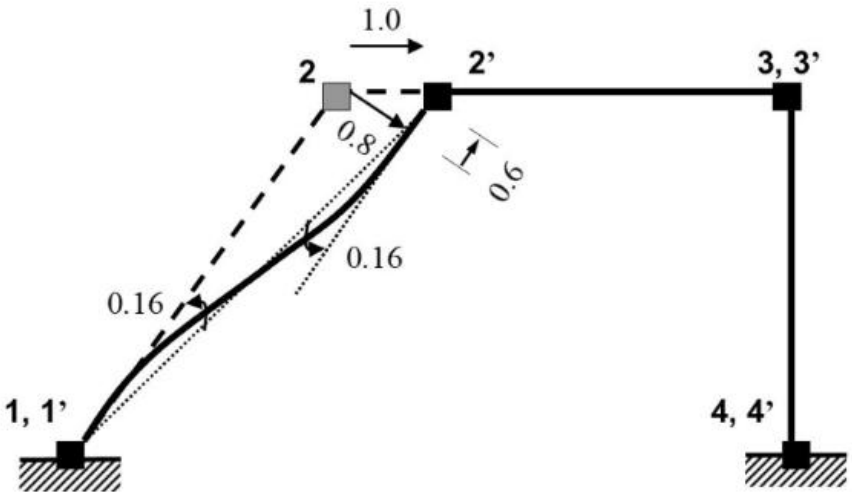
$$\mathbf{V} = \mathbf{AU} \quad \text{atau} \quad \mathbf{V} = \left[\mathbf{A}_{free} : \mathbf{A}_{constr}\right] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{free} \\ \mathbf{U}_{constr} \end{Bmatrix}$$

Matriks **A** adalah matriks kompatibilitas struktur yang menghubungkan deformasi elemen **V** dengan perpindahan titik simpul **U**. Terlihat bahwa matriks kompatibilitas ini merupakan transpos dari matriks kesetimbangan **B** untuk struktur yang sama (Contoh 3.1).
Deformasi elemen dasar dapat dipisahkan sebagai berikut:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{free} + \mathbf{V}_{constr}$$

di mana $\mathbf{V}_{free} = \mathbf{A}_{free}\mathbf{U}_{free}$ adalah deformasi dasar yang berkaitan dengan derajat kebebasan perpindahan bebas, dan $\mathbf{V}_{constr} = \mathbf{A}_{constr}\mathbf{U}_{constr}$ adalah deformasi dasar yang berkaitan dengan derajat kebebasan perpindahan terkekang. Pada contoh ini, tidak ada penurunan tumpuan ($\mathbf{U}_{constr} = \mathbf{0}$). Oleh karena itu, persamaan kompatibilitas matriks direduksi menjadi:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{free} = \mathbf{A}_{free}\mathbf{U}_{free} \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.16 & -0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.16 & -0.12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$



Gambar 4.18 Contoh 4.1 (Lanjutan).

Selain itu, dapat diamati bahwa matriks kompatibilitas $\mathbf{A}_{free}$ merupakan transpose dari matriks keseimbangan $\mathbf{B}_{free}$ pada struktur yang sama (Contoh 3.1). Menarik juga untuk dicatat bahwa setiap kolom dari matriks $\mathbf{A}_{free}$ mewakili deformasi elemen yang berkaitan dengan perpindahan satuan yang diberikan pada setiap derajat kebebasan. Sebagai contoh, kolom pertama dari matriks $\mathbf{A}_{free}$ merupakan deformasi elemen yang berkaitan dengan perpindahan satuan yang diberikan pada derajat kebebasan pertama ($U_1 = 1.0$) seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.18.

4.6 ELEMEN RANGKA BATANG (UJUNG SENDI) DAN STRUKTUR SAMBUNGAN SENDI

Sejauh ini, pembahasan hanya mencakup struktur yang terdiri dari elemen rangka (*frame*). Pada bagian ini, perhatian akan difokuskan pada struktur sambungan sendi yang umumnya dikenal sebagai struktur rangka batang (*truss*). Persamaan kompatibilitas matriks yang diturunkan pada bagian-bagian sebelumnya dapat dengan mudah diperluas untuk kasus struktur rangka batang, karena elemen rangka batang pada dasarnya merupakan bentuk khusus dari elemen rangka. Hal ini dapat dilakukan dengan mengamati bahwa deformasi aksial tidak saling bergantung (*un-coupled*) terhadap deformasi transversal dan rotasional akibat linearisasi hubungan kompatibilitas geometris. Sifat independen dari moda deformasi aksial ini terlihat jelas pada persamaan kompatibilitas elemen (4.22) sebagaimana ditunjukkan pada

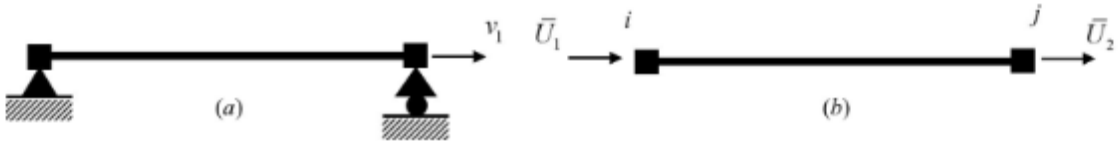
Gambar 4.19. Akibatnya, hubungan kompatibilitas geometris untuk elemen rangka batang terhadap sumbu acuan lokal dirumuskan sebagai berikut:

$$v_1 = [-1 \quad 1]\begin{Bmatrix}\overline{U}_1\\ \overline{U}_2\end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad v_1 = \bar{\mathbf{a}}^{truss}\overline{\mathbf{U}} \tag{4.76}$$

di mana $\bar{\mathbf{a}}^{truss}$ adalah matriks kompatibilitas dari sistem rangka batang dasar (Gambar 4.20) dalam sumbu acuan lokal. Persamaan kompatibilitas matriks dari elemen rangka batang dalam sumbu acuan global dapat diperoleh dengan mentransformasikan perpindahan ujung elemen dari sistem acuan lokal ke sistem acuan global.

$$\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0\\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{U}_1\\ \overline{U}_2\\ \overline{U}_3\\ \overline{U}_4\\ \overline{U}_5\\ \overline{U}_6\end{Bmatrix}$$

Gambar 4.19 Pemisahan respons antara deformasi aksial dan transversal pada elemen rangka akibat asumsi perpindahan kecil.

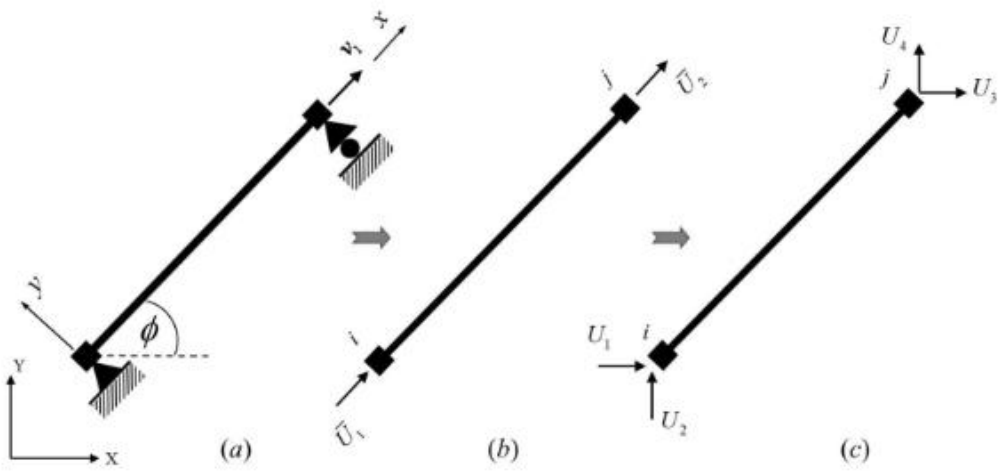


Gambar 4.20 Elemen rangka batang dalam sistem acuan lokal: (a) Sistem dasar; (b) Sistem lengkap.

Hal ini menghasilkan hubungan kompatibilitas geometris untuk elemen rangka batang terhadap sumbu acuan global sebagai berikut:

$$v_1 = [-\cos\phi \quad -\sin\phi \quad \cos\phi \quad \sin\phi]\begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_4\end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad v_1 = \mathbf{a}^{truss}\mathbf{U} \tag{4.77}$$

di mana $\mathbf{a}^{truss}$ adalah matriks kompatibilitas dari sistem rangka batang dasar dalam sumbu acuan global. Hubungan deformasi-perpindahan dari elemen rangka batang disajikan secara skematis pada Gambar 4.21.



Gambar 4.21 Elemen Rangka Batang dalam Sistem Acuan Global: (a) Sistem Dasar; (b) Sistem Lengkap dalam Sumbu Acuan Lokal; (c) Sistem Lengkap dalam Sumbu Acuan Global.

Contoh 4.2

Untuk struktur rangka batang pada Contoh 3.2, rumuskan persamaan matriks kompatibilitas yang menghubungkan derajat kebebasan global dengan deformasi elemen.

- **Penyelesaian**: Dengan menggunakan sistem penomoran dari Contoh 3.2 dan sistem penomoran deformasi elemen dasar pada Gambar 4.22, proses penyusunan persamaan kompatibilitas geometris untuk elemen 1 disajikan secara skematis pada Gambar 4.23.

Dari Sistem Dasar ke Sistem Acuan Lokal:

$$v_1^{(1)} = [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} \overline{U}_1^{(1)} \\ \overline{U}_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

Konektivitas elemen dan identifikasi deformasi:

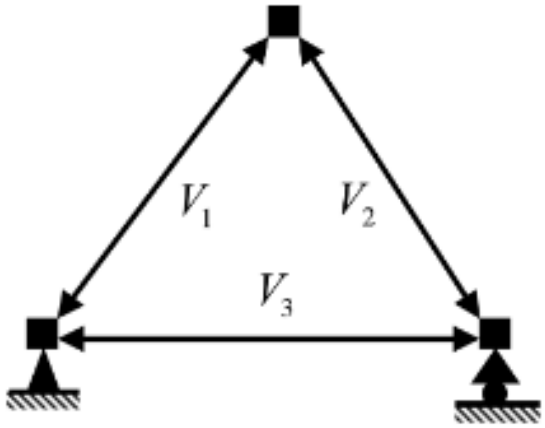
$$LM_1 = \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}_1 ; \quad \begin{Bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ U_4^{(1)} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \\ U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}; \quad \text{dan} \quad v_1^{(1)} = V_1$$

Dari Sistem Referensi Lokal ke Sistem Referensi Global:

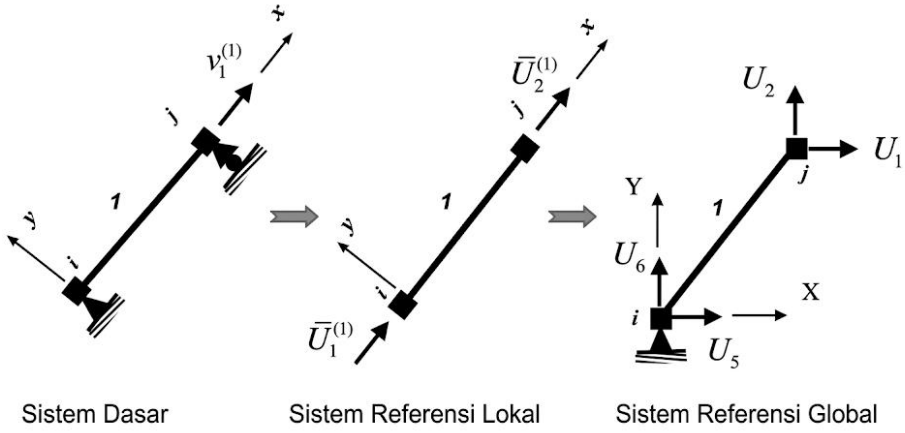
$$V_1 = [-0.6 \quad -0.8 \quad 0.6 \quad 0.8] \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \\ U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

Persamaan kompatibilitas matriks untuk elemen 1 ditempatkan ke dalam persamaan kompatibilitas matriks struktur sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & -0.6 & -0.8 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$



Gambar 4.22 Contoh 4.2.



Gambar 4.23 Contoh 4.2 (Lanjutan).

Dengan menerapkan prosedur yang sama pada batang 2 dan 3, diperoleh persamaan kompatibilitas matriks untuk keseluruhan rangka batang sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & -0.6 & -0.8 \\ -0.6 & 0.8 & 0.6 & -0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

atau dalam format ringkas sebagai:

$$\mathbf{V} = \mathbf{AU} \quad \text{atau} \quad \mathbf{V} = \left[\mathbf{A}_{free} : \mathbf{A}_{constr}\right] \left\{ \frac{\mathbf{U}_{free}}{\mathbf{U}_{constr}} \right\}$$

Matriks $\mathbf{A}$ adalah matriks kompatibilitas struktur yang menghubungkan deformasi elemen $\mathbf{V}$ dengan perpindahan buhul $\mathbf{U}$. Dapat diamati bahwa matriks kompatibilitas ini merupakan transpose dari matriks keseimbangan $\mathbf{B}$ pada struktur yang sama (Contoh 3.2).

Pada contoh ini, tidak ada penurunan tumpuan ($\mathbf{U}_{constr} = \mathbf{0}$). Oleh karena itu, persamaan kompatibilitas matriks direduksi menjadi:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{free} = \mathbf{A}_{free}\mathbf{U}_{free} \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

4.7 PERAKITAN OTOMATIS PERSAMAAN KOMPATIBILITAS

Pada bagian-bagian sebelumnya, persamaan kompatibilitas matriks dari suatu struktur telah disusun dengan cara berikut: deformasi dasar $\mathbf{v}$ dari setiap elemen pertama-tama dinyatakan dalam bentuk perpindahan ujung elemen lokal $\bar{\mathbf{U}}$, kemudian perpindahan ujung elemen lokal $\bar{\mathbf{U}}$ ditransformasikan ke perpindahan ujung elemen global $\mathbf{U}$ menggunakan matriks rotasi, dan akhirnya mempertimbangkan konektivitas seluruh elemen secara kolektif. Proses penyusunan persamaan kompatibilitas yang disebutkan di atas dapat menjadi sangat rumit pada sistem struktur yang besar.

Pada bagian ini, disajikan pendekatan sistematis untuk merakit persamaan kompatibilitas struktur. Sangatlah wajar untuk memperluas pendekatan ini ke perakitan persamaan kompatibilitas berbasis komputer. Untuk mendemonstrasikan pendekatan perakitan otomatis, struktur portal pada Contoh 4.1 ditinjau kembali. Dari sudut pandang setiap elemen, setiap perpindahan ujung pada derajat kebebasan elemen hanya berasosiasi dengan satu derajat kebebasan struktur. Korespondensi satu-ke-satu ini diwakili oleh vektor pemetaan sebagaimana dibahas pada Bab 1. Perlu diulangi bahwa vektor pemetaan untuk elemen 1, 2, dan 3 adalah:

$$\begin{Bmatrix}7\\8\\9\\1\\2\\3\end{Bmatrix}_{\text{struktur}} \rightarrow \begin{Bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{Bmatrix}_{\text{elemen 1}} \quad \begin{Bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{Bmatrix}_{\text{struktur}} \rightarrow \begin{Bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{Bmatrix}_{\text{elemen 2}} \quad \begin{Bmatrix}10\\11\\12\\4\\5\\6\end{Bmatrix}_{\text{struktur}} \rightarrow \begin{Bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{Bmatrix}_{\text{elemen 3}} \qquad (4.78)$$

Berdasarkan vektor pemetaan setiap anggota, matriks pemetaannya disusun sebagai berikut:
Anggota 1:

$$\begin{Bmatrix}U_1^{(1)}\\U_2^{(1)}\\U_3^{(1)}\\U_4^{(1)}\\U_5^{(1)}\\U_6^{(1)}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\\U_5\\U_6\\U_7\\U_8\\U_9\\U_{10}\\U_{11}\\U_{12}\end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{G}^{(1)}\mathbf{U} \qquad (4.79)$$

Anggota 2:

$$\begin{Bmatrix}U_1^{(2)}\\U_2^{(2)}\\U_3^{(2)}\\U_4^{(2)}\\U_5^{(2)}\\U_6^{(2)}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\\U_5\\U_6\\U_7\\U_8\\U_9\\U_{10}\\U_{11}\\U_{12}\end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{G}^{(2)}\mathbf{U} \qquad (4.80)$$

Anggota 3:

$$\begin{Bmatrix} U_1^{(3)} \\ U_2^{(3)} \\ U_3^{(3)} \\ U_4^{(3)} \\ U_5^{(3)} \\ U_6^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{U}^{(3)} = \mathbf{G}^{(3)}\mathbf{U} \quad (4.81)$$

Merujuk pada Persamaan (3/3.54), dapat diamati bahwa matriks pemetaan kompatibilitas $\mathbf{G}^{(i)}$ merupakan transpose dari matriks pemetaan keseimbangan $\mathbf{H}^{(i)}$ yang dibahas pada Bab 3.

$$\mathbf{G}^{(1)} = \mathbf{H}^{(1)^T}; \quad \mathbf{G}^{(2)} = \mathbf{H}^{(2)^T}; \quad \text{dan} \quad \mathbf{G}^{(3)} = \mathbf{H}^{(3)^T} \quad (4.82)$$

Dimana

$$\mathbf{H}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{dan} \quad \mathbf{H}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Berdasarkan persamaan kompatibilitas elemen (4.52), deformasi dasar elemen dinyatakan dalam bentuk perpindahan ujung elemen pada sistem acuan global sebagai berikut:

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{a}_B^{(1)}\mathbf{U}^{(1)}\text{:Elemen 1} \quad (4.84)$$

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{a}_B^{(2)}\mathbf{U}^{(2)}\text{:Elemen 2} \quad (4.85)$$

$$\mathbf{v}^{(3)} = \mathbf{a}_B^{(3)}\mathbf{U}^{(3)}\text{:Elemen 3} \quad (4.86)$$

Perlu dicatat bahwa relasi kompatibilitas ini mengekspresikan deformasi dasar elemen ($\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$, dan $\mathbf{v}^{(3)}$) dalam bentuk variabel elemen ($\mathbf{U}^{(1)}$, $\mathbf{U}^{(2)}$, dan $\mathbf{U}^{(3)}$). Untuk mengekspresikan deformasi dasar elemen dalam bentuk variabel struktur $\mathbf{U}$, kita mensubstitusikan Pers. (4.79), (4.80), dan (4.81) berturut-turut ke dalam Pers. (4.84), (4.85), dan (4.86). Hal ini menghasilkan ekspresi berikut:

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{a}_B^{(1)}\mathbf{G}^{(1)}\mathbf{U} \tag{4.87}$$

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{a}_B^{(2)}\mathbf{G}^{(2)}\mathbf{U} \tag{4.88}$$

$$\mathbf{v}^{(3)} = \mathbf{a}_B^{(3)}\mathbf{G}^{(3)}\mathbf{U} \tag{4.89}$$

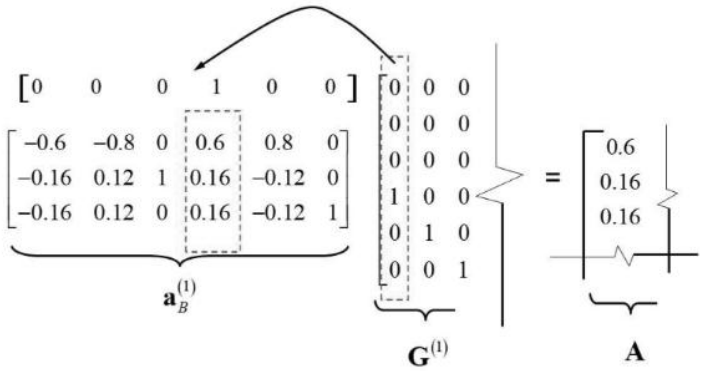
Hubungan kompatibilitas struktur diperoleh dengan mengumpulkan deformasi dasar dari seluruh elemen ke dalam satu vektor V sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{v}^{(1)}\\ \mathbf{v}^{(2)}\\ \mathbf{v}^{(3)}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_B^{(1)}\mathbf{G}^{(1)}\\ \mathbf{a}_B^{(2)}\mathbf{G}^{(2)}\\ \mathbf{a}_B^{(3)}\mathbf{G}^{(3)}\end{bmatrix}\mathbf{U} \quad \text{atau} \quad \mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{U} \tag{4.90}$$

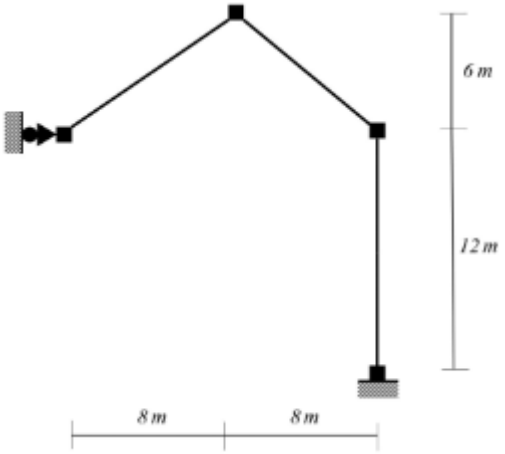
Karena matriks pemetaan kompatibilitas adalah matriks Boolean, tidak perlu mengeksekusi perkalian $\mathbf{a}_B\mathbf{G}$ secara eksplisit. Sebagai alternatif, suku-suku dalam matriks $\mathbf{a}_B$ dapat dimasukkan ke dalam matriks $\mathbf{A}$ mengikuti indeks kolom. Hal ini menjadi jelas dengan mengalikan matriks $\mathbf{a}_B^{(1)}$ dengan kolom pertama dari matriks $\mathbf{G}^{(1)}$. Perlu dicatat bahwa hasil dari operasi ini adalah bagian dari kolom pertama matriks $\mathbf{A}$. Hal ini menyiratkan bahwa kolom keempat dari matriks $\mathbf{a}_B^{(1)}$ akan mengisi kolom pertama dari matriks $\mathbf{A}$ seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.24. Kolom-kolom lainnya dari matriks $\mathbf{a}_B^{(1)}$ dipetakan ke dalam matriks $\mathbf{A}$ dengan cara yang serupa; kolom kelima dari matriks $\mathbf{a}_B^{(1)}$ ke kolom kedua dari matriks $\mathbf{A}$; kolom keenam dari matriks $\mathbf{a}_B^{(1)}$ ke kolom ketiga dari matriks $\mathbf{A}$, dan seterusnya. Setelah menerapkan proses pemetaan ini pada elemen 1, tiga baris pertama dari matriks $\mathbf{A}$ diperoleh. Selanjutnya, proses ini diulangi untuk sisa elemen lainnya. Jelas bahwa proses penetapan matriks kompatibilitas struktur yang disebutkan di atas sangat cocok untuk diimplementasikan pada komputer.

Contoh 4.3

Untuk struktur rangka pada Gambar 4.25, rumuskan hubungan kompatibilitas antara seluruh derajat kebebasan perpindahan dan deformasi dasar struktur.



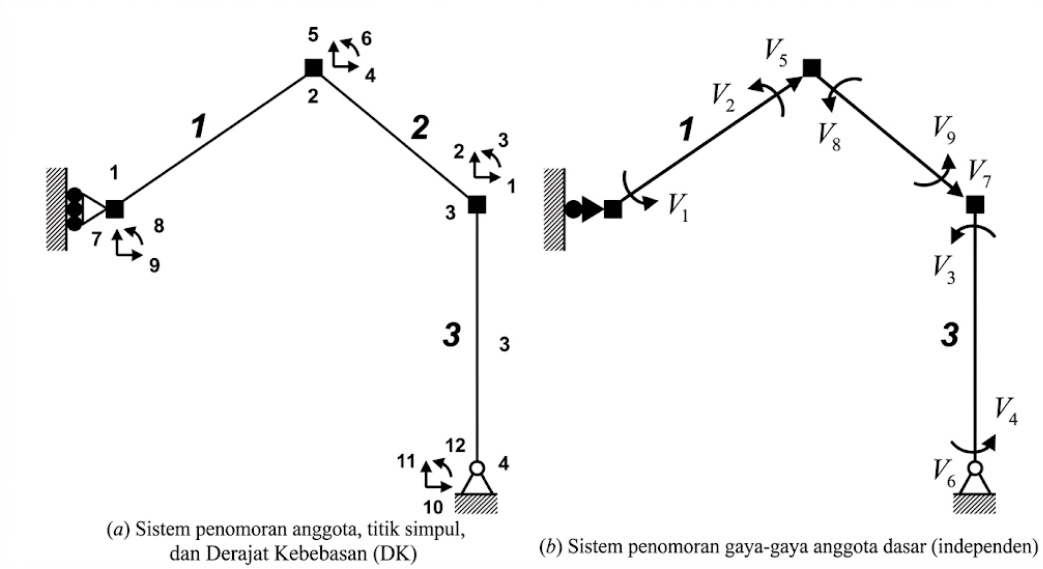
Gambar 4.24 Representasi skematis dari hasil kali $a(1)G(1)$.



Gambar 4.25 Contoh 4.3.

Penyelesaian: Sistem penomoran elemen, titik simpul, dan derajat kebebasan (DOF) ditunjukkan pada Gambar 4.26a: Berdasarkan sistem penomoran DOF tersebut, vektor pemetaan untuk setiap elemen adalah:

$$LM_1 = \begin{Bmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}_1 \quad ; \quad LM_2 = \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}_2 \quad ; \quad \text{dan} \quad LM_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{Bmatrix}_3$$



Gambar 4.26 Contoh 4.3 (Lanjutan).

Sistem penomoran deformasi dasar elemen ditunjukkan pada Gambar 4.26b. Perlu dicatat bahwa deformasi dasar elemen diberi nomor sedemikian rupa sehingga kendala ketidakmampuan untuk memanjang (*inextensible*) dan ketidakmampuan untuk melentur

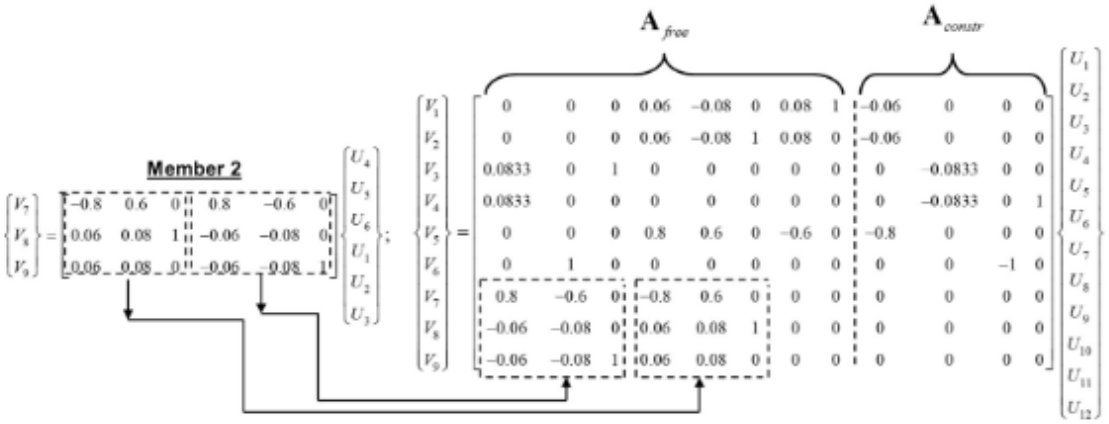
(*inflexible*) dapat diterapkan dengan mudah, sebagaimana akan ditunjukkan dalam Contoh 4.6. Hubungan kompatibilitas untuk setiap elemen adalah:

$$\begin{Bmatrix} V_5 \\ V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.6 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.06 & 0.08 & 1 & 0.06 & -0.08 & 0 \\ -0.06 & 0.08 & 0 & 0.06 & -0.08 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_9 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 & 0 & 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.06 & 0.08 & 1 & -0.06 & -0.08 & 0 \\ 0.06 & 0.08 & 0 & -0.06 & -0.08 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}; \text{ dan}$$

$$\begin{Bmatrix} V_6 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0.0833 & 0 & 1 & -0.0833 & 0 & 0 \\ 0.0833 & 0 & 0 & -0.0833 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{Bmatrix}.$$

Demonstrasi perakitan otomatis matriks kompatibilitas struktural disajikan pada Gambar 4.27.



Gambar 4.27 Contoh 4.3 (Lanjutan).

4.8 PENDEKATAN MASTER-SLAVE

Sejauh ini, kendala perpindahan yang diterapkan pada satu derajat kebebasan saja yang telah dibahas. Sebagai contoh,

- Kendala perpindahan akibat kondisi tumpuan rangka pada Gambar 4.12.

$$U_7 = 0; \quad U_8 = 0; \quad U_9 = 0; \quad U_{10} = 0; \quad U_{11} = 0; \quad \text{dan} \quad U_{12} = 0 \qquad (4.91)$$

- Perpindahan satuan yang diterapkan pada setiap derajat kebebasan bebas untuk memperoleh moda deformasi yang bersesuaian dengan setiap kolom matriks kompatibilitas struktural A (Contoh 4.1).

$$U_1 = 1.0; \quad \Longrightarrow \quad V_1 = 0.6; \quad V_2 = 0.16; \quad V_3 = 0.16; \quad V_4 = -1; \quad \text{dan} \quad V_5 = V_6 = V_7 = V_8 = V_9 = 0 \quad (4.92)$$

Hal ini dikenal sebagai “pembatasan kebebasan tunggal” dan dapat diterapkan dengan mudah. Lebih khusus lagi, kendala dalam Persamaan. (4.91) adalah batasan kebebasan tunggal yang homogen, sedangkan pada Persamaan. (4.92) adalah batasan kebebasan tunggal yang tidak homogen. Langkah maju selanjutnya dalam kecanggihan adalah apa yang disebut “kendala multi-kebebasan”. Kendala jenis ini melibatkan lebih dari satu derajat kebebasan independen. Batasan multi-kebebasan sering digunakan dalam analisis struktur rangka untuk memperhitungkan efek tumpuan miring, tidak dapat diperpanjang, tidak fleksibelnya anggota rangka, dll. Bentuk umum dari batasan multi-kebebasan dapat dinyatakan sebagai:

$$\Psi \text{ (Perpindahan Nodal)} = \text{Nilai yang Ditetapkan} \qquad (4.93)$$

Bentuk umum ini disebut sebagai kendala "titik-tunggal" (*single-point*) atau "simpul-tunggal" (*single-node*) jika semua perpindahan nodal dalam argumen fungsi berada pada simpul yang sama. Jika tidak, hal tersebut dikenal sebagai kendala "titik-banyak" (*multi-point*) atau "simpul-banyak" (*multi-node*). Kendala disebut homogen jika, setelah memindahkan semua suku yang bergantung pada perpindahan ke ruas kiri, suku "Nilai yang Ditetapkan" pada ruas kiri Pers. (4.93) lenyap. Jika tidak, kendala tersebut dikenal sebagai nonhomogen. Lebih lanjut, jika fungsi terkendala Ψ pada Pers. (4.93) bersifat linier terhadap perpindahan nodal, kendala tersebut disebut linier. Jika tidak, kendala tersebut dikenal sebagai nonlinier.

Contoh 4.4

Berikut ini adalah contoh-contoh kendala derajat kebebasan jamak (*multi-freedom constraints*):

1. $v + u \tan \alpha = 0$
2. $U_1 - U_6 = 0.2$
3. $(X_8 - X_3)(U_{16} - U_4) + (Y_8 - Y_3)(U_{17} - U_5) = 0$
4. $U_6 - U_3 = 0 \quad \text{dan} \quad (U_4 - U_1) + 4U_3 = 0$
5. $(X_8 + U_{16} - X_3 - U_4)^2 + (Y_{17} + U_5 - Y_3 - U_5)^2 = 0$

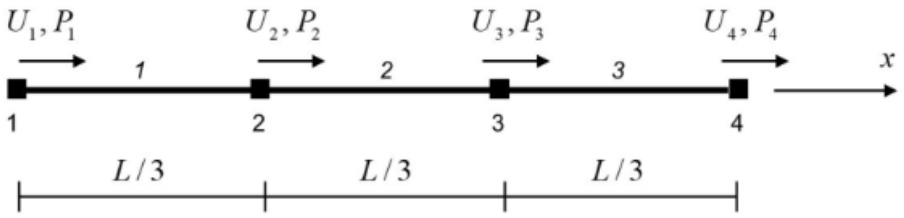
Yang pertama adalah kendala titik-tunggal, linier, dan homogen serta bersesuaian dengan kendala yang diberlakukan oleh tumpuan rol miring pada Gambar 1.6a. Yang kedua adalah kendala titik-banyak, linier, dan nonhomogen. Kendala ini menyiratkan bahwa celah antara U_1 dan U_6 adalah 0,2. Yang ketiga adalah kendala titik-banyak, linier, dan homogen. Kendala ini bersesuaian dengan sifat tidak dapat diregangkan dari elemen rangka di bawah asumsi perpindahan kecil dan akan dibahas pada bagian selanjutnya. Yang keempat adalah kendala titik-banyak, linier, dan homogen. Kendala-kendala ini bersesuaian dengan ketaktlenturan dari elemen rangka di bawah asumsi perpindahan kecil dan akan dibahas pada bagian selanjutnya.

Yang terakhir adalah kendala titik-banyak, nonlinier, dan homogen. Kendala ini bersesuaian dengan sifat tidak dapat diregangkan dari elemen rangka di bawah asumsi perpindahan besar. Jenis kendala seperti ini muncul dalam analisis struktur yang nonlinier secara geometri.

Secara umum, terdapat tiga pendekatan untuk menangani kendala multi-kebebasan (*multi-freedom constraints*), yaitu (Felippa 1998):

1. **Eliminasi Master-Slave**: Pendekatan ini adalah yang paling langsung. Semua derajat kebebasan perpindahan yang dinyatakan dalam setiap persamaan kendala dikategorikan sebagai Master dan Slave. Derajat kebebasan slave dieliminasi secara eksplisit dengan menyatakannya sebagai fungsi linier dari derajat kebebasan master. Akibatnya, persamaan yang dimodifikasi hanya berisi derajat kebebasan master.
2. **Augmentasi Penalti atau Fungsi Penalti**: Dalam pendekatan ini, setiap kendala multi-kebebasan direpresentasikan secara aproksimasi oleh perangkat penghubung elastis fiktif. Penghubung fiktif ini menghubungkan semua derajat kebebasan perpindahan yang muncul dalam persamaan kendala. Keakuratan kondisi terkendala dikendalikan oleh bobot numerik dari perangkat penghubung tersebut. Kondisi terkendala yang "eksak" diperoleh begitu bobot numerik mendekati tak hingga, menghasilkan perangkat penghubung yang kaku tak hingga.
3. **Adjungsi Pengali Lagrange**: Dalam pendekatan ini, setiap kendala multi-kebebasan direpresentasikan oleh variabel tak diketahui tambahan yang dimasukkan ke dalam persamaan matriks kekakuan. Variabel tak diketahui ini disebut *Pengali Lagrange* λ. Interpretasi fisik dari Pengali Lagrange adalah gaya terkendala yang menegakkan kondisi terkendala secara eksak jika diterapkan pada sistem yang tidak terkendala. Bukti yang ketat dari pendekatan ini dilakukan dengan kalkulus variasi (Felippa).

Kelebihan dan kekurangan dari ketiga pendekatan untuk menangani kendala derajat kebebasan jamak ini dapat ditemukan pada sumber lain (Felippa). Namun, dalam buku teks ini, hanya pendekatan *master-slave* yang dibahas karena kesederhanaan dan sifatnya yang lugas.



Gambar 4.28 Susunan Seri Elemen Rangka Batang.

Pendekatan Master-Slave

Dalam pendekatan *master-slave*, satu derajat kebebasan perpindahan dipilih sebagai *slave* untuk setiap kendala multi-kebebasan. Sisa derajat kebebasan perpindahan dalam kendala tersebut dinamakan *master*. Faktanya, *slave* dan *master* masing-masing menyiratkan ketergantungan dan kebebasan. Akibatnya, kumpulan perpindahan nodal yang baru $\tilde{\mathbf{U}}$

diperoleh dengan mengeliminasi semua derajat kebebasan perpindahan *slave* dari **U**. Persamaan transformasi matriks yang menghubungkan **U** dengan $\tilde{\mathbf{U}}$ dituliskan sebagai:

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}_c \tilde{\mathbf{U}} \tag{4.94}$$

di mana $\boldsymbol{A_c}$ adalah matriks transformasi yang memperhitungkan kendala derajat kebebasan jamak. Untuk mengilustrasikan konsep eliminasi *master-slave*, struktur rangka batang yang ditunjukkan pada Gambar 4.28 digunakan sebagai contoh. Rangka batang ini terdiri dari tiga batang yang dihubungkan oleh empat titik simpul yang hanya dapat bergerak translasi sepanjang sumbu-x. Terdapat empat derajat kebebasan perpindahan pada struktur ini, yaitu:

$$\mathbf{U} = \lfloor U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \rfloor^T \tag{4.95}$$

Gaya simpul yang terkait dengannya adalah:

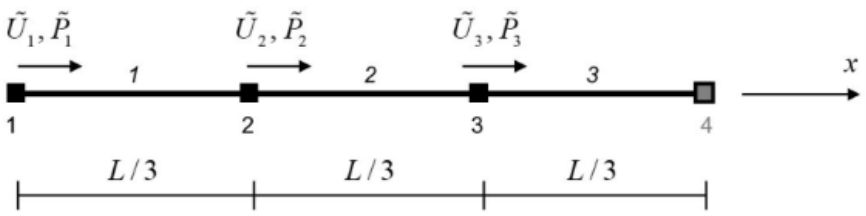
$$\mathbf{P} = \lfloor P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \rfloor^T \tag{4.96}$$

Tinjau rangka batang ini yang dikenai kendala derajat kebebasan majemuk yang menyatakan bahwa titik simpul 2 dan 4 mengalami translasi dengan besaran yang sama:

$$U_2 - U_4 = 0 \quad \rightarrow \quad U_4 = U_2 \tag{4.97}$$

Kondisi terkendala ini dapat divisualisasikan sebagai simpul 2 dan 4 yang dihubungkan oleh sebuah penghubung kaku (*rigid link*) karena keduanya dipaksa untuk bergerak bersama-sama. Dari Pers. (4.97), U_4 dan U_2 berturut-turut dipilih sebagai *slave* dan *master*. Akibatnya, kumpulan perpindahan nodal yang baru $\tilde{\mathbf{U}}$ adalah:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \left\lfloor \tilde{U}_1 \quad \tilde{U}_2 \quad \tilde{U}_3 \right\rfloor^T = \lfloor U_1 \quad U_2 \quad U_3 \rfloor^T \tag{4.98}$$



Gambar 4.29 Struktur yang direduksi akibat kendala derajat kebebasan jamak dari Pers. (4.97).

Persamaan transformasi matriks yang menghubungkan **U** dengan $\tilde{\mathrm{U}}$ dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{U} = \mathbf{A}_c \tilde{\mathbf{U}} \tag{4.99}$$

Kini, jumlah derajat kebebasan perpindahan berkurang menjadi 3 sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 4.29. Berdasarkan hubungan kontragradien antara sistem statis dan sistem kinematis, persamaan transformasi matriks yang menghubungkan $\tilde{\mathrm{P}}$ dengan $\mathbf{P}$ adalah:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \\ \tilde{P}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{A}_c^T \mathbf{P} = \mathbf{B}_c \mathbf{P} \tag{4.100}$$

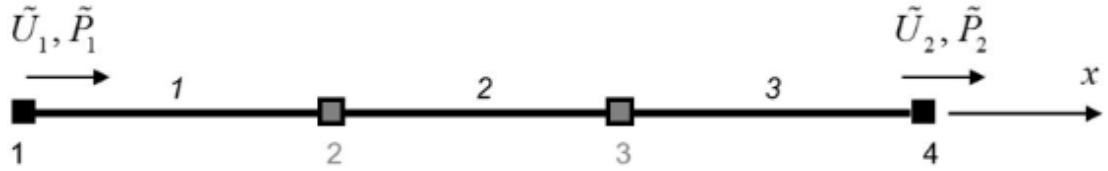
Tinjau rangka batang pada Gambar 4.28 yang dikenai kendala derajat kebebasan majemuk berikut:

$$U_2 = \frac{2}{3} U_1 + \frac{1}{3} U_4 \tag{4.101}$$

$$U_3 = \frac{1}{3} U_1 + \frac{2}{3} U_4 \tag{4.102}$$

Kondisi terkendala ini dapat divisualisasikan sebagai semua simpul struktur yang dipaksa untuk bergeser secara linier. Dari Pers. (4.101), U_2 dipilih sebagai *slave* sementara U_1 dan U_4 dipilih sebagai *master*. Demikian pula, dari Pers. (4.102), U_3 dipilih sebagai *slave* sementara U_1 dan U_4 dipilih sebagai *master*. Akibatnya, kumpulan perpindahan nodal yang baru $\tilde{\mathbf{U}}$ adalah:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 & \tilde{U}_2 \end{bmatrix}^T = \lfloor U_1 \quad U_4 \rfloor^T \tag{4.103}$$



Gambar 4.30 Struktur yang direduksi akibat kendala derajat kebebasan jamak dari Persamaan (4.101) dan (4.102).

Persamaan transformasi matriks yang menghubungkan $\mathbf{U}$ dengan $\tilde{\mathrm{U}}$ dituliskan sebagai berikut:

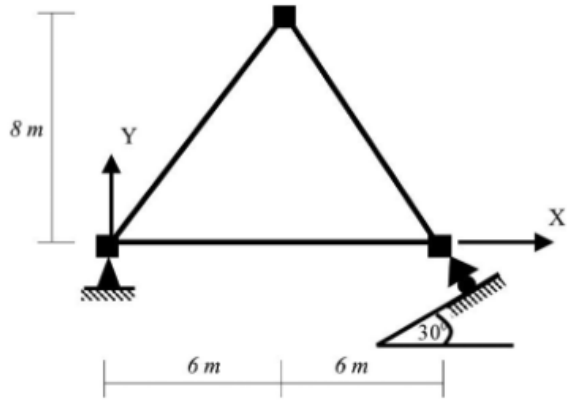
$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{U} = \mathbf{A}_c \tilde{\mathbf{U}} \tag{4.104}$$

Sekarang, jumlah derajat kebebasan perpindahan direduksi menjadi 2 seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.30. Dari hubungan kontragradien antara sistem statika dan kinematika, persamaan transformasi matriks yang menghubungkan $\tilde{\mathbf{P}}$ dengan $\mathbf{P}$ adalah:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{A}_c^T \mathbf{P} = \mathbf{B}_c \mathbf{P} \tag{4.105}$$

Contoh 4.5

Struktur rangka batang pada Contoh 4.2 dikenai tumpuan rol miring seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.31. Anda diminta untuk menyusun persamaan kompatibilitas matriks yang memperhitungkan kendala akibat tumpuan rol miring tersebut.



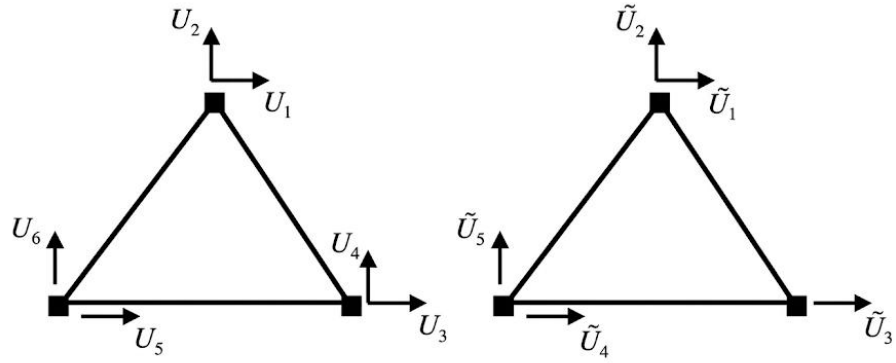
Gambar 4.31 Contoh 4.5.

Penyelesaian: Sistem penomoran derajat kebebasan (DOF) tanpa kendala ditunjukkan pada Gambar 4.32a. Kendala akibat tumpuan rol miring tersebut adalah:

$$U_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} U_3$$

Dengan memilih U_4 sebagai *slave* dan U_3 sebagai *master*, sistem penomoran derajat kebebasan (*DOFs*) yang terkendala ditunjukkan pada Gambar 4.32b. Persamaan transformasi matriks yang menghubungkan $\mathbf{U}$ (Gambar 4.32a) dengan $\tilde{\mathbf{U}}$ (Gambar 4.32b) dituliskan sebagai:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \\ \tilde{U}_4 \\ \tilde{U}_5 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{U} = \mathbf{A}_c\tilde{\mathbf{U}} \qquad (a)$$



(a) Derajat Kebebasan Tak Terkendala (b) Derajat Kebebasan Terkendala

Gambar 4.32 Contoh 4.5 (Lanjutan).

Berdasarkan Contoh 4.2, diingat kembali bahwa persamaan kompatibilitas struktural tanpa adanya kondisi kendala adalah:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & -0.6 & -0.8 \\ -0.6 & 0.8 & 0.6 & -0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{V} = \mathbf{AU} \qquad (b)$$

Substitusi Persamaan (a) ke dalam (b) menghasilkan persamaan kompatibilitas matriks untuk struktur rangka batang dengan tumpuan rol miring:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & -0.6 & -0.8 \\ -0.6 & 0.8 & 0.1381 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \\ \tilde{U}_4 \\ \tilde{U}_5 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{V} = \mathbf{AA}_c\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{U}}$$

Ketentuan dukungannya adalah:

$$\tilde{U}_4 = 0 \quad \text{dan} \quad \tilde{U}_5 = 0$$

Oleh karena itu, persamaan kompatibilitas matriks disederhanakan menjadi:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0.1381 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{V}_{\text{free}} = \tilde{\mathbf{A}}_{\text{free}} \tilde{\mathbf{U}}$$

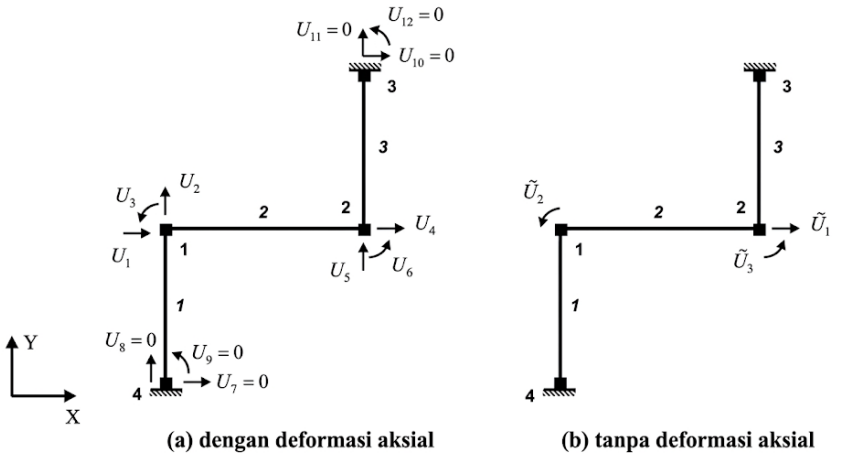
4.9 KENDALA KETIDAKMAMPUAN MEMANJANG DAN KETIDAKLENTURAN

Tanpa adanya kendala, relatif mudah untuk menentukan jumlah derajat kebebasan independen dari suatu struktur rangka. Hal ini mungkin tidak berlaku jika terdapat kendala di antara derajat kebebasan perpindahan yang independen. Dalam analisis struktur rangka, kendala umum yang diterapkan pada model rangka dapat timbul akibat:

- Kondisi tumpuan miring
- Sifat tidak dapat memanjang (*inextensibility*) dari elemen struktur
- Sifat tidak lentur (*inflexibility*) dari elemen struktur
- Diafragma lantai kaku pada model struktur 3D
- Zona ujung kaku (*rigid-end zones*)

Pada bagian sebelumnya, telah dibahas masalah kendala akibat kondisi tumpuan miring menggunakan pendekatan *master-slave*. Pada bagian ini, dibahas pendekatan *master-slave* untuk kendala derajat kebebasan jamak yang berkaitan dengan sifat tidak dapat memanjang dan tidak lentur dari elemen struktur. Kondisi kendala akibat zona ujung kaku akan dibahas pada bab selanjutnya. Dalam analisis struktur rangka pada umumnya, jumlah derajat kebebasan independen dapat dikurangi dengan mengasumsikan bahwa kekakuan aksial elemen rangka relatif besar dibandingkan dengan kekakuan lenturnya.

Akibatnya, elemen rangka dapat dianggap kaku secara aksial, sehingga deformasi aksialnya diabaikan. Secara umum, setiap elemen yang kaku secara aksial memberikan satu kendala independen di antara derajat kebebasan perpindahan. Dengan kata lain, jumlah derajat kebebasan struktural independen berkurang sebanyak jumlah elemen yang tidak dapat memanjang (*inextensible*) yang terdapat dalam model struktur tersebut. Untuk memahami konsep kendala ketidakmampuan memanjang, tinjaulah rangka persegi panjang pada Gambar 4.33. Terdapat enam derajat kebebasan perpindahan independen (Gambar 4.33a) jika deformasi aksial diperhitungkan. Jika semua elemen rangka dianggap tidak dapat memanjang, maka kendala-kendala berikut akan diterapkan:



Gambar 4.33 Derajat Kebebasan Perpindahan untuk Rangka Persegi Panjang: (a) dengan Deformasi Aksial; (b) tanpa Deformasi Aksial.

$$U_2 - \underbrace{U_8}_{0} = 0 \quad \rightarrow \quad U_2 = U_8 = 0 \tag{4.106}$$

$$U_5 - \underbrace{U_{11}}_{0} = 0 \quad \rightarrow \quad U_5 = U_{11} = 0 \tag{4.107}$$

$$U_4 - U_1 = 0 \quad \rightarrow \quad U_1 = U_4 \tag{4.108}$$

Dicatat bahwa tidak ada derajat kebebasan *master* pada Pers. (4.106) dan (4.107). Dari Pers. (4.108), U_1 dipilih sebagai *slave* sementara U_4 dipilih sebagai *master*. Akibatnya, kumpulan perpindahan nodal yang baru $\tilde{\mathbf{U}}$ didefinisikan sebagai:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 & \tilde{U}_2 & \tilde{U}_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} U_4 & U_3 & U_6 \end{bmatrix}^T \tag{4.109}$$

Oleh karena itu, jumlah derajat kebebasan perpindahan direduksi menjadi $6 - 3 = 3$ seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.33b. Persamaan transformasi matriks yang menghubungkan $\mathbf{U}$ dengan $\tilde{\mathbf{U}}$ dituliskan sebagai:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{U} = \mathbf{A}_c \tilde{\mathbf{U}} \tag{4.110}$$

Dari hubungan kontragradien antara sistem statika dan kinematika, persamaan transformasi matriks yang menghubungkan gaya nodal $\tilde{\mathbf{P}}$ dengan gaya nodal $\mathbf{P}$ adalah:

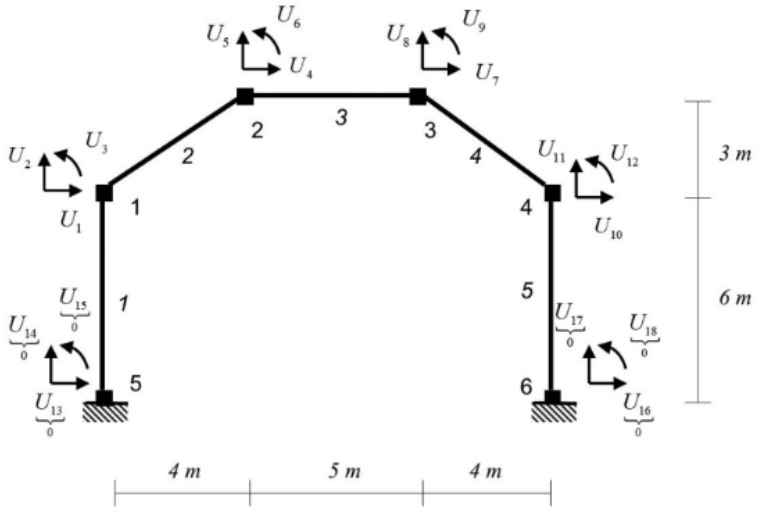
$$\begin{Bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \\ \tilde{P}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{B}_c \mathbf{P} \tag{4.111}$$

Hubungan pertama dari Pers. (4.111) dituliskan secara eksplisit sebagai:

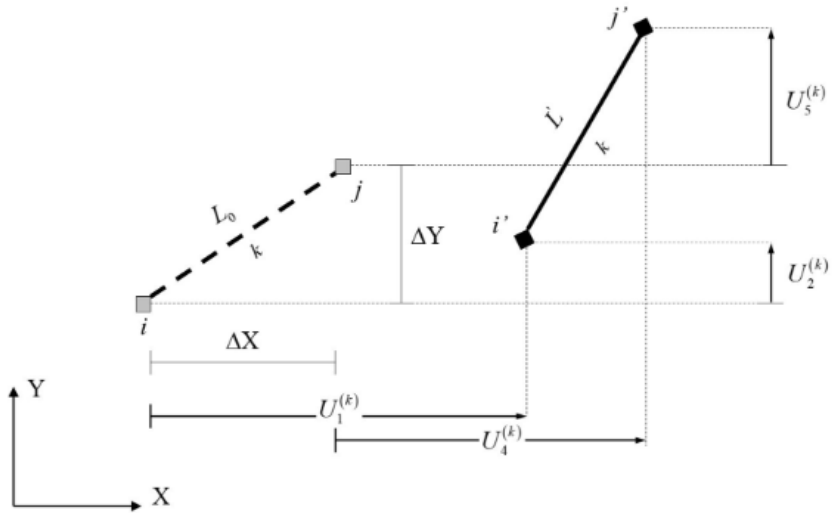
$$\tilde{P}_1 = P_1 + P_4 \tag{4.112}$$

Persamaan (4.112) menyiratkan bahwa persamaan kesetimbangan di sepanjang sumbu referensi X dari simpul 1 dan 2 tidak dapat ditinjau secara independen. Hal ini berkaitan dengan kendala tak-ekstensible (*inextensible*) yang dikenakan pada elemen 2, yang memaksanya untuk bergeser sebagai benda kaku di sepanjang sumbu referensi X.

Cukup mudah untuk menerapkan kendala tak-ekstensible pada struktur rangka di Gambar 4.33. Hal ini didasarkan pada fakta bahwa semua elemen penyusunnya berorientasi di sepanjang sumbu referensi global X atau Y. Untuk rangka yang memiliki elemen miring, kondisi ini mungkin tidak berlaku. Struktur rangka yang ditunjukkan pada Gambar 4.34 menjadi fokus perhatian. Dengan adanya deformasi aksial, terdapat 12 derajat kebebasan bebas yang independen: 8 translasi dan 4 rotasi. Dengan asumsi bahwa semua rangka bersifat tak-ekstensible, terdapat lima kendala independen, masing-masing dari setiap elemen tak-ekstensible. Akibatnya, tanpa deformasi aksial, jumlah derajat kebebasan bebas yang independen direduksi menjadi $12 - 5 = 7$. Seperti yang telah disebutkan, relatif mudah untuk menerapkan. Sebagaimana telah disebutkan, penerapan kendala ketidakmampuan untuk memanjang pada elemen-elemen (elemen 1, 3, dan 5) yang berorientasi sejajar dengan sumbu acuan global X atau Y relatif mudah dilakukan. Namun, untuk elemen miring (elemen 2 dan 4), diperlukan upaya lebih lanjut.



Gambar 4.34 Rangka dengan Elemen Miring yang Memperhitungkan Deformasi Aksial.



Gambar 4.35 Deskripsi Kinematis dari Elemen Rangka Umum k.

Untuk menurunkan ekspresi umum dari kendala tak-ekstensible (*inextensible*) untuk elemen rangka (horizontal, vertikal, atau miring), elemen 2 dari rangka pada Gambar 4.34 diambil sebagai rangka generik yang ditunjukkan pada Gambar 4.35. Panjang tak terdeformasi L_0 dan panjang terdeformasi L dari rangka generik k pada Gambar 4.35 didefinisikan sebagai:

$$L_0 = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2} \tag{4.113}$$

$$L' = \sqrt{\left(\Delta X + U_4^{(k)} - U_1^{(k)}\right)^2 + \left(\Delta Y + U_5^{(k)} - U_2^{(k)}\right)^2} \tag{4.114}$$

Karena rangka dianggap tidak dapat bertambah panjang (*tak-ekstensible*), panjangnya diasumsikan tetap konstan di bawah perpindahan ujung elemen $\mathbf{U}^{(k)}$. Oleh karena itu, kendala tak-ekstensible dapat didefinisikan sebagai:

$$L' = \sqrt{\left(\Delta X + U_4^{(k)} - U_1^{(k)}\right)^2 + \left(\Delta Y + U_5^{(k)} - U_2^{(k)}\right)^2} = L_0 = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2} \tag{4.115}$$

Persamaan (4.115) disederhanakan menjadi:

$$\sqrt{1 + 2\left(\frac{\Delta X}{L_0}\right)\left(\frac{U_4^{(k)} - U_1^{(k)}}{L_0}\right) + \left(\frac{U_4^{(k)} - U_1^{(k)}}{L_0}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta Y}{L_0}\right)\left(\frac{U_5^{(k)} - U_2^{(k)}}{L_0}\right) + \left(\frac{U_5^{(k)} - U_2^{(k)}}{L_0}\right)^2} = 1 \tag{4.116}$$

Persamaan (4.116) merepresentasikan kendala ketidakmampuan untuk memanjang (*inextensible constraint*) yang "eksak" bagi elemen rangka. Kendala nonlinear yang melibatkan banyak derajat kebebasan ini disebut "eksak" karena kinematika rangka direpresentasikan

tanpa adanya aproksimasi. Oleh karena itu, kendala ini dapat diterapkan pada masalah perpindahan besar. Namun, hal tersebut berada di luar cakupan buku teks ini karena pembahasan hanya difokuskan pada kendala ketidakmampuan untuk memanjang yang telah dilinearisasi untuk elemen rangka. Hal ini dapat dicapai dengan menjabarkan ekspresi di bawah tanda akar pada Persamaan (4.116) ke dalam deret pangkat dan mengabaikan semua suku nonlinear, sehingga menghasilkan:

$$\Delta X\left(U_4^{(k)} - U_1^{(k)}\right) + \Delta Y\left(U_5^{(k)} - U_2^{(k)}\right) = 0 \tag{4.117}$$

Persamaan (4.117) merepresentasikan kendala derajat kebebasan jamak yang telah dilinearisasi akibat sifat tak-dapat-mulur (inextensibility) dari elemen rangka. Perlu dicatat bahwa kendala tak-dapat-mulur ini hanya memengaruhi derajat kebebasan translasi. Selanjutnya, berdasarkan Persamaan (4.117), kendala tak-dapat-mulur yang diterapkan pada struktur rangka Gambar 4.34 dinyatakan sebagai berikut:

- **Member 1:**
$$6\left(U_2 - \underbrace{U_{14}}_{0}\right) = 0 \Longrightarrow U_2 = 0 \tag{4.118}$$

- **Member 5:**
$$6\left(U_{11} - \underbrace{U_{17}}_{0}\right) = 0 \Longrightarrow U_{11} = 0 \tag{4.119}$$

- **Member 2:**
$$4(U_4 - U_1) + 3\left(U_5 - \underbrace{U_2}_{0}\right) = 0 \Longrightarrow U_5 = \tfrac{4}{3}U_1 - \tfrac{4}{3}U_4 \tag{4.120}$$

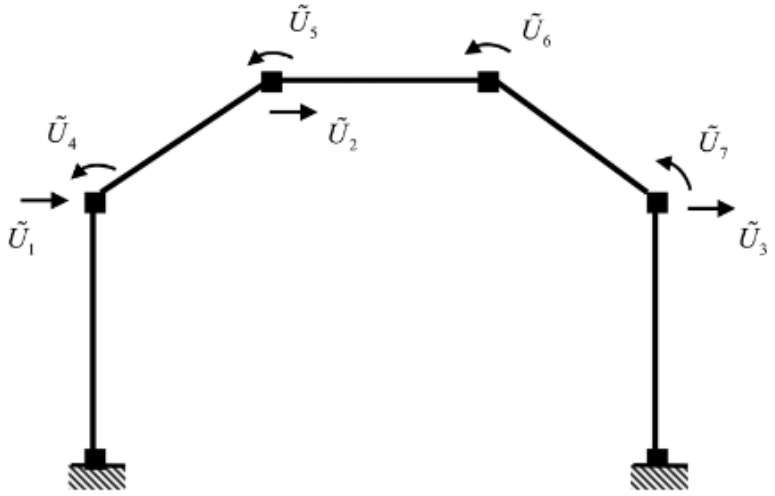
- **Member 3:**
$$5(U_7 - U_4) + (0)(U_8 - U_5) = 0 \Longrightarrow U_7 = U_4 \tag{4.121}$$

- **Member 4:**
$$4(U_{10} - U_7) + (-3)\left(\underbrace{U_{11}}_{0} - U_8\right) = 0 \Longrightarrow U_8 = \tfrac{4}{3}U_7 - \tfrac{4}{3}U_{10}$$
$$\Longrightarrow U_8 = \frac{4}{3}U_4 - \frac{4}{3}U_{10} \tag{4.122}$$

Dicatat bahwa tidak ada derajat kebebasan *master* pada Pers. (4.118) dan (4.119). Dari Pers. (4.120), (4.121), dan (4.122), U_1, U_4, dan U_{10} dipilih sebagai *master* sedangkan U_5, U_7, dan U_8 dipilih sebagai *slave*. Akibatnya, kumpulan perpindahan nodal bebas independen yang baru $\tilde{\mathbf{U}}$ didefinisikan sebagai:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix}\tilde{U}_1 & \tilde{U}_2 & \tilde{U}_3 & \tilde{U}_4 & \tilde{U}_5 & \tilde{U}_6 & \tilde{U}_7\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}U_1 & U_4 & U_{10} & U_3 & U_6 & U_9 & U_{12}\end{bmatrix}^T \tag{4.123}$$

dan ditunjukkan pada Gambar 4.36.

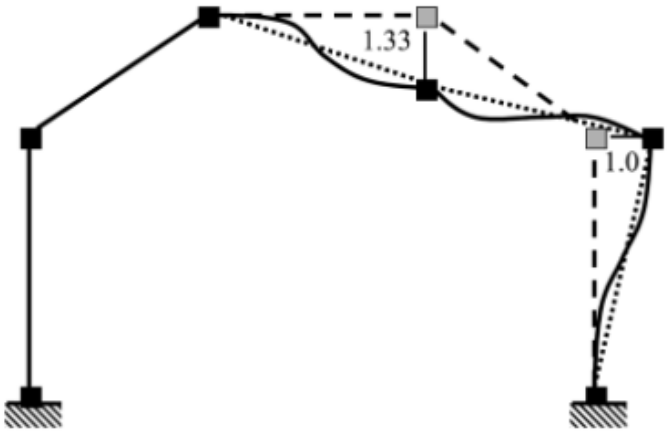


Gambar 4.36 Rangka dengan elemen miring tanpa memperhitungkan deformasi aksial.

Persamaan transformasi matriks yang menghubungkan $\mathbf{U}$ dengan $\tilde{\mathbf{U}}$ dituliskan sebagai:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \\ \tilde{U}_4 \\ \tilde{U}_5 \\ \tilde{U}_6 \\ \tilde{U}_7 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{U} = \mathbf{A}_c\tilde{\mathbf{U}} \qquad (4.124)$$

Dicatat bahwa setiap kolom dari matriks kendala $\mathbf{A}_c$ merepresentasikan bentuk terdefleksi dari rangka yang bersesuaian dengan kebebasan perpindahan *master* satuan yang dikenakan. Sebagai contoh, bentuk terdefleksi dari rangka yang diasosiasikan dengan kebebasan perpindahan *master* satuan yang dikenakan $\tilde{U}_3 = 1.0$ ditunjukkan pada Gambar 4.37. Lebih lanjut, jelas dari ketiga kendala linier pada Pers. (4.120), (4.121), dan (4.122) bahwa pilihan kebebasan *master* tidaklah unik. Pilihan alternatif dari kebebasan *master* tersebut ada dan ditunjukkan pada Gambar 4.38.



Gambar 4.37 Bentuk Terdefleksi Rangka akibat Kebebasan Perpindahan *Master* Satuan $\tilde{U}_3 = 1.0$.

Kondisi kendala menarik lainnya muncul akibat adanya elemen rangka kaku dalam model struktural. Elemen rangka yang dianggap kaku adalah elemen yang memiliki kekakuan aksial (*EA*) dan lentur (*IE*) yang sangat tinggi dibandingkan dengan elemen lain dalam model tersebut. Kendala-kendala ini melibatkan derajat kebebasan translasi maupun rotasi dan dapat diturunkan dengan meninjau deskripsi kinematik elemen rangka kaku yang diperlihatkan pada Gambar 4.39. Kendala akibat rangka kaku tersebut adalah:

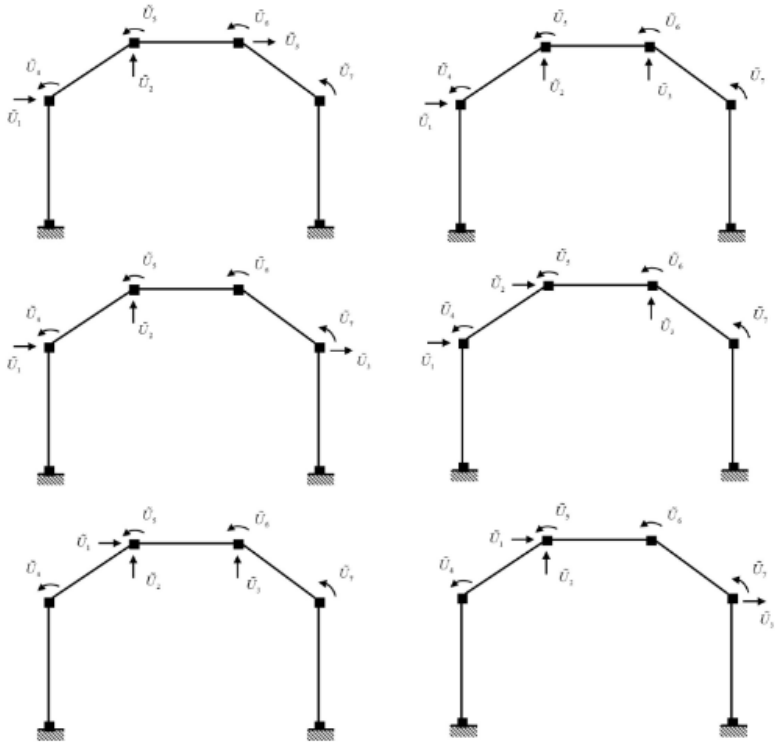
$$\begin{aligned} U_4^{(k)} - U_1^{(k)} &= -\left(L_k \cos\phi - L_k \cos\left(\phi + U_3^{(k)}\right)\right) \\ U_5^{(k)} - U_2^{(k)} &= \left(-L_k \sin\phi + L_k \sin\left(\phi + U_3^{(k)}\right)\right) \\ U_6^{(k)} &= U_3^{(k)} \end{aligned} \tag{4.125}$$

Persamaan (4.125) merepresentasikan kendala "eksak" untuk elemen rangka kaku. Kendala nonlinear dengan derajat kebebasan jamak ini disebut "eksak" karena kinematika rangka direpresentasikan tanpa adanya aproksimasi. Oleh karena itu, kendala ini dapat diterapkan pada masalah perpindahan besar. Namun, hal tersebut berada di luar cakupan buku teks ini karena pembahasan hanya difokuskan pada kendala yang telah dilinearisasi untuk elemen rangka kaku. Hal ini dapat dicapai dengan menguraikan semua fungsi trigonometri dalam Persamaan (4.125) dan menggunakan linearisasi berikut:

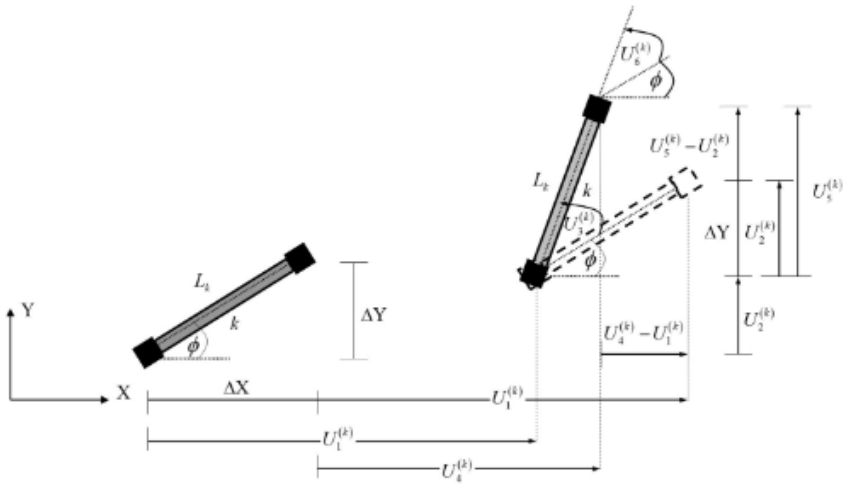
$$\cos U_3^{(k)} \approx 1 \quad \text{dan} \quad \sin U_3^{(k)} \approx U_3^{(k)} \tag{4.126}$$

Dengan menyubstitusikan Pers. (4.126) ke dalam (4.125), diperoleh:

$$U_4^{(k)} - U_1^{(k)} = -(L_k \sin\phi) U_3^{(k)}; \quad U_5^{(k)} - U_2^{(k)} = (L_k \cos\phi) U_3^{(k)}; \quad \text{dan} \quad U_6^{(k)} = U_3^{(k)} \tag{4.127}$$



Gambar 4.38 Pilihan Alternatif Derajat Kebebasan Utama.



Gambar 4.39 Deskripsi Kinematis Elemen Rangka Kaku.

Berikut adalah tiga kendala linear yang melibatkan banyak derajat kebebasan perpindahan pada elemen rangka kaku. Secara umum, setiap elemen rangka kaku memberikan tiga kendala independen di antara enam derajat kebebasan perpindahan. Akibatnya, setiap elemen rangka kaku dalam model struktural mengurangi jumlah derajat kebebasan struktur tersebut sebanyak tiga. Perlu dicatat bahwa kendala ketidakmampuan untuk memanjang (*inextensible constraint*) pada Persamaan (4.117) dapat diturunkan dengan menggabungkan kendala pertama dan kedua dari Persamaan (4.127) sebagai berikut:

$$\frac{\left(U_4^{(k)} - U_1^{(k)}\right)}{\left(U_5^{(k)} - U_2^{(k)}\right)} = -\frac{\Delta Y}{\Delta X} \Longrightarrow \Delta X\left(U_4^{(k)} - U_1^{(k)}\right) + \Delta Y\left(U_5^{(k)} - U_2^{(k)}\right) = 0 \qquad (4.128)$$

Dimana

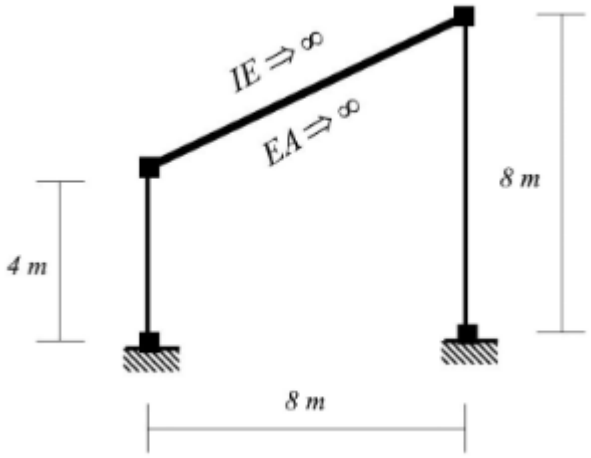
$$\frac{\Delta X}{L_k} = \cos\phi \quad \text{dan} \quad \frac{\Delta Y}{L_k} = \sin\phi \qquad (4.129)$$

Sebuah rangka satu tingkat dengan atap kaku miring yang ditunjukkan pada Gambar 4.40 ditinjau. Tanpa adanya kendala derajat kebebasan jamak, terdapat enam derajat kebebasan sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 4.41a. Kondisi kendala akibat atap kaku miring tersebut adalah:

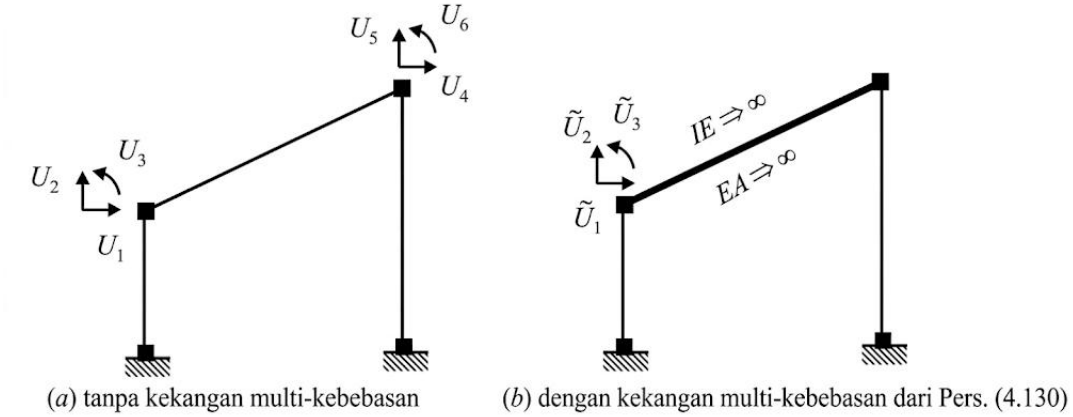
$$U_4 = U_1 - 4U_3; \quad U_5 = U_2 + 8U_3; \quad \text{dan} \quad U_6 = U_3 \qquad (4.130)$$

U_1, U_2, dan U_3 dipilih sebagai *master* sedangkan U_4, U_5, dan U_6 dipilih sebagai *slave*. Akibatnya, kumpulan perpindahan nodal bebas independen yang baru $\tilde{\mathbf{U}}$ didefinisikan sebagai:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix}\tilde{U}_1 & \tilde{U}_2 & \tilde{U}_3\end{bmatrix}^T = \lfloor U_1 \quad U_2 \quad U_3 \rfloor^T \qquad (4.131)$$



Gambar 4.40 Portal Satu Lantai dengan Atap Kaku Miring.



(*a*) tanpa kekangan multi-kebebasan (*b*) dengan kekangan multi-kebebasan dari Pers. (4.130)

Gambar 4.41 Sistem Derajat Kebebasan: dengan dan tanpa kendala multi-kebebasan.

dan ditunjukkan pada Gambar 4.41b. Persamaan transformasi matriks yang menghubungkan **U** dengan $\tilde{\mathbf{U}}$ dituliskan sebagai:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{U} = \mathbf{A}_c \tilde{\mathbf{U}} \tag{4.132}$$

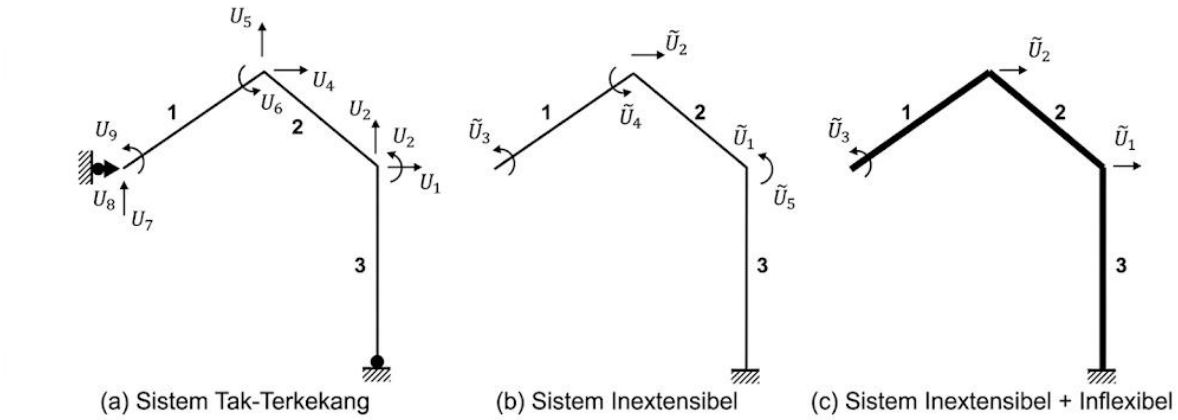
Berdasarkan hubungan kontragradien antara sistem statis dan sistem kinematis, persamaan transformasi matriks yang menghubungkan gaya-gaya nodal $\tilde{\mathbf{P}}$ dengan gaya-gaya nodal **P** adalah:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \\ \tilde{P}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{A}_c^T \mathbf{P} = \mathbf{B}_c \mathbf{P} \tag{4.133}$$

Secara eksplisit,

$$\tilde{P}_1 = P_1 + P_4; \quad \tilde{P}_2 = P_2 + P_5; \quad \text{dan} \quad \tilde{P}_3 = P_3 - 4P_4 + 8P_5 + P_6 \tag{4.134}$$

Sangat menarik untuk diamati dari Pers. (4.134) bahwa gaya-gaya nodal $\tilde{\mathbf{P}}$ hanyalah gaya ekuivalen dari gaya-gaya nodal **P** yang dikenai kendala statis. Akibatnya, matriks $\mathbf{B}_c$ dikenal sebagai "matriks kendala statis".



Gambar 4.42 Contoh 4.6.

Contoh 4.6

Untuk struktur rangka pada Contoh 4.3 yang ditunjukkan pada Gambar 4.42a, Anda diminta untuk menyusun hubungan kompatibilitas geometris antara deformasi elemen dasar $\mathbf{V}_{free}$ dan derajat kebebasan perpindahan bebas independen pada kondisi berikut.

a) Semua elemen bersifat tak-dapat-diperpanjang (Gambar 4.42b).
b) Elemen 1 dan 3 bersifat tak-dapat-diperpanjang, sedangkan elemen 2 dianggap sebagai elemen kaku (Gambar 4.42c).

Penyelesaian: Berdasarkan Contoh 4.3, persamaan kompatibilitas matriks yang terkait dengan derajat kebebasan perpindahan bebas adalah:

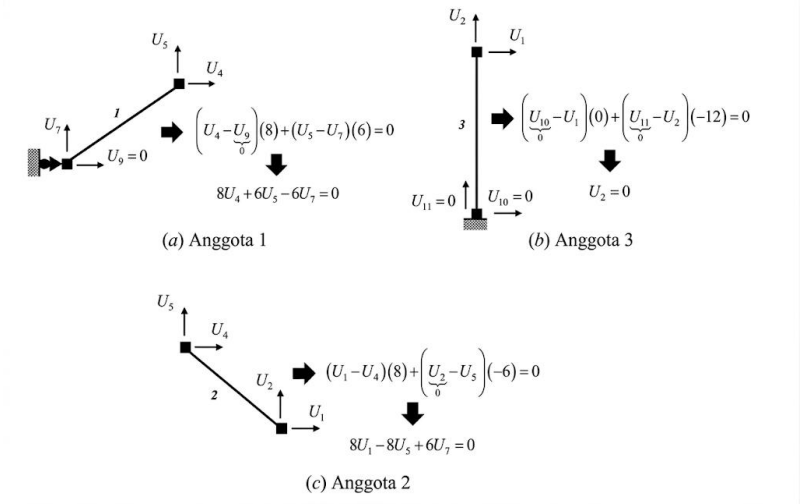
$$\mathrm{V}_{free} = \mathrm{A}_{free}\mathrm{U}_{free} \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.06 & -0.08 & 0 & 0.08 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.06 & -0.08 & 1 & 0.08 & 0 \\ 0.0833 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0833 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 & -0.6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & -0.6 & 0 & -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ -0.06 & -0.08 & 0 & 0.06 & 0.08 & 1 & 0 & 0 \\ -0.06 & -0.08 & 1 & 0.06 & 0.08 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{Bmatrix} \qquad (a)$$

Kondisi (a): Semua batang bersifat tak-dapat-mulur

Kendala tak regang (*inextensible constraint*) untuk setiap elemen dipertimbangkan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.43: Berdasarkan kondisi kendala tak regang dari elemen 1, 2, dan 3, U_1, U_4, U_8, U_6, dan U_3 dipilih sebagai kebebasan *master*:

$$U_1 \Rightarrow \tilde{U}_1; \quad U_4 \Rightarrow \tilde{U}_2; \quad U_8 \Rightarrow \tilde{U}_3; \quad U_6 \Rightarrow \tilde{U}_4; \quad \text{dan} \quad U_3 \Rightarrow \tilde{U}_5$$

dan U_2, U_5, dan U_7 sebagai kebebasan *slave*. Sistem penomoran DOF terkendala yang dihasilkan ditunjukkan pada Gambar 4.42b.



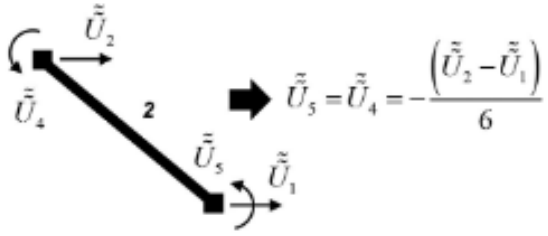
Gambar 4.43 Contoh 4.6 (Lanjutan).

Hubungan kinematik yang bersesuaian dengan kendala tak-dapat-mulur dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{U}_{free} = \mathbf{A}_c\tilde{\mathbf{U}} \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4/3 & 4/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4/3 & 8/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \\ \tilde{U}_4 \\ \tilde{U}_5 \end{Bmatrix} \qquad (b)$$

Mensubstitusikan hubungan kinematik Persamaan (b) ke dalam hubungan kompatibilitas Persamaan (a) menghasilkan:

$$\mathbf{V}_{free} = \mathbf{A}_{free}\mathbf{A}_C\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{A}}_{free}\tilde{\mathbf{U}} \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.167 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.167 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0833 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0833 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.167 & 0.167 & 0 & 1 & 0 \\ -0.167 & 0.167 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \\ \tilde{U}_4 \\ \tilde{U}_5 \end{Bmatrix} \qquad (c)$$



Gambar 4.44 Contoh 4.6 (Lanjutan).

Secara jelas, deformasi elemen dasar V_5, V_6, dan V_7 bernilai nol akibat kendala tak regang (*inextensible constraints*).

Kondisi (b): Elemen 1 dan 3 bersifat tak regang (*inextensible*) sedangkan elemen 2 dianggap sebagai elemen kaku (*rigid member*)

Ketidakfleksibelan (*inflexibility*) elemen 2 dipertimbangkan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.44. $\tilde{\tilde{U}}_1$, $\tilde{\tilde{U}}_2$, dan $\tilde{\tilde{U}}_3$ dipilih sebagai kebebasan *master*:

$$\tilde{\tilde{U}}_1 \Rightarrow \tilde{\tilde{U}}_1; \quad \tilde{\tilde{U}}_2 \Rightarrow \tilde{\tilde{U}}_2; \quad \text{dan} \quad \tilde{\tilde{U}}_3 \Rightarrow \tilde{\tilde{U}}_3$$

dan $\tilde{\tilde{U}}_4$ serta $\tilde{\tilde{U}}_5$ dipilih sebagai kebebasan *slave*. Sistem penomoran DOF terkendala yang dihasilkan ditunjukkan pada Gambar 4.42c. Akibatnya, hubungan kinematis yang dihasilkan adalah:

$$\tilde{\tilde{\mathbf{U}}} = \tilde{\tilde{\mathbf{A}}}_c \tilde{\tilde{\mathbf{U}}} \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} \tilde{\tilde{U}}_1 \\ \tilde{\tilde{U}}_2 \\ \tilde{\tilde{U}}_3 \\ \tilde{\tilde{U}}_4 \\ \tilde{\tilde{U}}_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/6 & -1/6 & 0 \\ 1/6 & -1/6 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\tilde{U}}_1 \\ \tilde{\tilde{U}}_2 \\ \tilde{\tilde{U}}_3 \end{Bmatrix} \qquad (d)$$

Akibatnya, hubungan kinematik yang bersesuaian dengan kendala tak-dapat-mulur (elemen 1 dan 2) dan tak-dapat-melentur (elemen 3) dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{U}_{free} = \tilde{\mathbf{A}}_c \tilde{\tilde{\mathbf{A}}}_c \tilde{\tilde{\mathbf{U}}} = \mathbf{A}_c \tilde{\tilde{\mathbf{U}}} \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & -1/6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/3 & 4/3 & 0 \\ 1/6 & -1/6 & 0 \\ -4/3 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\tilde{U}}_1 \\ \tilde{\tilde{U}}_2 \\ \tilde{\tilde{U}}_3 \end{Bmatrix} \qquad (e)$$

Mensubstitusikan hubungan kinematik dari Persamaan (e) ke dalam hubungan kompatibilitas dari Persamaan (a) menghasilkan:

$$\mathbf{V}_{free} = \mathbf{A}_{free}\mathbf{A}_C\tilde{\tilde{\mathbf{U}}} = \tilde{\tilde{\mathbf{A}}}_{free}\tilde{\tilde{\mathbf{U}}} \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.167 & 1 \\ 0.167 & 0 & 0 \\ 0.25 & -0.167 & 0 \\ 0.0833 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\tilde{U}}_1 \\ \tilde{\tilde{U}}_2 \\ \tilde{\tilde{U}}_3 \end{Bmatrix} \qquad (f)$$

Teramati bahwa deformasi elemen dasar yang terkait dengan deformasi aksial seluruh elemen serta deformasi lentur elemen 2 bernilai nol. Hal ini sesuai dengan kendala ketidakmampuan untuk memanjang (*inextensible*) dan kekakuan terhadap lentur (*inflexible*) yang diterapkan pada rangka ini.

BAB 5
PENERAPAN PRINSIP KERJA MAYA

5.1 TIGA PERSYARATAN DASAR DALAM MENGANALISIS STRUKTUR

Sebagaimana disebutkan dalam Bab 1, terdapat tiga persyaratan dasar yang harus dipenuhi dalam menganalisis struktur apa pun, yaitu kesetimbangan, kompatibilitas, dan hubungan konstitutif. Pada Bab 3, persamaan kesetimbangan dibahas secara khusus untuk memastikan bahwa struktur beserta setiap elemen penyusunnya berada dalam keadaan setimbang dan bahwa syarat batas gaya (alami) juga terpenuhi. Pada Bab 4, pembahasan rinci mengenai persamaan kompatibilitas geometris disajikan untuk memastikan bahwa deformasi bersifat kontinu di seluruh struktur dan bahwa syarat batas geometris (*esensial*) juga terpenuhi. Pembahasan mengenai hubungan konstitutif (hubungan kekakuan dan fleksibilitas) akan ditunda hingga bab-bab selanjutnya dengan memanfaatkan prinsip kerja maya, yang merupakan topik utama bab ini.

Bab ini menyajikan pembahasan dasar mengenai prinsip kerja maya. Penurunan matematis dari prinsip-prinsip ini dapat ditemukan dalam buku-buku teks mengenai kalkulus variasi. Sebagaimana terlihat pada Bab 3 dan 4, terdapat hubungan "misterius" antara persamaan kesetimbangan dan persamaan kompatibilitas pada elemen maupun struktur. Hingga saat ini, belum ada penurunan formal yang disajikan untuk hubungan kontragradien tersebut. Dengan menggunakan prinsip kerja maya, hubungan-hubungan ini dapat dibuktikan secara rasional.

Secara umum, prinsip kerja maya dapat diklasifikasikan ke dalam dua kategori berbeda, yaitu prinsip perpindahan maya dan prinsip gaya maya. Prinsip pertama menggunakan kondisi kesetimbangan dalam menyusun hubungan sistem, sedangkan prinsip kedua menggunakan kondisi kompatibilitas dalam merumuskan persamaan sistem. Pada kedua prinsip tersebut, semua persyaratan dasar harus dipenuhi, namun pada tahapan yang berbeda. Mahasiswa yang telah mengambil mata kuliah dasar analisis struktur tentu pernah menjumpai prinsip kerja maya dalam berbagai bentuknya. Perlu diingat kembali dari mata kuliah dasar analisis struktur bahwa metode *slope-deflection*, metode distribusi momen, metode perpindahan semu (satuan), dan teorema pertama Castigliano berasal dari prinsip perpindahan maya. Di sisi lain, metode perpindahan konsisten, metode kerja minimum, metode beban semu (satuan), metode tiga momen, dan teorema kedua Castigliano semuanya berasal dari prinsip gaya maya.

Penemuan prinsip kerja maya bermula dari bidang mekanika klasik. Secara umum, terdapat dua jalur pengembangan dalam mekanika klasik. Salah satu jalur yang dikenal sebagai "Mekanika Vektor" mengikuti hukum gerak Newton ($\overline{\mathrm{F}} = \overline{\mathrm{ma}}$). Jalur lainnya dikenal sebagai "Prinsip Kerja Maya" atau "Mekanika Skalar". Asal-usul prinsip ini kemungkinan besar sudah ada sejak zaman Aristoteles. Dalam bentuk dasarnya, prinsip ini sudah diketahui oleh da Vinci. Galileo juga mencermati prinsip ini sebagai hukum umum yang dapat diterapkan pada pesawat sederhana (misalnya tuas, katrol). Namun, Johann Bernoulli-lah yang memberikan rumusan

umum bagi prinsip kerja maya sehingga dapat diterapkan pada hampir semua sistem mekanis. Ia mencetuskan prinsip perpindahan maya dalam suratnya yang terkenal (tertanggal 26 Januari 1717) kepada Varignon. Kontributor utama dalam perumusan matematis prinsip kerja maya adalah Lagrange melalui karya tulisnya yang termasyhur, *Mécanique analytique* (Lagrange, 1788). Dalam kata pengantar karya tersebut, Lagrange menyatakan bahwa:

> "***Tidak ada gambar dalam bukunya karena metode yang ia gunakan tidak memerlukan pertimbangan geometris atau mekanis, melainkan hanya operasi aljabar yang harus mengikuti urutan tertentu***."

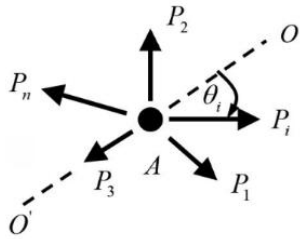
Berkat karya Lagrange, d'Alembert, dan Hamilton, prinsip kerja maya diperluas cakupannya hingga ke ranah kinetika, yang kemudian menghasilkan persamaan Lagrange-Hamilton yang terkenal.

5.2 PARTIKEL DAN BENDA TEGAR

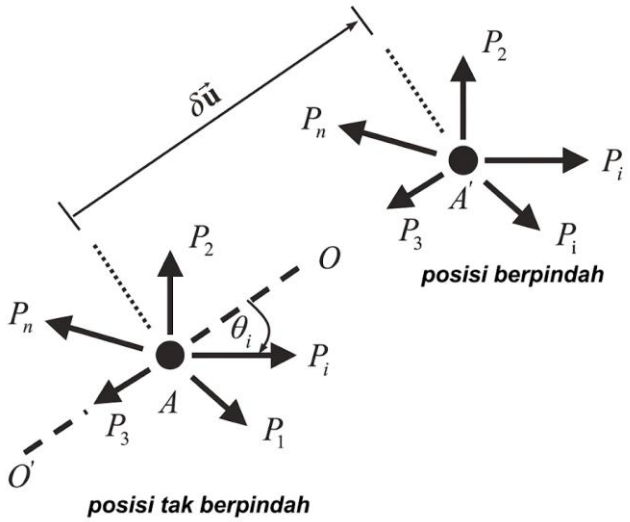
Penurunan prinsip perpindahan maya pertama-tama dimulai dengan sebuah partikel kaku tunggal. Partikel A pada Gambar 5.1 dikenai suatu sistem gaya ($P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$) yang berada dalam keseimbangan. Oleh karena itu, persamaan keseimbangan gaya dapat dinyatakan sebagai:

$$\vec{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{P}}_i = \mathbf{0} \tag{5.1}$$

Misalkan kondisi keseimbangan partikel A diganggu oleh vektor perpindahan infinitesimal dan sembarang $\delta\vec{\mathbf{u}}$ dalam arah tertentu $O'O$ seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.2, yaitu secara maya dipindahkan dari konfigurasi awal ke konfigurasi berpindah. Perpindahan imajiner seperti ini disebut sebagai perpindahan "maya". Perlu diperhatikan bahwa perpindahan maya $\delta\vec{\mathbf{u}}$ sepenuhnya bersifat fiktif dan tidak berhubungan dengan perpindahan nyata partikel yang mungkin terjadi akibat pengaruh gaya-gaya nyata. Persyaratan bahwa perpindahan maya bersifat infinitesimal diterapkan agar arah gaya-gaya yang bekerja selama pergerakan maya dianggap tidak berubah. Dengan kata lain, persamaan keseimbangan diambil terhadap konfigurasi awal. Jika perpindahan maya bersifat hingga, pertimbangan yang sesuai harus diperhitungkan dalam deskripsi kerja maya. Keadaan ini dijumpai pada masalah perpindahan besar.



Gambar 5.1 Partikel yang Mengalami Sistem Gaya.



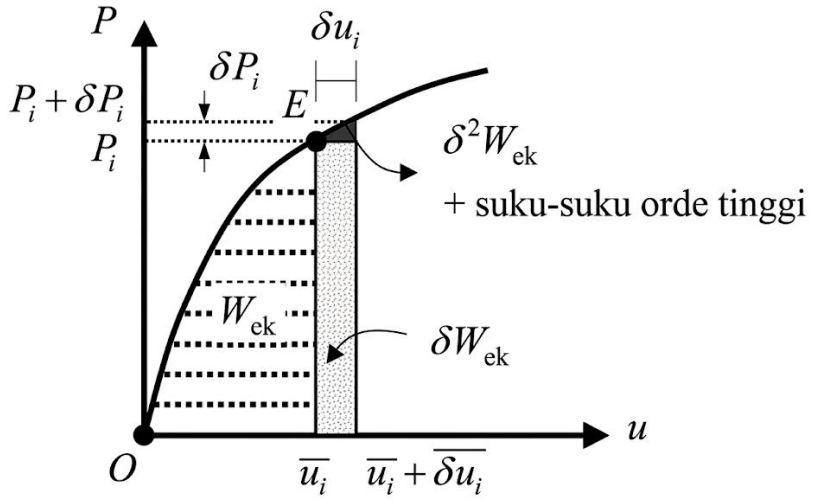
Gambar 5.2 Definisi Kerja Virtual.

Kerja yang dilakukan oleh gaya-gaya nyata pada perpindahan maya dikenal sebagai kerja maya δW atau, lebih tepatnya, sebagai kerja maya luar δW_{ext}. Kerja maya luar didefinisikan sebagai penjumlahan dari perkalian skalar antara perpindahan maya $\delta\vec{\mathbf{u}}$ dan seluruh gaya luar yang bekerja $\vec{\mathbf{P}}$:

$$\delta W_{ext} = \delta\vec{\mathbf{u}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{P}}_i\right) = \delta u_{O'O} P_1 \cos\theta_1 + \cdots + \delta u_{O'O} P_n \cos\theta_n = \delta u_{O'O} \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \cos\theta_i\right) \qquad (5.2)$$

di mana θ_i menyatakan sudut antara garis kerja gaya $\vec{\mathbf{P}}_i$ dan arah perpindahan maya ($O'O$). Perlu dijelaskan mengapa tidak ada faktor $1/2$ dalam ekspresi kerja maya. Hal ini disebabkan oleh asumsi bahwa selama perpindahan maya, gaya $\vec{\mathbf{P}}_i$ bekerja pada nilainya yang konstan. Hal ini menjadi jelas ketika kurva beban-perpindahan dari gaya P_i digambarkan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.3. Dari kurva respons tersebut, seiring gaya P_i ditingkatkan secara bertahap dari kondisi awal (Titik O), perpindahan yang bersesuaian u_i juga meningkat hingga kondisi keseimbangan tercapai di Titik E. Total kerja maya yang dihasilkan akibat terganggunya kondisi keseimbangan ini oleh perpindahan maya δu_i didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} \Delta W_{ext} &= \delta W_{ext} + \delta^2 W_{ext} + \cdots + istilah\ tingkat\ tinggi \\ &= P_i \delta u_i + \delta^2 W_{ext} + \cdots + istilah\ tingkat\ tinggi \end{aligned} \qquad (5.3)$$



Gambar 5.3 Definisi Kerja Virtual Eksternal δW_{ext}.

Secara matematis, δW_{ext} dikenal sebagai variasi pertama dari fungsi (atau secara umum fungsional) W_{ext}; $\delta^2 W_{ext}$ sebagai variasi kedua dari fungsi W_{ext}; dan seterusnya. Dengan mengasumsikan bahwa δP_i dan δu_i bersifat infinitesimal, total kerja maya dapat didekati secara memadai sebagai:

$$\Delta W_{ext} \approx \delta W_{ext} = P_i \delta u_i \tag{5.4}$$

Namun, untuk sistem nonlinier (misalnya struktur geometris nonlinier), suku selain variasi pertama harus tetap dipertahankan dalam memperhitungkan total kerja maya ΔW_{ext}. Pada ruas kanan Pers. (5.2), suku di dalam kurung bernilai nol akibat kondisi keseimbangan gaya (5.1). Akibatnya, diperoleh bahwa:

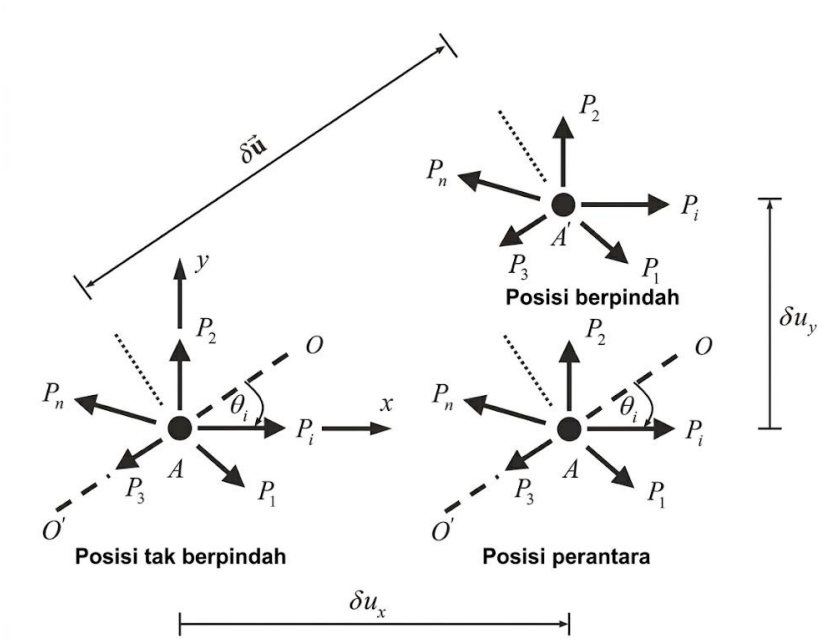
$$\delta W = \delta W_{ext} = 0 \tag{5.5}$$

Ini adalah persamaan untuk prinsip perpindahan maya yang dapat dinyatakan secara verbal sebagai berikut:

> ***Jika suatu partikel berada dalam keadaan setimbang di bawah pengaruh sistem gaya riil, total usaha yang dilakukan oleh gaya-gaya riil tersebut selama perpindahan maya sembarang apa pun bernilai nol.***

Sangat menarik untuk mengeksplorasi apakah kebalikan dari pernyataan di atas berlaku. Jika berlaku, hal ini akan sangat membantu dalam merumuskan persamaan keseimbangan suatu partikel. Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.4, perpindahan maya $\delta\vec{\mathbf{u}}$ dapat dinyatakan terhadap sistem acuan $x$dan y:

$$\delta\vec{\mathbf{u}} = \delta u_x \vec{\mathbf{i}} + \delta u_y \vec{\mathbf{j}} \tag{5.6}$$



Gambar 5.4 Dekomposisi vektor perpindahan virtual $\delta\vec{\mathbf{u}}$

di mana $\vec{\mathbf{i}}$ dan $\vec{\mathbf{j}}$ masing-masing adalah vektor satuan sepanjang sumbu x dan y; serta δu_x dan δu_y masing-masing adalah komponen perpindahan maya yang independen dan sembarang sepanjang arah x dan y. Dengan cara serupa, sistem gaya yang bekerja pada partikel A dapat diuraikan sebagai:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{P}}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} P_{xi}\right)\vec{\mathbf{i}} + \left(\sum_{i=1}^{n} P_{yi}\right)\vec{\mathbf{j}} \tag{5.7}$$

di mana $\sum_{i=1}^{n} P_{xi}$ adalah resultan gaya sepanjang sumbu x, sedangkan $\sum_{i=1}^{n} P_{yi}$ adalah resultan gaya sepanjang sumbu y. Kerja maya adalah perkalian skalar dari vektor $\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{P}}_i$ dan $\delta\vec{\mathbf{u}}$ yang didefinisikan sebagai:

$$\delta W = \delta W_{ext} = \left(\sum_{i=1}^{n} P_{xi}\right)\delta u_x + \left(\sum_{i=1}^{n} P_{yi}\right)\delta u_y \tag{5.8}$$

Karena sifat sembarang dari δu_x dan δu_y, koefisien dari δu_x dan δu_y pada Pers. (5.8) harus bernilai nol agar δW bernilai nol. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa:

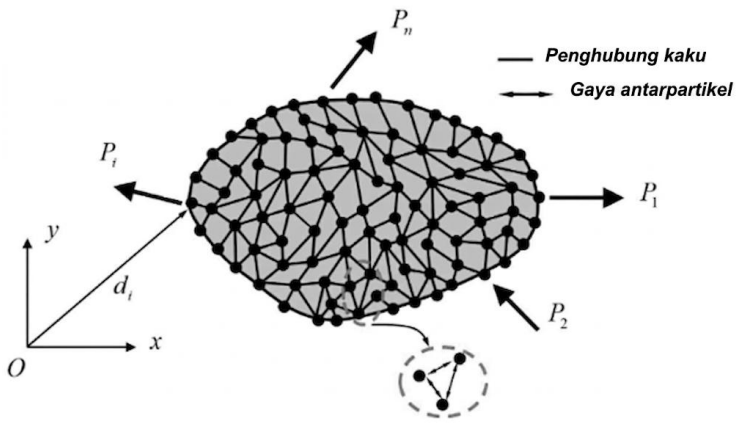
$$\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = 0 \tag{5.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{yi} = 0 \tag{5.10}$$

Jelas bahwa Persamaan (5.9) dan (5.10) tidak lain adalah persamaan kesetimbangan partikel sepanjang sumbu x dan y secara berturut-turut. Kebalikan dari prinsip perpindahan maya yang disebutkan di atas dapat dinyatakan sebagai berikut:

> ***Suatu partikel berada dalam keadaan setimbang di bawah pengaruh sistem gaya riil jika total usaha yang dilakukan oleh gaya-gaya riil tersebut selama setiap perpindahan maya yang sembarang dan independen bernilai nol.***

Pernyataan di atas menghasilkan kesimpulan yang sangat penting bahwa prinsip perpindahan maya hanyalah cara alternatif untuk menyatakan persamaan kesetimbangan. Kesimpulan ini mungkin tampak sepele saat ini, namun memberikan wawasan yang sangat esensial sebagaimana ditunjukkan dalam penerapan-penerapan selanjutnya. Kini, wajar untuk memperluas prinsip usaha maya yang telah diturunkan untuk partikel tegar agar berlaku bagi benda tegar, karena benda tegar dapat dibayangkan secara sederhana sebagai kumpulan partikel tegar yang saling dihubungkan oleh penghubung tegar seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.5.



Gambar 5.5 Benda tegar sebagai kumpulan partikel tegar dan penghubung tegar.

Sistem gaya yang terkait mencakup gaya-gaya yang bekerja secara eksternal pada kumpulan partikel tersebut serta gaya antarpartikel pada penghubung tegar. Benda tegar (kumpulan partikel ditambah penghubung tegar) pada awalnya diasumsikan berada dalam keadaan setimbang di bawah pengaruh sistem gaya tersebut. Dengan kata lain, kumpulan partikel tersebut berada dalam kesetimbangan keseluruhan akibat gaya-gaya eksternal, dan setiap partikel berada dalam kesetimbangan akibat gaya eksternal serta gaya antarpartikel. Akibatnya, persamaan kesetimbangan untuk benda tegar dapat dituliskan sebagai berikut:

Kesetimbangan Gaya

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{P}}_i = \mathbf{0} \tag{5.11}$$

Keseimbangan Momen Terhadap Titik Acuan O

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{P}}_i \times \vec{\mathbf{d}}_i = \mathbf{0} \tag{5.12}$$

di mana $\vec{\mathbf{d}}_i$ adalah vektor posisi titik pembebanan gaya $\vec{\mathbf{P}}_i$ terhadap titik acuan O. Kondisi keseimbangan sekarang diganggu oleh pergerakan maya sembarang. Pergerakan maya ini mencakup translasi maya $\delta\vec{\mathbf{u}}$ dan rotasi maya $\delta\vec{\boldsymbol{\omega}}$. Kerja maya yang dihasilkan didefinisikan sebagai penjumlahan perkalian skalar antara gaya resultan dengan vektor translasi maya dan momen resultan dengan vektor rotasi maya:

$$\delta W = \delta W_{ext} = \delta\vec{\mathbf{u}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{P}}_i \right) + \delta\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{P}}_i \times \vec{\mathbf{d}}_i \right) \tag{5.13}$$

Setelah melakukan perkalian skalar pada Persamaan (5.13), diperoleh:

$$\delta W = \delta W_{ext} = \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \right) \delta u \cos\theta_i + \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \times d_i \right) \delta\omega \cos\psi_i \tag{5.14}$$

di mana θ_i adalah sudut antara gaya resultan dan vektor translasi maya, sedangkan ψ_i adalah sudut antara momen resultan dan vektor rotasi maya. Jelas bahwa kerja maya akan bernilai nol untuk kombinasi apa pun dari $\delta\vec{\mathbf{u}}$ dan $\delta\vec{\boldsymbol{\omega}}$ jika dan hanya jika suku-suku dalam kurung pada Pers. (5.14) bernilai nol, yaitu diperoleh persamaan keseimbangan benda tegar. Oleh karena itu, pernyataan umum dari prinsip perpindahan maya untuk benda tegar dapat dinyatakan sebagai:

> ***Syarat perlu dan cukup agar suatu benda tegar berada dalam keadaan setimbang adalah kerja virtual yang dilakukan oleh gaya-gaya nyata akibat medan perpindahan virtual sembarang bernilai nol.***

Perlu dicatat bahwa kerja virtual yang dilakukan oleh setiap pasangan gaya antarpartikel pada penghubung tegar (*rigid link*) saat terjadi perpindahan virtual akan saling meniadakan. Inilah alasan mengapa tidak terdapat kerja virtual internal dalam masalah benda tegar. Dengan memandang benda tegar sebagai kumpulan partikel tegar dan penghubung tegar, sangatlah

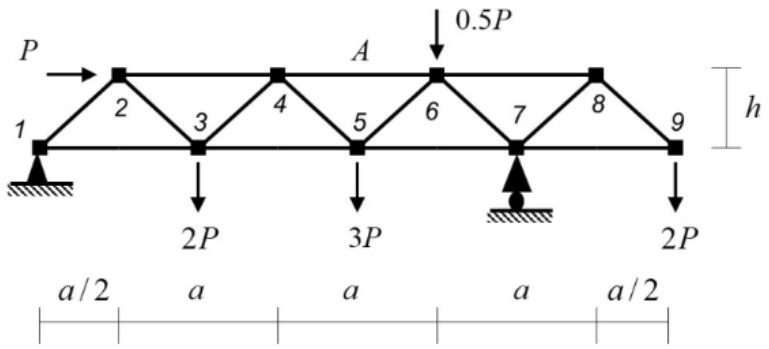
wajar untuk memperluas prinsip kerja virtual yang telah diturunkan bagi benda tegar agar dapat diterapkan pada benda yang dapat mengalami deformasi. Hal ini dilakukan dengan mengganti penghubung tegar menjadi penghubung yang dapat mengalami deformasi.

Sebagai contoh, struktur rangka terdiri atas sambungan tegar (*partikel*) yang dihubungkan oleh elemen rangka yang dapat mengalami deformasi. Struktur kontinu (misalnya bendungan) terdiri atas sambungan tegar yang dihubungkan oleh elemen area atau volume yang dapat mengalami deformasi. Dalam kasus-kasus ini, terdapat kontribusi kerja virtual internal terhadap total kerja virtual; topik ini akan dibahas lebih lanjut pada bagian-bagian berikutnya.

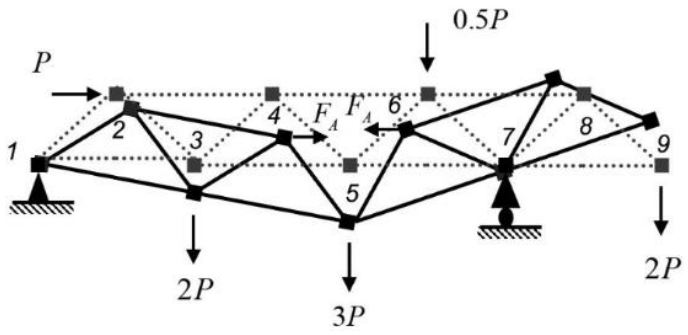
Contoh 5.1

Dengan prinsip perpindahan maya, tentukan gaya pada batang A dari struktur rangka batang yang ditunjukkan pada Gambar 5.6.

- **Solusi:** Gaya pada batang A terlebih dahulu dilepaskan. Hal ini dilakukan dengan melepas batang A dan menggantinya dengan gaya F_A yang sama besar dan berlawanan arah. Kemudian, kondisi perpindahan maya dari rangka batang divisualisasikan dengan mengasumsikan bahwa gaya pengekang pada batang A tidak ada. Akhirnya, konfigurasi rangka batang yang mengalami perpindahan digambarkan pada Gambar 5.7.



Gambar 5.6 Contoh 5.1.



Gambar 5.7 Contoh 5.1 (Lanjutan).

Perlu dicatat bahwa rangka batang ini bersifat statis tertentu. Oleh karena itu, penerapan satu saja pelepasan gaya internal (batang A) dapat membentuk suatu mekanisme. Usaha maya yang terkait dengan perpindahan maya di atas didefinisikan sebagai:

$$\delta W = P(\delta U_{2X}) + 2P(\delta U_{3Y}) + 3P(\delta U_{5Y}) + 0.5P(\delta U_{6Y}) - 2P(\delta U_{9Y}) + F_A(\delta U_{4X}) + F_A(\delta U_{6X}) = 0$$

Karena keadaan perpindahan virtual harus merepresentasikan mekanisme benda tegar secara tepat, diperoleh hubungan-hubungan berikut:

$$\delta U_{2X} = \frac{h}{2a}\delta U_{5Y}; \quad \delta U_{3Y} = \frac{1}{2}\delta U_{5Y}; \quad \delta U_{6Y} = \frac{1}{2}\delta U_{5Y}; \quad \delta U_{9Y} = \delta U_{5Y}; \quad \delta U_{4X} = \frac{h}{2a}\delta U_{5Y}; \quad \text{serta}$$

$$\delta U_{6X} = \frac{h}{a}\delta U_{5Y}$$

Hubungan-hubungan ini dapat diterima secara kinematik. Mensubstitusikan hubungan-hubungan ini ke dalam ekspresi kerja maya menghasilkan:

$$\delta W = \left(P\frac{h}{2a} + P + 3P + 0.25P - 2P + F_A\left(\frac{h}{2a} + \frac{h}{a}\right)\right)\delta U_{5Y} = 0$$

Karena sifat sembarang dari δU_{5Y}, gaya pada batang A dapat ditentukan sebagai:

$$F_A = -\left(\frac{1}{3} + \frac{3a}{2h}\right)P$$

Pembaca dipersilakan untuk memverifikasi jawaban ini menggunakan metode titik buhul (*method of joints*) atau metode potongan (*method of sections*).

5.3 DEFINISI ENERGI REGANGAN VIRTUAL DAN VARIASI ENERGI

Pada bagian sebelumnya, prinsip kerja maya atau, lebih spesifiknya, prinsip perpindahan maya telah diturunkan dan diterapkan pada partikel tegar dan benda tegar. Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, prinsip perpindahan maya hanyalah cara alternatif untuk menjelaskan kondisi keseimbangan. Dengan prinsip ini, reaksi tumpuan dan gaya dalam hanya dapat ditentukan untuk struktur statis tertentu. Namun, aplikasi paling berharga dari analisis struktur matriks adalah untuk menganalisis struktur statis tak tentu. Cukup dengan memperhitungkan sifat terdeformasi dari struktur, struktur statis tak tentu dapat dianalisis melalui prinsip perpindahan maya matriks.

Untuk memperhitungkan sifat terdeformasi dari benda padat dan struktur, perlu dijelaskan mengenai kerja maya eksternal dan internal. Susunan seri dari dua batang yang dapat terdeformasi pada Gambar 5.8a digunakan untuk menyampaikan gagasan ini. Struktur pada Gambar 5.8a terdiri dari tiga partikel tegar yang dihubungkan oleh dua pegas. Diagram benda bebas dari partikel tegar dan pegas ini ditunjukkan pada Gambar 5.8b. Dengan

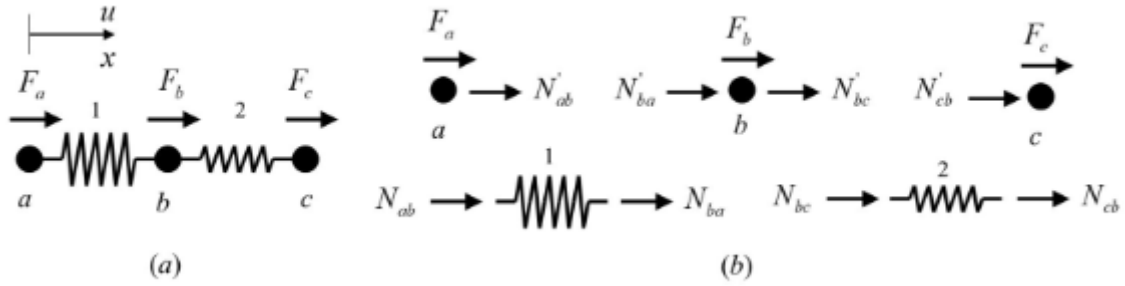
memberikan perpindahan maya δu_a, δu_b, dan δu_c pada partikel di simpul a, b, dan c, kerja maya untuk partikel-partikel ini adalah:

$$\delta W = (F_a + N'_{ab})\delta u_a + (F_b + N'_{ba} + N'_{bc})\delta u_b + (F_c + N'_{cb})\delta u_c \qquad (5.15)$$

Karena ketiga partikel ini bersifat kaku dan diasumsikan berada dalam keadaan setimbang, maka ungkapan kerja maya pada Persamaan (5.15) harus bernilai nol:

$$\delta W = (F_a + N'_{ab})\delta u_a + (F_b + N'_{ba} + N'_{bc})\delta u_b + (F_c + N'_{cb})\delta u_c = 0 \qquad (5.16)$$

Karena sifat sembarang dan independen dari δu_a, δu_b, dan δu_c, diperoleh hubungan keseimbangan berikut:



Gambar 5.8 Susunan Seri Dua Penghubung yang Dapat Berdeformasi dan Tiga Partikel Kaku.

$$\begin{aligned} F_a + N'_{ab} = 0 \quad &\Rightarrow \quad F_a = -N'_{ab} \\ F_b + N'_{ba} + N'_{bc} = 0 \quad &\Rightarrow \quad F_b = -N'_{ba} - N'_{bc} \\ F_c + N'_{cb} = 0 \quad &\Rightarrow \quad F_c = -N'_{cb} \end{aligned} \qquad (5.17)$$

Berdasarkan hukum gerak ketiga Newton, diperoleh:

$$N'_{ab} = -N_{ab}; \quad N'_{ba} = -N_{ba}; \quad N'_{bc} = -N_{bc}; \quad \text{serta} \quad N'_{cb} = -N_{cb} \qquad (5.18)$$

Dengan menyubstitusikan Pers. (5.18) ke dalam (5.16), diperoleh:

$$\delta W = (F_a - N_{ab})\delta u_a + (F_b - N_{ba} - N_{bc})\delta u_b + (F_c - N_{cb})\delta u_c = 0 \qquad (5.19)$$

$$\delta W = (F_a\delta u_a + F_b\delta u_b + F_c\delta u_c) - (N_{ab}\delta u_a + N_{ba}\delta u_b + N_{bc}\delta u_b + N_{cb}\delta u_c) = 0 \qquad (5.20)$$

Dengan meninjau kesetimbangan setiap pegas, diperoleh:

$$N_1 = N_{ba} = -N_{ab} \quad \text{serta} \quad N_2 = N_{cb} = -N_{bc} \qquad (5.21)$$

Dengan menyubstitusikan Pers. (5.21) ke dalam (5.20), diperoleh:

$$\delta W = (F_a \delta u_a + F_b \delta u_b + F_c \delta u_c) + \Big(-\big(N_1(\delta u_b - \delta u_a) + N_2(\delta u_c - \delta u_b)\big)\Big) = 0 \quad (5.22)$$

Suku pertama di ruas kanan Pers. (5.22) mewakili kerja maya eksternal yang dinotasikan dengan δW_{ext}. Suku kedua di ruas kanan adalah kerja maya internal yang dinotasikan dengan δW_{int}. Dari prinsip dasar, deformasi pegas dapat didefinisikan dalam bentuk perpindahan ujung-ujungnya sebagai:

$$\Delta_i = u_2^i - u_1^i \quad (5.23)$$

Oleh karena itu, deformasi virtual yang kompatibel dengan perpindahan ujung virtual dituliskan sebagai berikut:

$$\delta\Delta_1 = \delta u_b - \delta u_a \quad \text{untuk pegas 1} \quad (5.24)$$

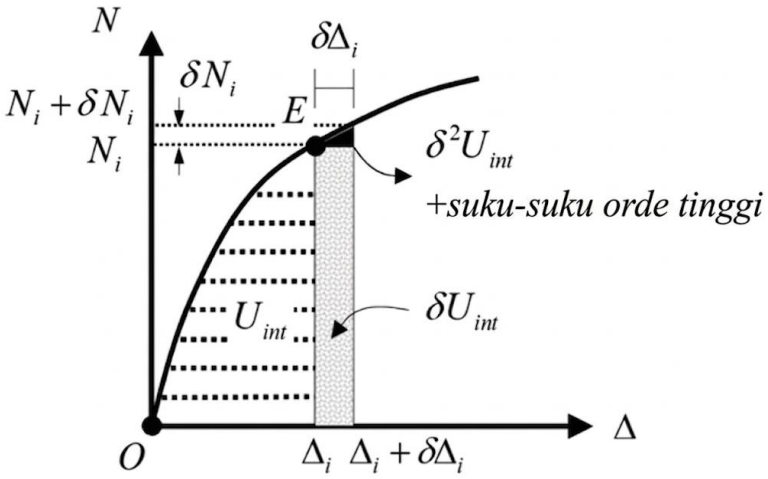
$$\delta\Delta_2 = \delta u_c - \delta u_b \quad \text{untuk pegas 2} \quad (5.25)$$

Kerja virtual internal ditulis sebagai:

$$\delta W_{int} = -(N_1 \delta\Delta_1 + N_2 \delta\Delta_2) \quad (5.26)$$

Tanda minus pada Pers. (5.26) menunjukkan bahwa kerja maya internal dilakukan *pada* bukannya *oleh* gaya-gaya internal. Perlu dicatat bahwa kerja maya internal bernilai sama besar tetapi berlawanan tanda dengan apa yang disebut "energi regangan maya" δU_{int}.

$$\delta W_{int} = -\delta U_{int} = -(N_1 \delta\Delta_1 + N_2 \delta\Delta_2) = -\sum_{i=1}^{2} N_i \, \delta\Delta_i \quad (5.27)$$



Gambar 5.9 Definisi Energi Regangan Maya δU_{int}.

Alasan mengapa tidak terdapat faktor 1/2 dalam ekspresi kerja internal dan energi regangan maya perlu dijelaskan. Hal ini disebabkan oleh asumsi bahwa selama deformasi maya, gaya internal N_i bekerja pada nilai konstannya. Hal ini menjadi jelas ketika kurva gaya-deformasi dari pegas digambarkan seperti ditunjukkan pada Gambar 5.9. Dari kurva respons tersebut, saat gaya N_i ditingkatkan secara bertahap dari kondisi awal (Titik O), deformasi Δ_i yang bersesuaian juga meningkat hingga kondisi keseimbangan tercapai pada Titik E. Total energi regangan maya yang dihasilkan dari gangguan pada kondisi keseimbangan ini oleh deformasi maya $\delta\Delta_i$ yang kompatibel dengan perpindahan maya δu_i didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned}\Delta U_{int} &= \delta U_{int} + \delta^2 U_{int} + \cdots + \text{suku-suku orde lebih tinggi} \\ &= N_i \delta\Delta_i + \delta^2 U_{int} + \cdots + \text{suku-suku orde lebih tinggi}\end{aligned} \tag{5.28}$$

Secara matematis, δU_{int} dikenal sebagai variasi pertama dari fungsi (atau secara umum fungsional) U_{int}; $\delta^2 U_{int}$ sebagai variasi kedua dari fungsi U_{int}; dan seterusnya. Dengan mengasumsikan bahwa δN_i dan $\delta\Delta_i$ bersifat infinitesimal, total energi regangan maya dapat didekati secara memadai sebagai:

$$\Delta U_{int} \approx \delta U_{int} = N_i \delta\Delta_i \tag{5.29}$$

Perlu dicatat bahwa untuk sistem nonlinier (misalnya struktur berdeformasi besar), suku-suku selain variasi pertama harus tetap dipertahankan dalam menyatakan total energi regangan maya ΔU_{int}. Oleh karena itu, pernyataan aljabar dari prinsip kerja maya adalah:

$$\delta W = \delta W_{ext} + \delta W_{int} = 0 \tag{5.30}$$

Atau

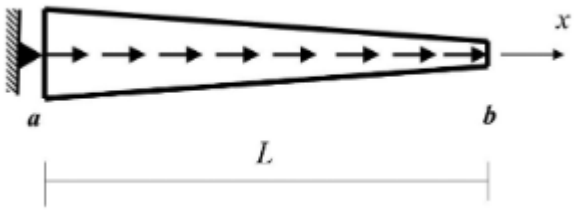
$$\delta W = \delta W_{ext} - \delta U_{int} = 0 \tag{5.31}$$

Pernyataan verbal mengenai prinsip kerja maya adalah sebagai berikut:

> ***Suatu benda yang dapat mengalami deformasi berada dalam keadaan setimbang jika kerja maya yang dilakukan oleh semua gaya luar ditambah kerja maya yang dilakukan oleh semua gaya dalam selama perpindahan maya yang dapat diterima secara kinematik bernilai nol.***

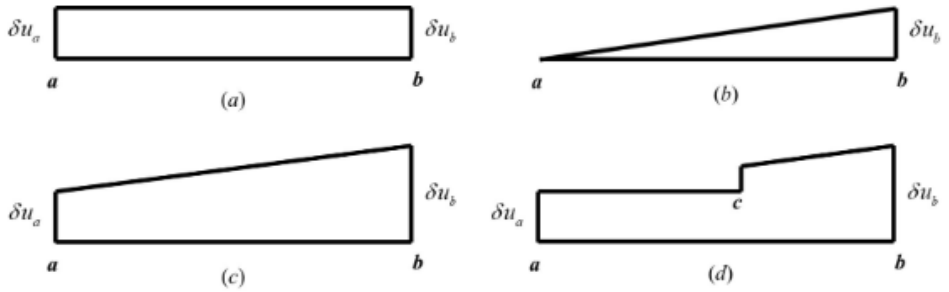
Dalam pernyataan di atas, perpindahan maya dibatasi oleh frasa "dapat diterima secara kinematik" (*kinematically admissible*). Hal ini menyiratkan bahwa medan perpindahan maya tidak sepenuhnya sembarang. Secara umum, medan perpindahan maya harus sedemikian rupa sehingga menjaga kontinuitas antarbagian sistem dan tidak menyebabkan robekan atau

putusnya sistem. Pemahaman fisis mengenai batasan pada medan perpindahan maya dapat diperkaya dengan meninjau batang yang penampangnya mengecil (*tapered bar*) yang dikenai beban terbagi rata, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 5.10.



Gambar 5.10 Batang dengan penampang mengecil (*tapered*) yang dikenai beban terbagi rata.

Kandidat medan perpindahan maya ditunjukkan pada Gambar 5.11. Medan yang ditunjukkan pada Gambar 5.11 a, b, dan c semuanya dapat diterima secara kinematik, namun memberikan karakteristik yang berbeda. Medan perpindahan maya pada Gambar 5.11 a hanya merepresentasikan gerak benda tegar sepanjang sumbu-x. Selain itu, medan ini melanggar syarat batas geometris di titik a. Dengan menggunakan kandidat ini, seseorang hanya dapat menghitung reaksi tumpuan di titik a. Medan perpindahan maya pada Gambar 5.11 b hanya merepresentasikan moda deformasi dan memenuhi syarat batas geometris di titik a. Dengan menggunakan kandidat ini, seseorang dapat menghitung solusi "pendekatan" untuk masalah ini. Aspek ini akan dibahas lebih lanjut pada bagian-bagian berikutnya. Medan perpindahan maya pada Gambar 5.11 c merepresentasikan baik gerak benda tegar maupun moda deformasi. Medan ini juga melanggar syarat batas geometris di titik a. Dengan menggunakan kandidat ini, seseorang dapat menghitung solusi "pendekatan" untuk masalah ini sekaligus reaksi tumpuan di titik a. Medan perpindahan maya pada Gambar 5.11 d sama sekali tidak dapat diterima secara kinematik karena menyebabkan diskontinuitas pada batang, di mana deformasi tidak dapat didefinisikan secara unik di titik c.



Gambar 5.11 Kandidat untuk medan perpindahan virtual.

Perlu dicatat bahwa sejauh ini, hubungan konstitutif antara tegangan (atau tegangan resultan) dan regangan (atau regangan resultan) belum disinggung dalam penurunan prinsip kerja virtual. Hal ini menyiratkan bahwa prinsip kerja virtual dapat diterapkan baik pada sistem

konservatif (elastis) maupun non-konservatif (inelastis). Namun, fokus utamanya dibatasi pada sistem konservatif.

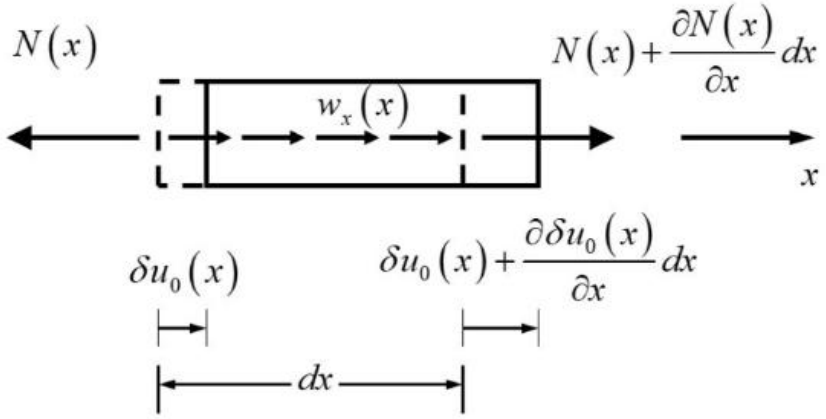
Hingga saat ini, prinsip perpindahan virtual baru dikembangkan untuk benda yang dapat mengalami deformasi yang terdiri dari partikel tegar dan penghubung berupa pegas. Oleh karena itu, prinsip ini dapat diterapkan pada struktur yang mengalami deformasi aksial (misalnya, struktur rangka batang/*truss*). Dengan mengikuti prosedur di atas, prinsip kerja virtual dapat diperluas ke jenis struktur lain yang dapat mengalami deformasi. Dengan demikian, langkah selanjutnya dalam penerapan prinsip kerja virtual adalah menurunkan ekspresi kerja virtual internal (energi regangan virtual) untuk berbagai moda aksi struktural tertentu, yaitu gaya aksial, geser, dan lentur. Hal ini akan dibahas pada bagian berikutnya.

5.4 EKSPRESI KERJA VIRTUAL INTERNAL DAN ENERGI REGANGAN VIRTUAL

Karena struktur rangka menjadi fokus utama dalam buku teks ini, moda aksi internal yang menjadi perhatian utama adalah respons aksial, geser, dan lentur. Pada sub-bagian berikut, ekspresi energi regangan virtual akan diturunkan untuk setiap jenis aksi struktural tersebut.

Respons Aksial: Prinsip Perpindahan Virtual

Tinjau segmen infinitesimal dx dari elemen berbeban aksial dengan panjang L seperti ditunjukkan pada Gambar 5.12. Segmen ini berada dalam keseimbangan di bawah aksi gaya-gaya internal $N(x)$ dan $N(x)+\frac{\partial N(x)}{\partial x}dx$ serta beban terdistribusi eksternal $w_x(x)$. Perlu dicatat bahwa perpindahan dan deformasi yang berhubungan dengan gaya-gaya ini masing-masing dikualifikasikan sebagai perpindahan nyata dan deformasi nyata. Seluruh segmen infinitesimal ini dianggap sebagai benda bebas dan terganggu oleh perpindahan maya $\delta u_0(x)$ pada ujung kiri dan oleh $\delta u_0(x)+\frac{\partial \delta u_0(x)}{\partial x}dx$ pada ujung kanan. Sebagai konsekuensinya, kerja maya yang dihasilkan adalah:



Gambar 5.12 Energi Regangan Virtual δ dari Segmen Infinitesimal: Respons Aksial.

$$\delta W_{ext} = (w_x(x)dx)\delta u_0(x) - N(x)\delta u_0(x) + \left(N(x)+\frac{\partial N(x)}{\partial x}dx\right)\left(\delta u_0(x)+\frac{\partial \delta u_0(x)}{\partial x}dx\right) \quad (5.32)$$

$$\delta W_{ext} = (w_x(x)dx)\delta u_0(x) - N(x)\delta u_0(x) + N(x)\delta u_0(x) +$$
$$N(x)\frac{\partial \delta u_0(x)}{\partial x}dx + \left(\underbrace{\frac{\partial N(x)}{\partial x}dx}_{-w_x(x)}\right)\delta u_0(x) + \underbrace{\left(\frac{\partial N(x)}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial \delta u_0(x)}{\partial x}dx\right)}_{\text{suku orde ke-2}} \quad (5.33)$$

Dengan menerapkan persamaan kesetimbangan diferensial (2/2.1) pada segmen batang dan mengabaikan suku orde kedua, Persamaan (5.33) ditulis sebagai berikut:

$$\delta W_{ext} = N(x)\frac{\partial \delta u_0(x)}{\partial x}dx \quad (5.34)$$

Berdasarkan persamaan (5.31), dapat disimpulkan bahwa:

$$\delta \overline{U}_{int} = N(x)\frac{\partial \delta u_0(x)}{\partial x}dx \quad (5.35)$$

dengan $\delta \overline{U}_{int}$ menyatakan energi regangan maya dari segmen infinitesimal dx. Pada Bab 2, regangan aksial didefinisikan sebagai laju perubahan perpindahan aksial terhadap koordinat aksial.

$$\varepsilon_0(x) = \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \quad (5.36)$$

Dengan cara yang sama, regangan aksial maya yang kompatibel dengan perpindahan maya $\delta u_0(x)$ didefinisikan sebagai:

$$\delta \varepsilon_0(x) = \frac{\partial \delta u_0(x)}{\partial x} \quad (5.37)$$

Oleh karena itu, Persamaan (5.35) ditulis sebagai berikut:

$$\delta \overline{U}_{int} = N(x)\delta \varepsilon_0(x)dx \quad (5.38)$$

Untuk seluruh panjang elemen berbeban aksial, energi regangan maya δU_{int} adalah:

$$\delta U_{int} = \int_L \delta\, \overline{U}_{int} = \int_L N\,(x)\delta \varepsilon_0(x)dx \quad (5.39)$$

Jika hanya material elastis linear yang ditinjau, hubungan kekakuan penampang berikut

$$N(x) = EA(x)\varepsilon_0(x) \quad (5.40)$$

disubstitusikan ke dalam Pers. (5.39) dan energi regangan virtual dinyatakan sepenuhnya dalam bentuk regangan (deformasi) sebagai:

$$\delta U_{int} = \int_L \varepsilon_0\,(x) EA(x) \delta\varepsilon_0(x) dx \tag{5.41}$$

Perlu dicatat bahwa $\varepsilon_0(x)$ adalah regangan aksial nyata yang berhubungan dengan gaya aksial nyata $N(x)$ melalui hubungan konstitutif. Dengan mengingat kembali hubungan regangan-perpindahan aksial dari Pers. (5.36) dan (5.37), energi regangan maya dinyatakan sepenuhnya dalam bentuk perpindahan aksial sebagai:

$$\delta U_{int} = \int_L \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} EA(x) \frac{\partial \delta u_0(x)}{\partial x} dx \tag{5.42}$$

Berdasarkan Pers. (5.30), kerja virtual internal dituliskan sebagai:

$$\delta W_{int} = -\int_L N\,(x) \delta\varepsilon_0(x) dx \tag{5.43}$$

Berdasarkan ekspresi kompatibilitas yang menghubungkan deformasi (regangan resultan) dengan medan perpindahan (5.36), menjadi jelas bahwa medan perpindahan virtual yang "secara kinematik dapat diterima" harus memenuhi persyaratan berikut:

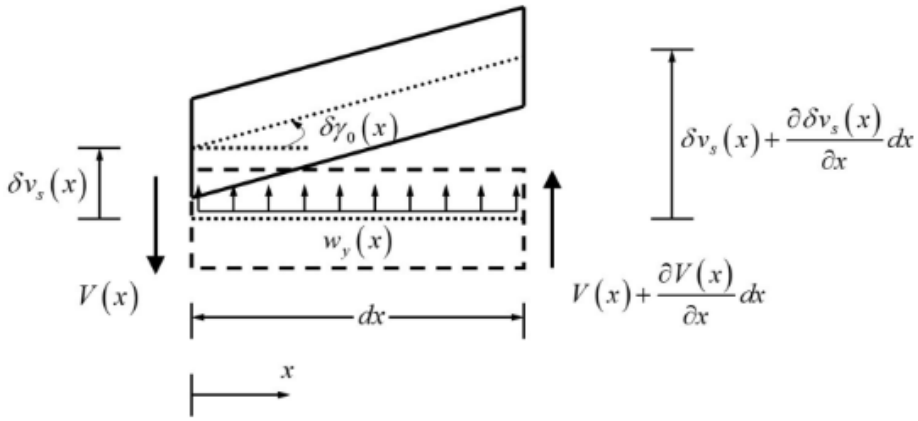
1. Medan perpindahan virtual harus kontinu dan harus memiliki turunan pertama yang kontinu di setiap titik di dalam elemen. Dengan kata lain, ia memiliki kontinuitas C0.
2. Besarnya perpindahan virtual harus berada dalam rentang validitas teori perpindahan kecil.

Jika medan perpindahan virtual memenuhi persyaratan di atas serta batas geometris (esensial), maka ia menjadi medan perpindahan virtual yang "secara geometris dapat diterima". Medan regangan virtual yang "secara kinematik dapat diterima" dan "secara geometris dapat diterima" didefinisikan sebagai medan yang terkait dengan medan perpindahan virtual yang "secara kinematik dapat diterima" dan "secara geometris dapat diterima", masing-masing melalui hubungan kompatibilitas (5.36).

Respons Geser: Prinsip Pergeseran Virtual

Tinjau segmen infinitesimal dx dari elemen berbeban vertikal dengan panjang L seperti ditunjukkan pada Gambar 5.13. Segmen ini berada dalam keseimbangan di bawah aksi gaya-gaya internal $V(x)$ dan $V(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x} dx$ serta beban terdistribusi eksternal $w_y(x)$. Perlu dicatat bahwa perpindahan dan deformasi yang berhubungan dengan gaya-gaya ini masing-masing dikualifikasikan sebagai perpindahan nyata dan deformasi nyata. Seluruh segmen infinitesimal ini dianggap sebagai benda bebas dan terganggu oleh perpindahan maya $\delta v_s(x)$ pada ujung kiri dan oleh $\delta v_s(x) + \frac{\partial \delta v_s(x)}{\partial x} dx$ pada ujung kanan. Sebagai konsekuensinya, kerja maya yang dihasilkan adalah:

$$\delta W_{ext} = \left(w_y(x)dx\right)\delta v_s(x) - V(x)\delta v_s(x) + \left(V(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x}dx\right)\left(\delta v_s(x) + \frac{\partial \delta v_s(x)}{\partial x}dx\right) \quad (5.44)$$



Gambar 5.13 Energi Regangan Virtual δ dari Segmen Infinitesimal: Respons Geser.

$$\delta W_{ext} = \left(w_y(x)dx\right)\delta v_s(x) - V(x)\delta v_s(x) + V(x)\delta v_s(x) +$$
$$V(x)\frac{\partial \delta v_s(x)}{\partial x}dx + \left(\underbrace{\frac{\partial V(x)}{\partial x}dx}_{-w_y(x)}\right)\delta v_s(x) + \underbrace{\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial \delta v_s(x)}{\partial x}dx\right)}_{\text{suku orde ke-2}} \quad (5.45)$$

Dengan menerapkan persamaan kesetimbangan vertikal (2/2.13) pada segmen balok dan mengabaikan suku orde kedua, Persamaan (5.45) ditulis sebagai berikut:

$$\delta W_{ext} = V(x)\frac{\partial \delta v_s(x)}{\partial x}dx \quad (5.46)$$

Berdasarkan persamaan (5.31), dapat disimpulkan bahwa:

$$\delta \overline{U}_{int} = V(x)\frac{\partial \delta v_s(x)}{\partial x}dx \quad (5.47)$$

dengan $\delta \overline{U}_{int}$ menyatakan energi regangan maya dari segmen infinitesimal dx. Pada Bab 2, regangan geser didefinisikan sebagai laju perubahan perpindahan vertikal terhadap koordinat aksial.

$$\gamma_0(x) = \frac{\partial v_s(x)}{\partial x} \quad (5.48)$$

Dengan cara yang sama, regangan geser maya yang kompatibel dengan perpindahan maya $\delta v_s(x)$ didefinisikan sebagai:

$$\delta\gamma_0(x) = \frac{\partial \delta v_s(x)}{\partial x} \tag{5.49}$$

Oleh karena itu, Persamaan (5.47) ditulis sebagai berikut:

$$\delta \overline{U}_{int} = V(x)\delta\gamma_0(x)dx \tag{5.50}$$

Untuk seluruh panjang elemen berbeban vertikal, energi regangan maya δU_{int} adalah:

$$\delta U_{int} = \int_L \delta\, \overline{U}_{int} = \int_L V\,(x)\delta\gamma_0(x)dx \tag{5.51}$$

Jika hanya material elastis linear yang ditinjau, hubungan kekakuan penampang berikut

$$V(x) = GA_s(x)\gamma_0(x) \tag{5.52}$$

disubstitusikan ke dalam Pers. (5.51) dan energi regangan virtual dinyatakan sepenuhnya dalam bentuk regangan (deformasi) sebagai berikut:

$$\delta U_{int} = \int_L \delta\, \overline{U}_{int} = \int_L \gamma_0\,(x)GA_s(x)\delta\gamma_0(x)dx \tag{5.53}$$

Perlu dicatat bahwa $\gamma_0(x)$ adalah regangan geser nyata yang berhubungan dengan gaya geser nyata $V(x)$ melalui hubungan konstitutif. Dengan mengingat kembali hubungan regangan geser-perpindahan dari Pers. (5.48) dan (5.49), energi regangan maya dinyatakan sepenuhnya dalam bentuk perpindahan vertikal sebagai:

$$\delta U_{int} = \int_L \frac{\partial v_s(x)}{\partial x} GA_s(x) \frac{\partial \delta v_s(x)}{\partial x} dx \tag{5.54}$$

Berdasarkan Pers. (5.30), kerja virtual internal dituliskan sebagai:

$$\delta W_{int} = -\int_L V\,(x)\delta\gamma_0(x)dx \tag{5.55}$$

Berdasarkan persamaan kompatibilitas yang menghubungkan deformasi (regangan resultan) dengan medan perpindahan (5.48), menjadi jelas bahwa medan perpindahan virtual yang "dapat diterima secara kinematik" harus memenuhi persyaratan berikut:

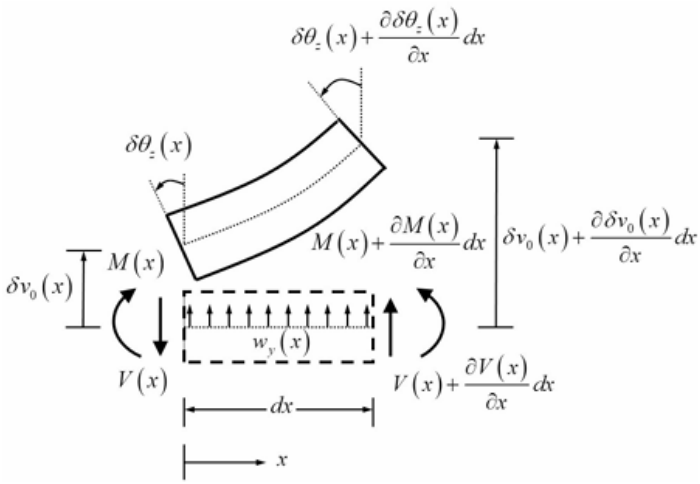
1. Medan perpindahan virtual harus kontinu dan memiliki turunan pertama yang kontinu di setiap titik di dalam elemen tersebut. Dengan kata lain, medan ini memiliki kontinuitas C^0.

2. Besaran perpindahan virtual harus berada dalam rentang keberlakuan teori perpindahan kecil.

Jika medan perpindahan virtual memenuhi persyaratan di atas serta syarat batas geometris (esensial), maka medan tersebut menjadi medan perpindahan virtual yang "dapat diterima secara geometris". Medan regangan virtual yang "dapat diterima secara kinematik" dan "dapat diterima secara geometris" didefinisikan sebagai medan yang masing-masing berkaitan dengan medan perpindahan virtual yang "dapat diterima secara kinematik" dan "dapat diterima secara geometris" melalui hubungan kompatibilitas (5.48).

Respons Lentur: Prinsip Perpindahan Virtual

Tinjau segmen infinitesimal dx dari elemen berbeban vertikal dengan panjang L seperti ditunjukkan pada Gambar 5.14. Segmen ini berada dalam keseimbangan di bawah aksi gaya-gaya internal ($V(x)$, $V(x)+\frac{\partial V(x)}{\partial x}dx$, $M(x)$, dan $M(x)+\frac{\partial M(x)}{\partial x}dx$) serta beban terdistribusi eksternal $w_y(x)$. Perlu dicatat bahwa perpindahan dan deformasi yang berhubungan dengan gaya-gaya ini masing-masing dikualifikasikan sebagai perpindahan nyata dan deformasi nyata. Seluruh segmen infinitesimal ini dianggap sebagai benda bebas



Gambar 5.14 Energi Regangan Virtual $\delta\overline{U}_{int}$ dari Segmen Infinitesimal: Respons Lentur.

$$\delta W_{ext} = \left(w_y(x)dx\right)\delta v_0(x) - V(x)\delta v_0(x) + \left(V(x)+\frac{\partial V(x)}{\partial x}dx\right)\left(\delta v_0(x)+\frac{\partial\delta v_0(x)}{\partial x}dx\right) + \left(M(x)+\frac{\partial M(x)}{\partial x}dx\right)\left(\delta\theta_z(x)+\frac{\partial\delta\theta_z(x)}{\partial x}dx\right) \quad (5.56)$$

$$\delta W_{ext} = \left[\begin{array}{l} (w_y(x)dx)\delta v_0(x) - V(x)\delta v_0(x) - M(x)\delta\theta_z(x) + V(x)\delta v_0(x) \quad + \\ V(x)\dfrac{\partial \delta v_0(x)}{\partial x}dx + \underbrace{\left(\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}dx\right)}_{-w_y(x)}\delta v_0(x) + \underbrace{\left(\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}dx\right)\left(\dfrac{\partial \delta v_0(x)}{\partial x}dx\right)}_{\text{2nd order term}} \quad + \\ M(x)\delta\theta_z(x) + M(x)\dfrac{\partial \delta\theta_z(x)}{\partial x}dx + \underbrace{\left(\dfrac{\partial M(x)}{\partial x}dx\right)}_{-V(x)}\delta\theta_z(x) \quad + \\ \underbrace{\left(\dfrac{\partial M(x)}{\partial x}dx\right)\left(\dfrac{\partial \delta\theta_z(x)}{\partial x}dx\right)}_{\text{2nd order term}} \end{array} \right] \quad (5.57)$$

Dengan menerapkan persamaan keseimbangan diferensial (2/2.13-14) dari segmen balok, mendefinisikan $\delta\theta_z(x) = \frac{\partial \delta v_0(x)}{\partial x}$, dan mengabaikan suku-suku orde ke-2, Pers. (5.57) ditulis sebagai:

$$\delta W_{ext} = M(x)\frac{\partial \delta\theta_z(x)}{\partial x}dx \quad (5.58)$$

Berdasarkan persamaan (5.31), dapat disimpulkan bahwa:

$$\delta \overline{U}_{int} = M(x)\frac{\partial \delta\theta_z(x)}{\partial x}dx \quad (5.59)$$

dengan $\delta \overline{U}_{int}$ menyatakan energi regangan maya dari segmen infinitesimal dx. Pada Bab 2, regangan lentur (kelengkungan) didefinisikan sebagai laju perubahan rotasi terhadap koordinat aksial.

$$\kappa_0(x) = \frac{\partial \theta_z(x)}{\partial x} \quad (5.60)$$

Karena rotasi didefinisikan sebagai turunan pertama dari perpindahan vertikal ($\theta_z(x) = \frac{\partial v_0(x)}{\partial x}$), kelengkungan lentur didefinisikan dalam bentuk perpindahan vertikal sebagai:

$$\kappa_0(x) = \frac{\partial^2 v_0(x)}{\partial x^2} \quad (5.61)$$

Dengan cara yang sama, regangan lentur maya yang kompatibel dengan perpindahan vertikal maya $\delta v_0(x)$ didefinisikan sebagai:

$$\delta\kappa_0(x) = \frac{\partial^2 \delta v_0(x)}{\partial x^2} \quad (5.62)$$

Oleh karena itu, Persamaan (5.59) ditulis sebagai:

$$\delta \overline{U}_{int} = M(x)\delta\kappa_0(x)dx \tag{5.63}$$

Untuk seluruh panjang balok berbeban vertikal, energi regangan maya δU_{int} adalah:

$$\delta U_{int} = \int_L \delta\, \overline{U}_{int} = \int_L M\,(x)\delta\kappa_0(x)dx \tag{5.64}$$

Jika hanya material elastis linear yang ditinjau, hubungan kekakuan penampang berikut

$$M(x) = IE(x)\kappa_0(x) \tag{5.65}$$

disubstitusikan ke dalam Pers. (5.64) dan energi regangan virtual dinyatakan sepenuhnya dalam bentuk regangan (deformasi) sebagai berikut:

$$\delta U_{int} = \int_L \delta\, \overline{U}_{int} = \int_L \kappa_0\,(x)IE(x)\delta\kappa_0(x)dx \tag{5.66}$$

Perlu dicatat bahwa $\kappa_0(x)$ adalah regangan lentur nyata yang berhubungan dengan momen nyata $M(x)$ melalui hubungan konstitutif. Dengan mengingat kembali hubungan regangan lentur-perpindahan dari Pers. (5.61) dan (5.62), energi regangan maya dinyatakan sepenuhnya dalam bentuk perpindahan vertikal sebagai:

$$\delta U_{int} = \int_L \delta\, \overline{U}_{int} = \int_L \frac{\partial^2 v_0(x)}{\partial x^2} IE(x) \frac{\partial^2 \delta v_0(x)}{\partial x^2}\, dx \tag{5.67}$$

Berdasarkan Pers. (5.30), kerja virtual internal dituliskan sebagai:

$$\delta W_{int} = -\int_L M\,(x)\delta\kappa_0(x)dx \tag{5.68}$$

Berdasarkan persamaan kompatibilitas yang menghubungkan deformasi (regangan resultan) dengan medan perpindahan (5.61), menjadi jelas bahwa medan perpindahan virtual yang "dapat diterima secara kinematik" harus memenuhi persyaratan berikut:

1. Medan perpindahan virtual beserta turunan pertamanya harus kontinu dan memiliki turunan kedua yang kontinu di setiap titik di dalam elemen. Dengan kata lain, medan tersebut memiliki kontinuitas C1.
2. Besaran perpindahan virtual harus berada dalam rentang keberlakuan teori perpindahan kecil.

Jika medan perpindahan virtual memenuhi persyaratan di atas serta syarat batas geometris (*esensial*), maka medan tersebut menjadi medan perpindahan virtual yang "dapat diterima secara geometris". Medan regangan virtual yang "dapat diterima secara kinematik" dan "dapat

diterima secara geometris" didefinisikan sebagai medan yang masing-masing berkaitan dengan medan perpindahan virtual yang "dapat diterima secara kinematik" dan "dapat diterima secara geometris" melalui hubungan kompatibilitas (5.61). Persamaan (5.41), (5.51), dan (5.64) membentuk ekspresi energi regangan virtual untuk elemen rangka Timoshenko bidang dan dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\delta U_{int} = \int_L \delta\, \varepsilon_{TB}(x)^T \sigma_{TB}(x) dx \tag{5.69}$$

di mana vektor $\delta\varepsilon_{TB}(x)$ berisi regangan resultan maya dan didefinisikan sebagai:

$$\delta\varepsilon_{TB}(x) = \lfloor \delta\varepsilon_0(x) \quad \delta\kappa_0(x) \quad \delta\gamma_0(x) \rfloor^T \tag{5.70}$$

dan vektor $\sigma_{TB}(x)$ berisi tegangan resultan nyata dan didefinisikan sebagai:

$$\sigma_{TB}(x) = \lfloor N(x) \quad M(x) \quad V(x) \rfloor^T \tag{5.71}$$

Jika hanya material elastis linear yang ditinjau, maka matriks kekakuan penampang berikut

$$\begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \\ V(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA(x) & 0 & 0 \\ 0 & EI(x) & 0 \\ 0 & 0 & GA_s(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0(x) \\ \kappa_0(x) \\ \gamma_0(x) \end{Bmatrix} \text{ atau } \boldsymbol{\sigma}_{TB}(x) = \mathbf{E}_{TB}(x)\boldsymbol{\varepsilon}_{TB}(x) \tag{5.72}$$

disubstitusikan ke dalam Pers. (5.69) dan energi regangan virtual dinyatakan sepenuhnya dalam bentuk regangan (regangan resultan) sebagai berikut:

$$\delta U_{int} = \int_L \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_0(x) \\ \delta\kappa_0(x) \\ \delta\gamma_0(x) \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EA(x) & 0 & 0 \\ 0 & EI(x) & 0 \\ 0 & 0 & GA_s(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0(x) \\ \kappa_0(x) \\ \gamma_0(x) \end{Bmatrix} dx \tag{5.73}$$

atau dalam bentuk ringkas sebagai:

$$\delta U_{int} = \int_L \delta\, \varepsilon_{TB}(x)^T \mathbf{E}_{TB}(x) \varepsilon_{TB}(x) dx \tag{5.74}$$

Persamaan (2/2.33-35) menghubungkan deformasi penampang (regangan resultan) dengan perpindahan penampang dan dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_0(x)\\ \kappa_0(x)\\ \gamma_0(x)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_0(x)\\ v_0(x)\\ \alpha_0(x)\end{Bmatrix} \text{ atau } \boldsymbol{\varepsilon}_{TB}(x)=\mathbf{L}_{TB}\mathbf{u}_{TB}(x) \qquad (5.75)$$

Dengan cara yang sama, ekspresi matriks yang menghubungkan deformasi penampang virtual (regangan resultan) dengan perpindahan penampang virtual adalah

$$\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon_0(x)\\ \delta\kappa_0(x)\\ \delta\gamma_0(x)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta u_0(x)\\ \delta v_0(x)\\ \delta\alpha_0(x)\end{Bmatrix} \text{ atau } \delta\varepsilon_{TB}(x)=\mathbf{L}_{TB}\delta\mathbf{u}_{TB}(x) \qquad (5.76)$$

Dengan menyubstitusikan Pers. (5.75) dan (5.76) ke dalam (5.74), energi regangan virtual dinyatakan sepenuhnya dalam bentuk perpindahan sebagai berikut:

$$\delta U_{int}=\int_L\begin{Bmatrix}\delta u_0(x)\\ \delta v_0(x)\\ \delta\alpha_0(x)\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}EA(x) & 0 & 0\\ 0 & EI(x) & 0\\ 0 & 0 & GA_s(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_0(x)\\ v_0(x)\\ \alpha_0(x)\end{Bmatrix}dx \qquad (5.77)$$

atau dalam bentuk ringkas sebagai:

$$\delta U_{int}=\int_L\delta\,\mathbf{u}_{TB}(x)^T\mathbf{L}_{TB}^T\mathbf{E}_{TB}(x)\mathbf{L}_{TB}\mathbf{u}_{TB}(x)dx \qquad (5.78)$$

Untuk elemen rangka Euler-Bernoulli, efek geser diabaikan. Oleh karena itu, energi regangan virtualnya dinyatakan sebagai:

$$\delta U_{int}=\int_L\delta\,\varepsilon_{EB}(x)^T\boldsymbol{\sigma}_{EB}(x)dx=\int_L\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon_0(x)\\ \delta\kappa_0(x)\end{Bmatrix}^T\begin{Bmatrix}N(x)\\ M(x)\end{Bmatrix}dx \qquad (5.79)$$

di mana vektor $\delta\varepsilon_{EB}(x)$ berisi regangan resultan maya dan didefinisikan sebagai:

$$\delta\varepsilon_{EB}(x)=\lfloor\delta\varepsilon_0(x)\quad\delta\kappa_0(x)\rfloor^T \qquad (5.80)$$

dan vektor $\sigma_{EB}(x)$ berisi tegangan resultan nyata dan didefinisikan sebagai:

$$\boldsymbol{\sigma}_{EB}(x) = \lfloor N(x) \quad M(x) \rfloor^T \tag{5.81}$$

Jika hanya material elastis linear yang ditinjau, maka matriks kekakuan penampang berikut

$$\begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA(x) & 0 \\ 0 & EI(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0(x) \\ \kappa_0(x) \end{Bmatrix} \text{ atau } \boldsymbol{\sigma}_{EB}(x) = \mathbf{E}_{EB}(x)\boldsymbol{\varepsilon}_{EB}(x) \tag{5.82}$$

disubstitusikan ke dalam Pers. (5.79) dan energi regangan virtual dinyatakan sepenuhnya dalam bentuk regangan (regangan resultan) sebagai:

$$\delta U_{int} = \int_L \delta\, \varepsilon_{EB}(x)^T \mathbf{E}_{EB}(x)\varepsilon_{EB}(x)dx = \int_L \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_0(x) \\ \delta\kappa_0(x) \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EA(x) & 0 \\ 0 & EI(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0(x) \\ \kappa_0(x) \end{Bmatrix} dx \tag{5.83}$$

Persamaan (2/2.3) dan (2/2.17) menghubungkan deformasi penampang (regangan resultan) dengan perpindahan penampang dan dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

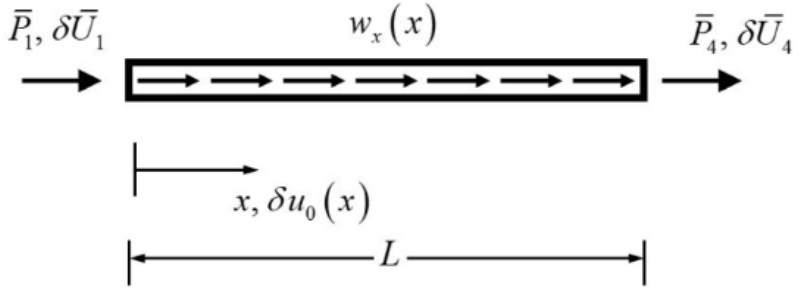
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_0(x) \\ \kappa_0(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{Bmatrix} \text{ atau } \boldsymbol{\varepsilon}_{EB}(x) = \mathbf{L}_{EB}\mathbf{u}_{EB}(x) \tag{5.84}$$

Dengan cara yang sama, ekspresi matriks yang menghubungkan deformasi penampang virtual (regangan resultan) dengan perpindahan penampang virtual adalah

$$\begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_0(x) \\ \delta\kappa_0(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_0(x) \\ \delta v_0(x) \end{Bmatrix} \text{ atau } \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{EB}(x) = \mathbf{L}_{EB}\delta\mathbf{u}_{EB}(x) \tag{5.85}$$

Dengan menyubstitusikan Pers. (5.84) dan (5.85) ke dalam (5.83), energi regangan virtual dinyatakan sepenuhnya dalam bentuk perpindahan sebagai berikut:

$$\delta U_{int} = \int_L \begin{Bmatrix} \delta u_0(x) \\ \delta v_0(x) \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} EA(x) & 0 \\ 0 & EI(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{Bmatrix} dx \tag{5.86}$$



Gambar 5.15 Kerja Virtual Eksternal: Batang.

atau dalam bentuk ringkas sebagai:

$$\delta U_{int} = \int_L \delta\, \mathbf{u}_{EB}(x)^T \mathbf{L}_{EB}^T \mathbf{E}_{EB}(x) \mathbf{L}_{EB} \mathbf{u}_{EB}(x) dx \tag{5.87}$$

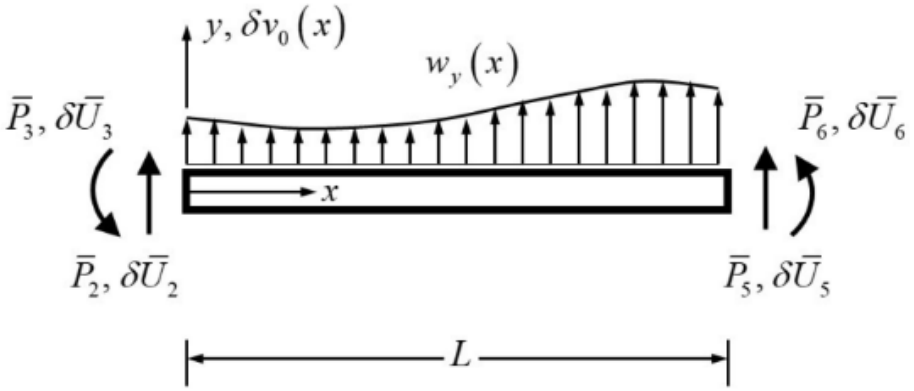
5.5 KERJA VIRTUAL EKSTERNAL

Pada bagian sebelumnya, ekspresi energi regangan maya untuk beberapa aksi struktural telah diturunkan. Pada bagian ini, tujuan utamanya adalah menurunkan ekspresi kerja virtual eksternal akibat beberapa pembebanan eksternal. Pertimbangkan anggota (batang) yang dibebani secara aksial pada Gambar 5.15. Anggota ini berada dalam keseimbangan di bawah sistem gaya nyata: gaya ujung eksternal ($\bar{P}_1$ dan $\bar{P}_4$) serta beban anggota $w_x(x)$. Kerja virtual eksternal yang dilakukan oleh sistem gaya nyata pada perpindahan ujung maya ($\delta\bar{U}_1$ dan $\delta\bar{U}_4$) dan medan perpindahan maya $\delta u_0(x)$ adalah:

$$\delta W_{ext} = \delta\bar{U}_1\bar{P}_1 + \delta\bar{U}_4\bar{P}_4 + \int_L \delta\, u_0(x) w_x(x) dx \tag{5.88}$$

Pertimbangkan anggota yang dibebani secara vertikal (balok) pada Gambar 5.16. Anggota ini berada dalam keseimbangan di bawah sistem gaya nyata: gaya ujung eksternal ($\bar{P}_2$ dan $\bar{P}_5$), momen ujung eksternal ($\bar{P}_3$ dan $\bar{P}_6$), serta beban anggota $w_y(x)$. Kerja virtual eksternal yang dilakukan oleh sistem gaya nyata pada perpindahan ujung maya ($\delta\bar{U}_2$ dan $\delta\bar{U}_5$), rotasi ujung maya ($\delta\bar{U}_3$ dan $\delta\bar{U}_6$), dan medan perpindahan maya $\delta v_0(x)$ adalah:

$$\delta W_{ext} = \delta\bar{U}_2\bar{P}_2 + \delta\bar{U}_3\bar{P}_3 + \delta\bar{U}_5\bar{P}_5 + \delta\bar{U}_6\bar{P}_6 + \int_L \delta\, v_0(x) w_y(x) dx \tag{5.89}$$



Gambar 5.16 Kerja Virtual Luar: Balok.

Persamaan (5.88) dan (5.89) membentuk ekspresi kerja maya untuk elemen rangka bidang dan dapat dituliskan bersama sebagai: (5.90)

$$\delta W_{ext} = \delta\bar{U}_1\bar{P}_1 + \delta\bar{U}_2\bar{P}_2 + \delta\bar{U}_3\bar{P}_3 + \delta\bar{U}_4\bar{P}_4 + \delta\bar{U}_5\bar{P}_5 + \delta\bar{U}_6\bar{P}_6 + \int_L \delta\, u_0(x) w_x(x) dx + \int_L \delta\, v_0(x) w_y(x) dx \tag{5.90}$$

atau dalam bentuk matriks sebagai:

$$\delta W_{ext} = \delta\bar{\mathbf{U}}^T\bar{\mathbf{P}} + \int_L \delta\, \mathbf{u}(x)^T \mathbf{w}(x) dx \tag{5.91}$$

di mana vektor perpindahan ujung anggota $\bar{\mathbf{U}}$ didefinisikan sebagai $\lfloor\bar{U}_1 \quad \bar{U}_2 \quad \bar{U}_3 \quad \bar{U}_4 \quad \bar{U}_5 \quad \bar{U}_6\rfloor^T$; vektor gaya ujung anggota $\bar{\mathbf{P}}$ didefinisikan sebagai $\lfloor\bar{P}_1 \quad \bar{P}_2 \quad \bar{P}_3 \quad \bar{P}_4 \quad \bar{P}_5 \quad \bar{P}_6\rfloor^T$; vektor medan perpindahan anggota $\mathbf{u}(x)$ didefinisikan sebagai $\lfloor u_0(x) \quad v_0(x)\rfloor^T$; dan vektor beban anggota $\mathbf{w}(x)$ didefinisikan sebagai $\lfloor w_x(x) \quad w_y(x)\rfloor^T$.

5.6 PRINSIP PERPINDAHAN VIRTUAL

Pada dua bagian sebelumnya, telah diturunkan persamaan untuk energi regangan virtual dan kerja virtual eksternal pada elemen rangka akibat berbagai jenis pembebanan. Pada bagian ini, disusun persamaan perpindahan virtual untuk beberapa jenis elemen rangka. Perlu dicatat bahwa persamaan perpindahan virtual merupakan cara alternatif untuk menyatakan persamaan kesetimbangan.

Elemen Batang:

Berdasarkan Pers. (5.88) dan (5.39), persamaan total kerja virtual (5.31) untuk elemen batang dapat ditulis sebagai berikut:

$$\delta W = \underbrace{\delta\bar{U}_1\bar{P}_1 + \delta\bar{U}_4\bar{P}_4 + \int_L \delta\, u_0(x) w_x(x) dx}_{\delta W_{ext}} - \underbrace{\int_L N(x)\delta\varepsilon_0(x) dx}_{\delta U_{int}} = 0 \tag{5.92}$$

Elemen Balok Timoshenko:

Berdasarkan Persamaan (5.89), (5.63), dan (5.51), ekspresi kerja virtual total (5.31) untuk elemen balok Timoshenko dapat ditulis sebagai berikut:

$$\delta W = \left[\underbrace{\delta \bar{U}_2 \bar{P}_2 + \delta \bar{U}_3 \bar{P}_3 + \delta \bar{U}_5 \bar{P}_5 + \delta \bar{U}_6 \bar{P}_6 + \int_L \delta\, v_0(x) w_y(x) dx}_{\delta W_{ext}} - \underbrace{\left(\int_L V(x) \delta \gamma_0(x) dx + \int_L M(x) \delta \kappa_0(x) dx \right)}_{\delta U_{int}} \right] = 0 \quad (5.93)$$

Elemen Balok Euler-Bernoulli:

Berdasarkan Persamaan (5.89) dan (5.63), ekspresi kerja maya total (5.31) untuk elemen balok Euler-Bernoulli dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\delta W = \underbrace{\delta \bar{U}_2 \bar{P}_2 + \delta \bar{U}_3 \bar{P}_3 + \delta \bar{U}_5 \bar{P}_5 + \delta \bar{U}_6 \bar{P}_6 + \int_L \delta\, v_0(x) w_y(x) dx}_{\delta W_{ext}} - \underbrace{\left(\int_L M(x) \delta \kappa_0(x) dx \right)}_{\delta U_{int}} = 0 \quad (5.94)$$

Elemen Rangka Timoshenko:

Berdasarkan Persamaan (5.90), (5.39), (5.51), dan (5.63), ekspresi kerja maya total (5.31) untuk elemen rangka Timoshenko dapat ditulis sebagai berikut:

$$\delta W = \left[\underbrace{\delta \bar{U}_1 \bar{P}_1 + \delta \bar{U}_2 \bar{P}_2 + \delta \bar{U}_3 \bar{P}_3 + \delta \bar{U}_4 \bar{P}_4 + \delta \bar{U}_5 \bar{P}_5 + \delta \bar{U}_6 \bar{P}_6 + \int_L \delta\, u_0(x) w_x(x) dx + \int_L \delta\, v_0(x) w_y(x) dx}_{\delta W_{ext}} \right.$$
$$\left. - \underbrace{\left[\int_L N(x) \delta \varepsilon_0(x) dx + \int_L V(x) \delta \gamma_0(x) dx + \int_L M(x) \delta \kappa_0(x) dx \right]}_{\delta U_{int}} \right] = 0 \quad (5.95)$$

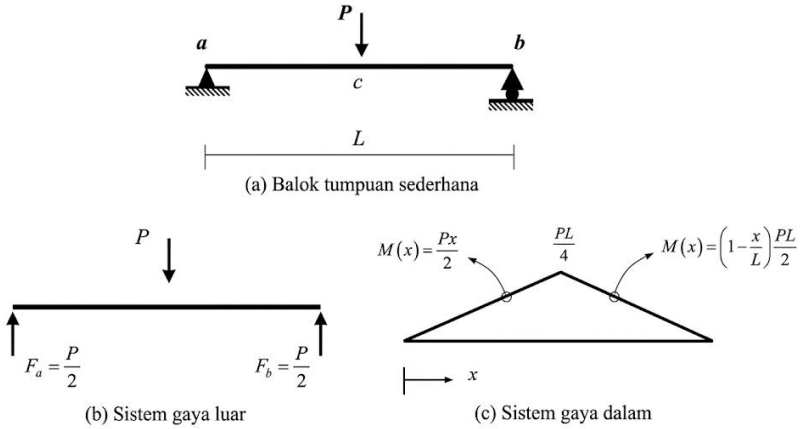
dalam bentuk matriks sebagai:

$$\delta W = \underbrace{\delta \bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{P}} + \int_L \delta\, \mathbf{u}(x)^T \mathbf{w}(x) dx}_{\delta W_{ext}} - \underbrace{\int_L \delta\, \boldsymbol{\varepsilon}_{TB}(x)^T \boldsymbol{\sigma}_{TB}(x) dx}_{\delta U_{int}} = 0 \quad (5.96)$$

Elemen Rangka Euler-Bernoulli:

Berdasarkan Persamaan (5.90), (5.39), dan (5.63), ekspresi kerja maya total (5.31) untuk elemen rangka Euler-Bernoulli dapat ditulis sebagai berikut:

$$\delta W = \left[\underbrace{\begin{bmatrix} \delta \bar{U}_1 \bar{P}_1 + \delta \bar{U}_2 \bar{P}_2 + \delta \bar{U}_3 \bar{P}_3 + \delta \bar{U}_4 \bar{P}_4 + \delta \bar{U}_5 \bar{P}_5 + \delta \bar{U}_6 \bar{P}_6 \\ + \int_L \delta\, u_0(x) w_x(x) dx + \int_L \delta\, v_0(x) w_y(x) dx \end{bmatrix}}_{\delta W_{ext}} - \underbrace{\left[\int_L N(x) \delta \varepsilon_0(x) dx + \int_L M(x) \delta \kappa_0(x) dx \right]}_{\delta U_{int}} \right] = 0 \quad (5.97)$$



Gambar 5.17 Contoh 5.2.

dalam bentuk matriks sebagai:

$$\delta W = \underbrace{\delta \bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{P}} + \int_L \delta\, \mathbf{u}(x)^T \mathbf{w}(x) dx}_{\delta W_{ext}} - \underbrace{\int_L \delta\, \boldsymbol{\varepsilon}_{EB}(x)^T \boldsymbol{\sigma}_{EB}(x) dx}_{\delta U_{int}} = 0 \qquad (5.98)$$

Contoh 5.2

Tinjau balok dengan tumpuan sederhana yang dibebani gaya terpusat P di tengah bentang, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 5.17 a. Sistem gaya luar dan gaya dalam yang berada dalam keadaan setimbang masing-masing disajikan pada Gambar 5.17 b dan c. Verifikasikan bahwa beban terpusat P dapat ditentukan menggunakan prinsip perpindahan maya berdasarkan perpindahan-perpindahan maya berikut:

$(a) \quad \delta v_0(x) = -\frac{16}{5L^4}(L^3 x - 2Lx^3 + x^4)$

$(b) \quad \delta v_0(x) = -\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

$(c) \quad \delta v_0(x) = -\left(\frac{1}{2} - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)$

Solusi:

$(a) \quad \delta v_0(x) = -\frac{16}{5L^4}(L^3 x - 2Lx^3 + x^4)$

Medan perpindahan virtual yang diberikan ini dapat diterima secara kinematik karena memenuhi persyaratan berikut:

1. Medan perpindahan virtual harus kontinu dan memiliki turunan pertama yang kontinu di setiap titik di dalam elemen.

2. Besaran perpindahan virtual harus berada dalam rentang keberlakuan teori perpindahan kecil.

Medan ini juga memenuhi syarat batas geometris (esensial):

$$\delta v_0(0) = 0 \text{ dan } \delta v_0(L) = 0 \rightarrow \delta v_a = 0 \text{ and } \delta v_b = 0$$

Oleh karena itu, medan perpindahan virtual ini dapat diterima secara geometris. Kelengkungan lentur virtual (regangan resultan) yang kompatibel dengan perpindahan virtual tersebut didefinisikan sebagai:

$$\delta\kappa_0(x) = \frac{\partial^2 \delta v_0(x)}{\partial x^2} = -16\frac{(-12Lx + 12x^2)}{5L^4}$$

Usaha virtual eksternal didefinisikan sebagai:

$$\delta W_{ext} = F_c \underbrace{\delta v_c}_{-1} + F_a \underbrace{\delta v_a}_{0} + F_b \underbrace{\delta v_b}_{0}$$

Kerja virtual internal didefinisikan sebagai:

$$\delta W_{int} = -\int_L M\,(x)\delta\kappa_0(x)dx$$

$$\delta W_{int} = -\delta U_{int} = -\left[\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{Px}{2}\left(-16\frac{(-12Lx + 12x^2)}{5L^4}\right)dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right)\frac{PL}{2}\left(-16\frac{(-12Lx + 12x^2)}{5L^4}\right)dx\right] = -P$$

Persamaan perpindahan maya:

$$\delta W = \delta W_{ext} + \delta W_{int} = -F_c - P = 0 \rightarrow F_c = -P = P \downarrow$$

(*b*) $\boldsymbol{\delta v_0(x) = -\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}$

Medan perpindahan virtual yang diberikan ini dapat diterima secara kinematik karena memenuhi persyaratan berikut:

1. Medan perpindahan virtual harus kontinu dan harus memiliki turunan pertama yang kontinu di setiap titik di dalam elemen.
2. Besarnya perpindahan virtual harus berada dalam rentang validitas teori perpindahan kecil.

Hal ini juga memenuhi batasan geometris (*esensial*):

$$\boldsymbol{\delta v_0(0) = 0 \text{ and } \delta v_0(L) = 0 \rightarrow \delta v_a = 0 \text{ and } \delta v_b = 0}$$

Oleh karena itu, bidang perpindahan maya ini dapat diterima secara geometris.
Kelengkungan lentur maya (regangan resultan) yang sesuai dengan perpindahan maya adalah didefinisikan sebagai:

$$\delta\kappa_0(x) = \frac{\partial^2 \delta v_0(x)}{\partial x^2} = \frac{\pi^2}{L^2}\sin\frac{\pi x}{L}$$

Pekerjaan virtual eksternal didefinisikan sebagai:

$$\delta W_{ext} = F_c \underbrace{\delta v_c}_{-1} + F_a \underbrace{\delta v_a}_{0} + F_b \underbrace{\delta v_b}_{0}$$

Pekerjaan virtual internal didefinisikan sebagai:

$$\delta W_{int} = -\int_0^L M\,(x)\delta\kappa_0(x)dx$$

$$\delta W_{int} = -\delta U_{int} = -\left[\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{Px}{2}\left(\frac{\pi^2}{L^2}\sin\frac{\pi x}{L}\right)dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{PL}{2}\left(\frac{\pi^2}{L^2}\sin\frac{\pi x}{L}\right)dx\right] = -P$$

Persamaan perpindahan virtual:

$$\delta W = \delta W_{ext} + \delta W_{int} = -F_c - P = 0 \rightarrow F_c = -P = P\downarrow$$

Pembahasan (a) dan (b): Untuk memperoleh nilai "eksak" dari beban tengah bentang P, kita cukup menggunakan medan perpindahan virtual yang *"dapat diterima secara kinematis"* (*kinematically admissible*). Hal ini berlaku asalkan sistem gaya nyata (baik internal maupun eksternal) memenuhi persamaan diferensial pengatur:

$$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} - w_y(x) = 0$$

serta kondisi batas gaya. Perlu diingat bahwa persamaan perpindahan virtual adalah cara alternatif untuk menyatakan persamaan kesetimbangan. Perlu dicatat bahwa kedua pilihan medan perpindahan virtual ini lebih disukai karena mengeliminasi kerja virtual eksternal yang disumbangkan oleh reaksi perletakan. Oleh karena itu, tidak perlu menentukan reaksi perletakan terlebih dahulu.

$(c)\quad \delta v_0(x) = -\left(\frac{1}{2} - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)$

Medan perpindahan virtual yang diberikan ini dapat diterima secara kinematik karena memenuhi persyaratan berikut:

1. *Medan perpindahan virtual harus kontinu dan memiliki turunan pertama yang kontinu di setiap titik di dalam elemen.*
2. *Besaran perpindahan virtual harus berada dalam rentang keberlakuan teori perpindahan kecil.*

Medan ini juga memenuhi syarat batas geometris (*esensial*):

$$\delta v_0(0) = 0.5 \text{ dan } \delta v_0(L) = -0.5 \rightarrow \delta v_a = 0.5 \text{ and } \delta v_b = -0.5$$

Oleh karena itu, medan perpindahan virtual ini dapat diterima secara geometris. Kelengkungan lentur virtual (regangan resultan) yang kompatibel dengan perpindahan virtual tersebut didefinisikan sebagai:

$$\delta\kappa_0(x) = \frac{\partial^2 \delta v_0(x)}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{4L^2}$$

Usaha virtual eksternal didefinisikan sebagai:

$$\delta W_{ext} = F_c \delta v_c + F_a \delta v_a + F_b \delta v_b$$

$$\delta v_c = 0.207107$$

$$\delta W_{ext} = (0.207107)F_c + (0.5)\frac{P}{2} + (-0.5)\frac{P}{2} = 0.207107F_c$$

Kerja virtual internal didefinisikan sebagai:

$$\delta W_{int} = -\int_L M\,(x)\delta\kappa_0(x)dx$$

$$\delta W_{int} = -\delta U_{int} = -\left[\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{Px}{2}\left(-\frac{\pi^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{4L^2}\right)dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{PL}{2}\left(-\frac{\pi^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{4L^2}\right)dx\right] = 0.207107P$$

Persamaan perpindahan maya:

$$\delta W = \delta W_{ext} + \delta W_{int} = 0.207107F_c + 0.207107P = 0 \Longrightarrow F_c = -P = P\downarrow$$

Pembahasan mengenai (c): Dalam kasus ini, meskipun medan perpindahan virtual melanggar batasan geometris, nilai "eksak" beban P di tengah bentang tetap dapat diperoleh selama

sistem gaya yang sebenarnya (baik internal maupun eksternal) memenuhi persamaan diferensial yang berlaku:

$$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} - w_y(x) = 0$$

serta syarat batas gaya. Namun, pilihan ini mungkin bukan langkah yang bijak karena mengharuskan diketahuinya nilai reaksi tumpuan.

5.7 PARTIKEL DAN BENDA TEGAR

Dalam prinsip kerja virtual, perubahan kerja eksternal dan internal yang memperhitungkan gangguan dari keadaan perpindahan virtual terhadap keadaan gaya nyata (tegangan resultan) dipertimbangkan. Kerja virtual didefinisikan sebagai kerja yang dilakukan oleh gaya-gaya nyata pada perpindahan virtual. Perlu dicatat bahwa persamaan kerja virtual merupakan cara alternatif untuk menyatakan kondisi kesetimbangan.

Karena gaya (tegangan resultan) dan deformasi (regangan resultan) adalah besaran dual dalam analisis struktur, sangat wajar untuk mengharapkan adanya pasangan konjugat dari prinsip kerja virtual. Hal ini tentu saja benar, dan prinsip dual tersebut dikenal sebagai *prinsip kerja virtual komplementer* (*the complementary virtual work principle*) atau *prinsip gaya virtual* (*the virtual force principle*). Dalam prinsip ini, kerja virtual didefinisikan sebagai kerja yang dilakukan oleh sistem gaya virtual imajiner saat melalui perpindahan nyata. Penurunan prinsip gaya virtual untuk suatu partikel di bawah sistem gaya virtual $\delta\mathbf{P}$ dimulai dengan asumsi bahwa partikel tersebut berpindah sejauh perpindahan nyata $\mathbf{u}$ ($O'O$). Kerja virtual yang dihasilkan dituliskan sebagai:

$$\delta W_{ext}^* = \vec{u} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \delta \vec{P}_i \right) \tag{5.99}$$

Setelah melakukan perkalian skalar dalam Persamaan (5.99), diperoleh:

$$\delta W_{ext}^* = u_{O'O} \delta P_1 \cos\theta_1 + \cdots + u_{O'O} \delta P_n \cos\theta_n = u_{O'O} \left(\sum_{i=1}^{n} \delta P_i \cos\theta_i \right) \tag{5.100}$$

Jika sistem gaya virtual dipilih sedemikian rupa sehingga berada dalam keadaan setimbang:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta P_i \cos\theta_i = 0 \tag{5.101}$$

Akibatnya, kerja maya dari gaya-gaya maya yang berada dalam keadaan setimbang ini terhadap perpindahan riil bernilai nol:

$$\delta W_{ext}^{*} = 0 \tag{5.102}$$

Pemahaman mengenai prinsip gaya virtual dapat diperkaya dengan mempertimbangkan balok kaku pada Gambar 5.18 yang dikenai gaya eksternal F dan gaya magnet F_M. Gaya magnet tersebut diinduksi oleh sebuah magnet yang terletak pada jarak L dari balok kaku. Besarnya F_M diasumsikan sebanding dengan kebalikan dari pangkat tiga jarak x dari balok ke magnet.

$$F_M = \frac{k}{x^3} \text{ atau } x = \sqrt[3]{\frac{k}{F_M}} \tag{5.103}$$

di mana k adalah konstanta untuk medan magnet. Misalkan balok mencapai keadaan setimbangnya setelah menempuh perpindahan nyata Δ. Dengan kata lain,

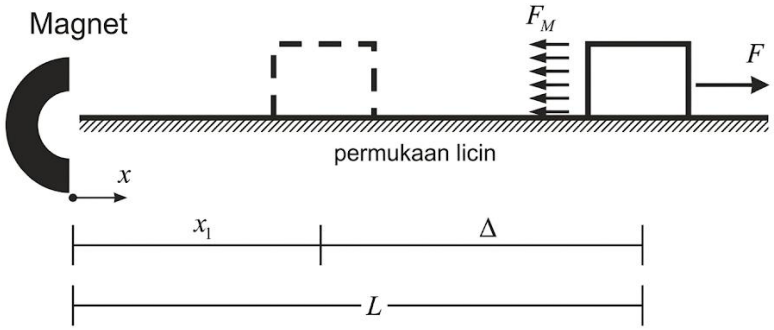
$$F - F_M = 0 \tag{5.104}$$

Keadaan setimbang ini diganggu dengan menerapkan sistem gaya virtual yang memenuhi persamaan kesetimbangan:

$$\delta F = \delta F_M \tag{5.105}$$

Usaha virtual yang dilakukan oleh sistem gaya virtual ini melalui perpindahan nyata Δ adalah

$$\delta W^{*} = -\delta F_M \Delta + \delta F \Delta \tag{5.106}$$



Gambar 5.18 Blok Kaku yang Mengalami Gaya Magnetik.

Dapat diamati bahwa:

$$\Delta = L - \sqrt[3]{\frac{k}{F_M}} = L - \sqrt[3]{\frac{k}{F}} \tag{5.107}$$

Dengan menyubstitusikan Pers. (5.107) ke dalam (5.106) dan menerapkan Pers. (5.105), ungkapan kerja maya ditulis ulang sebagai berikut:

$$\delta W^* = \left(-\Delta + L - \sqrt[3]{\frac{k}{F}} \right) \delta F = 0 \tag{5.108}$$

Karena sifat sembarang dari δF, diperoleh:

$$-\Delta + L - \sqrt[3]{\frac{k}{F}} = 0 \tag{5.109}$$

Hubungan di atas hanyalah relasi kinematika dari masalah ini. Oleh karena itu, dapat dinyatakan bahwa persamaan gaya virtual adalah cara alternatif untuk menyatakan persamaan kompatibilitas sistem.

Penurunan prinsip gaya virtual untuk benda kaku di bawah sistem gaya virtual $\delta\vec{\mathbf{P}}$ dimulai dengan asumsi bahwa benda kaku tersebut berpindah melalui pergerakan benda kaku yang nyata. Diperoleh:
Kita memiliki:

$$\delta W^* = \delta W^*_{ext} = \vec{u} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \delta \vec{P}_i \right) + \vec{\omega} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \delta \vec{P}_i \times \vec{d}_i \right) \tag{5.110}$$

Setelah melakukan perkalian skalar pada Persamaan (5.110), diperoleh:

$$\delta W^* = \delta W^*_{ext} = \left(\sum_{i=1}^{n} \delta P_i \right) u \cos\theta_i + \left(\sum_{i=1}^{n} \delta P_i \times d_i \right) \omega \cos\psi_i \tag{5.111}$$

Jika sistem gaya virtual dipilih sedemikian rupa sehingga berada dalam keadaan setimbang:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta P_i = 0 \text{ dan } \sum_{i=1}^{n} \delta P_i \times d_i = 0 \tag{5.112}$$

Akibatnya, kerja maya dari gaya-gaya maya yang berada dalam keadaan setimbang ini terhadap perpindahan riil bernilai nol:

$$\delta W^*_{ext} = 0 \tag{5.113}$$

Tanpa komentar tambahan, prinsip gaya virtual untuk partikel tegar dan benda tegar dapat dinyatakan secara verbal sebagai berikut:

> ***Perpindahan riil suatu partikel tegar dan benda tegar dalam mencapai konfigurasi yang kompatibel adalah sedemikian rupa sehingga total kerja virtual bernilai nol untuk setiap sistem gaya virtual yang memenuhi syarat statis (statically admissible).***

Prinsip gaya virtual tidak terlalu berguna untuk masalah benda tegar, namun menjadi sangat berguna untuk masalah benda yang dapat terdeformasi karena merupakan cara alternatif untuk menyatakan persamaan kompatibilitas sistem.

5.8 KERJA VIRTUAL KOMPLEMENTER

Pada bagian sebelumnya, prinsip kerja virtual komplementer—atau lebih spesifiknya, prinsip gaya virtual—telah diturunkan dan diterapkan pada partikel tegar dan benda tegar. Sebagaimana disebutkan sebelumnya, prinsip gaya virtual hanyalah cara alternatif untuk mendeskripsikan kondisi kompatibilitas. Penerapan prinsip gaya virtual pada partikel tegar dan benda tegar relatif tidak bermanfaat. Hal ini dikarenakan peran krusial sifat material dan karakteristik tegangan-regangan dalam menentukan hasil menjadi tidak bermakna pada masalah sistem yang tidak dapat terdeformasi. Namun, prinsip gaya virtual menjadi alat yang sangat ampuh dalam analisis struktur ketika sifat deformabilitas sistem diperhitungkan.

Pernyataan verbal prinsip gaya virtual untuk sistem yang dapat terdeformasi dapat dimodifikasi secara sederhana dari pernyataan prinsip perpindahan virtual. Hal ini dilakukan dengan mengganti istilah "tegangan (tegangan resultan)" dan "gaya" masing-masing dengan "regangan (regangan resultan)" dan "perpindahan", serta menukar istilah "kesetimbangan" dengan "kompatibilitas". Oleh karena itu, prinsip gaya virtual dapat dinyatakan sebagai berikut:

> ***Regangan (regangan resultan) dan perpindahan dalam benda yang dapat terdeformasi bersifat kompatibel dan konsisten dengan kendala geometris jika jumlah total kerja virtual komplementer eksternal dan total kerja virtual komplementer internal bernilai nol untuk setiap sistem gaya virtual yang memenuhi syarat statis.***

Pernyataan aljabar dari prinsip gaya virtual adalah:

$$\delta W^* = \delta W^*_{ext} + \delta W^*_{int} = 0 \tag{5.114}$$

$$\delta W^* = \delta W^*_{ext} - \delta U^*_{int} = 0 \tag{5.115}$$

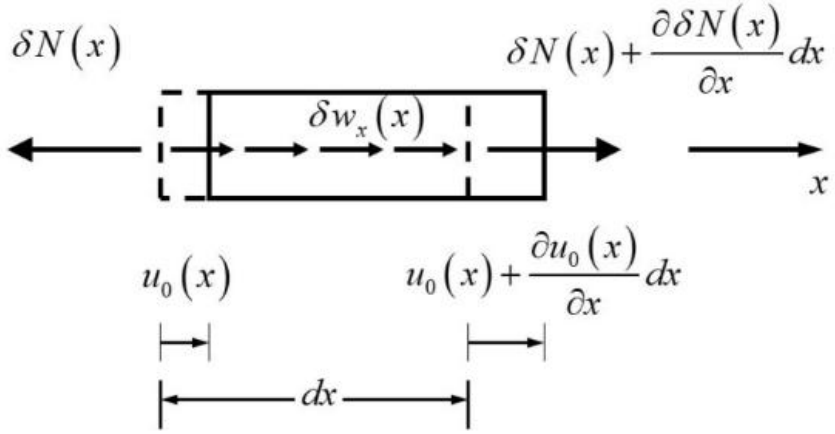
di mana δW_{int}^{*} menyatakan kerja virtual internal komplementer dan δU_{int}^{*} menyatakan energi regangan virtual komplementer. Untuk memperhitungkan sifat deformasi dari sistem (benda padat dan struktur), perlu dibedakan antara kerja virtual eksternal dan internal komplementer. Dua bagian berikutnya akan dikhususkan untuk membahas kedua besaran ini.

5.9 FORMULASI ENERGI REGANGAN VIRTUAL KOMPLEMENTER AKSIAL

Karena struktur rangka menjadi fokus utama dalam buku teks ini, moda utama aksi internal yang ditinjau di sini adalah respons aksial, geser, dan lentur. Pada sub-bagian berikut, ekspresi energi regangan virtual komplementer untuk setiap jenis aksi struktural akan diturunkan.

Respons Aksial: Prinsip Gaya Virtual

Pertimbangkan segmen infinitesimal dx dari elemen yang dibebani secara aksial dengan panjang L seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.19. Segmen ini berada dalam keadaan kompatibel dengan perpindahan $u_0(x)$ di ujung kiri dan $u_0(x) + \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} dx$ di ujung kanan. Pada Bab 2, regangan aksial yang kompatibel dengan perpindahan ujung ini didefinisikan sebagai laju perubahan perpindahan aksial terhadap koordinat aksial.



Gambar 5.19 Energi Regangan Virtual Komplementer δU_{int}^{*} dari Segmen Infinitesimal: Respons Aksial.

$$\varepsilon_0(x) = \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \tag{5.116}$$

Seluruh segmen infinitesimal dianggap sebagai benda bebas dan dikenai gaya virtual $\delta N(x)$ di ujung kiri, oleh $\delta N(x) + \frac{\partial \delta N(x)}{\partial x} dx$ di ujung kanan, serta oleh beban terbagi rata eksternal virtual $\delta w_x(x)$ sepanjang panjangnya. Akibatnya, kerja virtual yang dihasilkan adalah:

$$\delta W_{ext}^{*} = (\delta w_x(x) dx) u_0(x) - \delta N(x) u_0(x) + \left(\delta N(x) + \frac{\partial \delta N(x)}{\partial x} dx\right)\left(u_0(x) + \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} dx\right) \tag{5.117}$$

$$\delta W_{ext}^{*} = (\delta w_x(x) dx) u_0(x) - \delta N(x) u_0(x) + \delta N(x) u_0(x) +$$

$$\delta N(x)\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}dx + \left(\underbrace{\frac{\partial \delta N(x)}{\partial x}dx}_{-\delta w_x(x)}\right)u_0(x) + \underbrace{\left(\frac{\partial \delta N(x)}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}dx\right)}_{\text{2nd order term}} \tag{5.118}$$

Dengan menerapkan persamaan kesetimbangan diferensial (2/2.1) pada segmen batang dan mengabaikan suku orde kedua, Persamaan (5.118) ditulis sebagai berikut:

$$\delta W^*_{\text{ext}} = \delta N(x)\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\,dx \tag{5.119}$$

Berdasarkan persamaan (5.115), dapat disimpulkan bahwa:

$$\delta\overline{U^*_{\text{int}}} = \delta N(x)\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\,dx \tag{5.120}$$

Dengan $\delta\overline{U^*_{\text{int}}}$ melambangkan energi regangan virtual komplementer dari segmen infinitesimal dx. Persamaan (5.120) juga dapat ditulis dalam bentuk regangan sebagai berikut:

$$\delta U^*_{\text{int}} = \delta N(x)\varepsilon_0(x)\,dx \tag{5.121}$$

Untuk keseluruhan panjang elemen yang dibebani secara aksial, energi regangan virtual komplementer δU^*_{int} adalah:

$$\delta U^*_{\text{int}} = \int_L \delta U^*_{\text{int}} = \int_L \delta N(x)\varepsilon_0(x)\,dx \tag{5.122}$$

Jika hanya material elastis linear yang ditinjau, hubungan fleksibilitas penampang berikut

$$\varepsilon_0(x) = \frac{N(x)}{EA(x)} \tag{5.123}$$

disubstitusikan ke dalam Pers. (5.122) dan energi regangan virtual komplementer dinyatakan sepenuhnya dalam bentuk gaya aksial internal (tegangan resultan) sebagai berikut:

$$\delta U^*_{\text{int}} = \int_L \delta U^*_{\text{int}} = \int_L \delta N(x)\left(\frac{1}{EA(x)}\right)N(x)\,dx \tag{5.124}$$

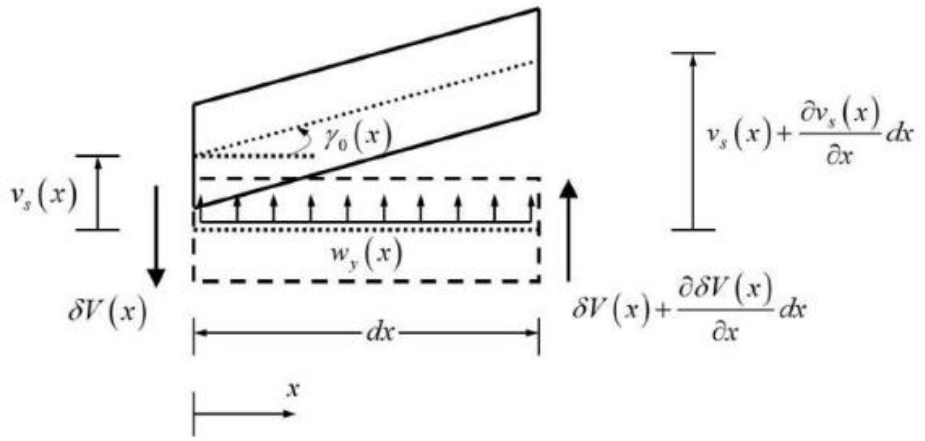
Berdasarkan Pers. (5.114), kerja virtual internal komplementer dituliskan sebagai:

$$\delta W^*_{\text{int}} = -\int_L \delta N(x)\varepsilon_0(x)\,dx \tag{5.125}$$

Penting untuk dicatat bahwa dalam prinsip gaya virtual, medan perpindahan nyata $u_0(x)$ harus dikaitkan dengan sistem dasar (gaya dan deformasi) di mana tidak ada gerakan benda kaku. Jika tidak, tidak mungkin untuk menetapkan medan gaya virtual $\delta N(x)$ yang secara statis dapat diterima.

Respon Geser: Prinsip Gaya Virtual

Pertimbangkan segmen infinitesimal dx dari anggota yang diberi beban vertikal dengan panjang L seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.20. Segmen ini berada dalam keadaan kompatibel dengan perpindahan $v_s(x)$ di ujung kiri dan $v_s(x) + \frac{\partial v_s(x)}{\partial x}$ di ujung kanan. Pada Bab 2, regangan geser didefinisikan sebagai laju perubahan perpindahan vertikal terhadap koordinat aksial.



Gambar 5.20 Energi Regangan Virtual Komplementer $\delta\overline{U^*_{\text{int}}}$ dari Segmen Infinitesimal: Respons Geser.

$$\gamma_0(x) = \frac{\partial v_s(x)}{\partial x} \tag{5.126}$$

Seluruh segmen infinitesimal dianggap sebagai benda bebas dan diganggu oleh gaya virtual $\delta V(x)$ di ujung kiri, oleh $\delta V(x) + \frac{\partial \delta V(x)}{\partial x}dx$ di ujung kanan, dan oleh beban terdistribusi eksternal semu $\delta w_y(x)$ sepanjang bentangannya. Akibatnya, kerja maya yang dihasilkan adalah:

$$\delta W^*_{ext} = \left(\delta w_y(x)dx\right)v_s(x) - \delta V(x)v_s(x) + \left(\delta V(x) + \frac{\partial \delta V(x)}{\partial x}dx\right)\left(v_s(x) + \frac{\partial v_s(x)}{\partial x}dx\right) \tag{5.127}$$

$$\delta W^*_{ext} = \left(\delta w_y(x)dx\right)v_s(x) - \delta V(x)v_s(x) + \delta V(x)v_s(x) + \delta V(x)\frac{\partial v_s(x)}{\partial x}dx + \underbrace{\frac{\partial \delta V(x)}{\partial x}dx}_{-\delta w_y(x)}v_s(x)$$
$$+ \underbrace{\left(\frac{\partial \delta V(x)}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial v_s(x)}{\partial x}dx\right)}_{2^{\text{nd order term}}} \tag{5.128}$$

Dengan menerapkan persamaan kesetimbangan vertikal (2/2.13) pada segmen balok dan mengabaikan 2nd orde kedua, Persamaan (5.128) ditulis sebagai berikut:

$$\delta W_{ext}^{*} = \delta V(x) \frac{\partial v_s(x)}{\partial x} dx \tag{5.129}$$

Berdasarkan persamaan (5.115), dapat disimpulkan bahwa:

$$\delta \overline{U_{int}^{*}} = \delta V(x) \frac{\partial v_s(x)}{\partial x} dx \tag{5.130}$$

Dengan $\delta \overline{U_{\text{int}}^{*}}$ melambangkan energi regangan virtual komplementer dari segmen infinitesimal dx. Persamaan (5.130) juga dapat ditulis dalam bentuk regangan sebagai berikut:

$$\delta \overline{U_{int}^{*}} = \delta V(x) \gamma_0(x) dx \tag{5.131}$$

Untuk keseluruhan panjang elemen yang dibebani secara vertikal, energi regangan virtual komplementer δU_{int}^{*} adalah:

$$\delta U_{int}^{*} = \int_L \delta \overline{U_{int}^{*}} = \int_L \delta V(x) \gamma_0(x) dx \tag{5.132}$$

Jika hanya material elastis linear yang ditinjau, hubungan fleksibilitas penampang berikut

$$\gamma_0(x) = \frac{V(x)}{G A_s(x)} \tag{5.133}$$

disubstitusikan ke dalam Pers. (5.132) dan energi regangan virtual komplementer dinyatakan sepenuhnya dalam bentuk gaya geser internal (tegangan resultan) sebagai berikut:

$$\delta U_{int}^{*} = \int_L \delta \overline{U_{int}^{*}} = \int_L \delta V(x) \left(\frac{1}{G A_s(x)} \right) V(x) dx \tag{5.134}$$

Berdasarkan Pers. (5.114), kerja virtual internal komplementer dituliskan sebagai:

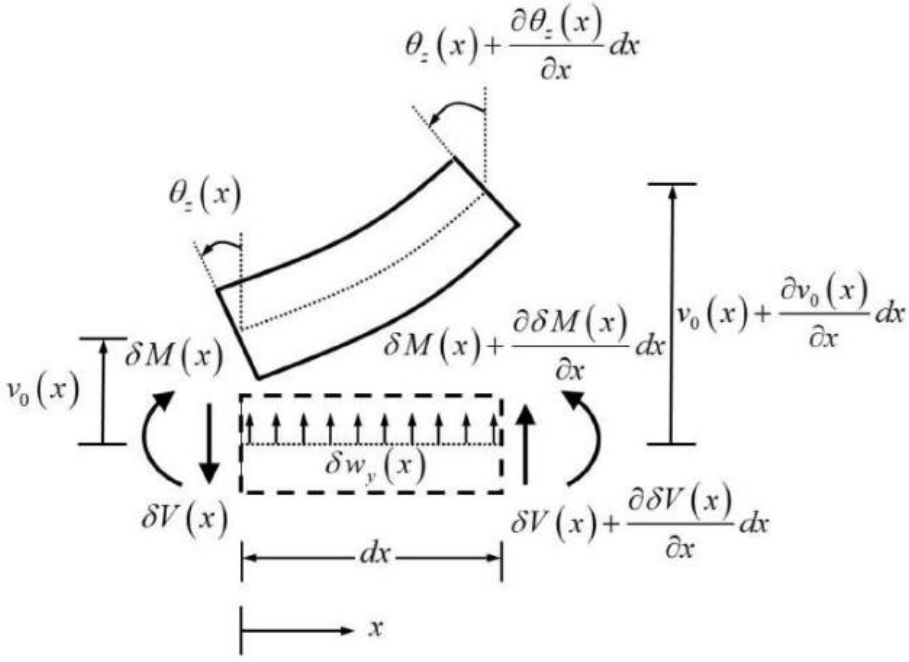
$$\delta W_{int}^{*} = - \int_L \delta V(x) \gamma_0(x) dx \tag{5.135}$$

Penting untuk dicatat bahwa dalam prinsip gaya virtual, medan perpindahan riil $v_s(x)$ harus dikaitkan dengan sistem dasar (gaya dan deformasi) yang tidak mengalami gerak benda tegar. Jika tidak, medan gaya virtual $\delta V(x)$ yang memenuhi syarat statis tidak dapat dibentuk.

Respon Lentur: Prinsip Gaya Virtual

Perhatikan segmen infinitesimal dx dari elemen yang diberi beban vertikal dengan panjang L seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.21. Segmen ini berada dalam keadaan kompatibel dengan perpindahan $v_0(x)$ dan rotasi $\theta_z(x)$ di ujung kiri dan $v_0(x) + \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} dx$ dan $\theta_z(x) + \frac{\partial \theta_z(x)}{\partial x} dx$ di ujung kanan. Seluruh segmen infinitesimal tersebut ditinjau sebagai benda bebas dan dikenai gangguan berupa gaya virtual $\delta V(x)$ dan momen virtual $\delta M(x)$ di ujung kiri, oleh $\delta V(x) + \frac{\partial \delta V(x)}{\partial x} dx$ dan $\delta M(x) + \frac{\partial \delta M(x)}{\partial x} dx$ di ujung kanan, dan oleh beban terdistribusi eksternal virtual $\delta w_y(x)$ di sepanjang panjangnya.
Akibatnya, kerja virtual yang dihasilkan adalah:

$$\delta W_{ext}^{*} = \left(\delta w_y(x) dx\right) v_0(x) - \delta V(x) v_0(x) + \left(\delta V(x) + \frac{\partial \delta V(x)}{\partial x} dx\right)\left(v_0(x) + \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} dx\right) + \left(\delta M(x) + \frac{\partial \delta M(x)}{\partial x} dx\right)\left(\theta_z(x) + \frac{\partial \theta_z(x)}{\partial x} dx\right) \quad (5.136)$$



Gambar 5.21 Energi Regangan Virtual Komplementer $\delta \overline{U_{int}^{*}}$ pada Segmen Infinitesimal: Respons Lentur.

$$\delta W_{ext}^{*} = \left(\begin{array}{c} \left(\delta w_y(x)dx\right)v_0(x) - \delta V(x)v_0(x) - \delta M(x)\theta_z(x) + \delta V(x)v_0(x) \; + \\ \delta V(x)\underbrace{\frac{\partial v_0(x)}{\partial x}}_{\theta_z(x)}dx + \left(\underbrace{\frac{\partial \delta V(x)}{\partial x}}_{-\delta w_y(x)}dx\right)v_0(x) + \underbrace{\left(\frac{\partial \delta V(x)}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial v_0(x)}{\partial x}dx\right)}_{2^{\text{nd order term}}} \; + \\ \delta M(x)\theta_z(x) + \delta M(x)\frac{\partial \theta_z(x)}{\partial x}dx + \left(\underbrace{\frac{\partial \delta M(x)}{\partial x}dx}_{-\delta V(x)}\right)\theta_z(x) \; + \\ \underbrace{\left(\frac{\partial \delta M(x)}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial \theta_z(x)}{\partial x}dx\right)}_{2^{\text{nd order term}}} \end{array} \right) \tag{5.137}$$

Dengan menerapkan persamaan kesetimbangan diferensial (2/2.13-14) dari segmen balok, mendefinisikan $\theta_z(x) = \frac{\partial v_0(x)}{\partial x}$ dan dengan mengabaikan suku-suku orde 2nd, Persamaan (5.137) ditulis sebagai:

$$\delta W_{ext}^{*} = \delta M(x)\frac{\partial \theta_z(x)}{\partial x}dx \tag{5.138}$$

Berdasarkan persamaan (5.115), dapat disimpulkan bahwa:

$$\delta\overline{U_{int}^{*}} = \delta M(x)\frac{\partial \theta_z(x)}{\partial x}dx \tag{5.139}$$

Pada Bab 2, regangan lentur (kelengkungan) didefinisikan sebagai laju perubahan rotasi terhadap koordinat aksial.

$$\kappa_0(x) = \frac{\partial \theta_z(x)}{\partial x} \tag{5.140}$$

Oleh karena itu, Persamaan (5.139) ditulis ulang sebagai berikut:

$$\delta\overline{U_{int}^{*}} = \delta M(x)\kappa_0(x)dx \tag{5.141}$$

Untuk keseluruhan panjang elemen yang dibebani secara vertikal, energi regangan virtual komplementer δU_{int}^{*} adalah:

$$\delta U_{int}^{*} = \int_L \delta\overline{U_{int}^{*}} = \int_L \delta M(x)\kappa_0(x)dx \tag{5.142}$$

Jika hanya material elastis linear yang ditinjau, hubungan fleksibilitas penampang berikut

$$\kappa_0(x) = \frac{M(x)}{IE(x)} \tag{5.143}$$

disubstitusikan ke dalam Pers. (5.142) dan energi regangan virtual komplementer dinyatakan sepenuhnya dalam bentuk momen internal (tegangan resultan) sebagai berikut:

$$\delta U^*_{int} = \int_L \delta\overline{U^*_{int}} = \int_L \delta M(x) \left(\frac{1}{IE(x)}\right) M(x) dx \tag{5.144}$$

Berdasarkan Pers. (5.114), kerja virtual internal komplementer dituliskan sebagai:

$$\delta W^*_{int} = -\int_L \delta M(x) \kappa_0(x) dx \tag{5.145}$$

Perlu dicatat bahwa dalam prinsip gaya virtual, medan perpindahan nyata $v_0(x)$ dan rotasi $\theta_z(x)$ harus dikaitkan dengan sistem dasar (gaya dan deformasi) yang tidak mengalami gerak benda tegar. Jika tidak, medan gaya virtual $\delta V(x)$ dan momen virtual $\delta M(x)$ yang memenuhi syarat statis tidak dapat ditetapkan.

Persamaan (5.122), (5.142), dan (5.132) membentuk ekspresi energi regangan virtual komplementer untuk elemen rangka Timoshenko bidang dan dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\delta U^*_{int} = \int_L \delta\sigma_{TB}(x)^T \varepsilon_{TB}(x) dx \tag{5.146}$$

di mana vektor $\delta\sigma_{TB}(x)$ memuat tegangan resultan virtual dan didefinisikan sebagai:

$$\delta\sigma_{TB}(x) = [\delta N(x) \quad \delta M(x) \quad \delta V(x)]^T \tag{5.147}$$

dan vektor $\varepsilon_{TB}(x)$ memuat regangan resultan riil serta didefinisikan sebagai:

$$\varepsilon_{TB}(x) = [\varepsilon_0(x) \quad \kappa_0(x) \quad \gamma_0(x)]^T \tag{5.148}$$

Jika hanya material yang elastis secara linear yang ditinjau, maka matriks fleksibilitas penampang berikut

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_0(x) \\ \kappa_0(x) \\ \gamma_0(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI(x)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{GA_s(x)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \\ V(x) \end{Bmatrix} \text{ atau } \varepsilon_{TB}(x) = C_{TB}(x)\sigma_{TB}(x) \tag{5.149}$$

disubstitusikan ke dalam Pers. (5.146) dan energi regangan virtual komplementer dinyatakan sepenuhnya dalam bentuk tegangan (tegangan resultan) sebagai berikut:

$$\delta U_{int}^{*} = \int_L \begin{Bmatrix} \delta N(x) \\ \delta M(x) \\ \delta V(x) \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{EA(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI(x)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{GA_s(x)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \\ V(x) \end{Bmatrix} dx \tag{5.150}$$

atau dalam bentuk ringkas sebagai:

$$\delta U_{int}^{*} = \int_L \delta\sigma_{TB}(x)^T C_{TB}(x)\sigma_{TB}(x)dx \tag{5.151}$$

Untuk elemen rangka Euler-Bernoulli, efek geser diabaikan. Oleh karena itu, energi regangan virtual komplementernya dinyatakan sebagai:

$$\delta U_{int}^{*} = \int_L \delta\sigma_{EB}(x)^T \varepsilon_{EB}(x)dx = \int_L \begin{Bmatrix} \delta N(x) \\ \delta M(x) \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \varepsilon_0(x) \\ \kappa_0(x) \end{Bmatrix} dx \tag{5.152}$$

di mana vektor $\delta\sigma_{EB}(x)$ memuat tegangan resultan virtual dan didefinisikan sebagai:

$$\delta\sigma_{EB}(x) = [\delta N(x) \quad \delta M(x)]^T \tag{5.153}$$

dan vektor $\varepsilon_{EB}(x)$ memuat regangan resultan riil serta didefinisikan sebagai:

$$\varepsilon_{EB}(x) = [\varepsilon_0(x) \quad \kappa_0(x)]^T \tag{5.154}$$

Jika hanya material yang elastis secara linear yang ditinjau, maka matriks fleksibilitas penampang berikut

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_0(x) \\ \kappa_0(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA(x)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI(x)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} \text{ atau } \varepsilon_{EB}(x) = C_{EB}(x)\sigma_{EB}(x) \tag{5.155}$$

disubstitusikan ke dalam Pers. (5.152) dan energi regangan virtual komplementer dinyatakan sepenuhnya dalam bentuk tegangan (tegangan resultan) sebagai berikut:

$$\delta U_{int}^{*} = \int_{L} \begin{Bmatrix} \delta N(x) \\ \delta M(x) \end{Bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \frac{1}{EA(x)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI(x)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} dx \tag{5.156}$$

atau dalam bentuk ringkas sebagai:

$$\delta U_{int}^{*} = \int_{L} \delta\sigma_{EB}(x)^{T} C_{EB}(x) \sigma_{EB}(x) dx \tag{5.157}$$

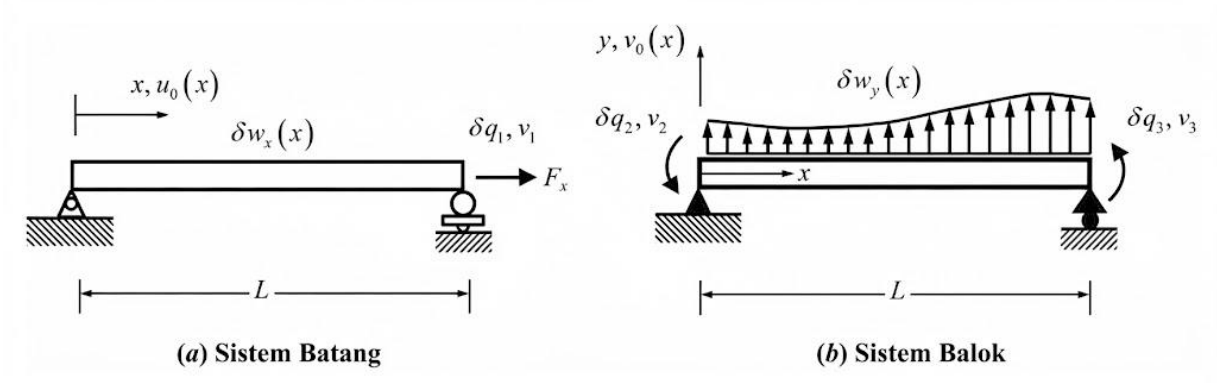
5.10 USAHA VIRTUAL EKSTERNAL KOMPLEMENTER: ELEMEN RANGKA

Pada bagian sebelumnya, telah diturunkan persamaan untuk energi regangan virtual komplementer bagi beberapa aksi struktural. Tujuan utama bagian ini adalah menurunkan persamaan usaha virtual eksternal komplementer akibat berbagai pembebanan eksternal. Tinjau elemen batang dalam sistem dasarnya sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 5.22a. Elemen ini berada dalam keadaan kompatibel antara deformasi riil v_1 dan medan perpindahan riil $u_0(x)$. Usaha virtual eksternal komplementer yang dilakukan oleh sistem gaya virtual yang memenuhi syarat statis (δq_1 dan $\delta w_x(x)$) terhadap deformasi riil v_1 dan medan perpindahan riil $u_0(x)$ adalah:

$$\delta W_{ext}^{*} = \delta q_1 v_1 + \int_{L} \delta w_x(x) u_0(x) dx \tag{5.158}$$

Perhatikan elemen balok dalam sistem dasarnya sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 5.22b. Elemen ini berada dalam keadaan kompatibel antara deformasi riil v_2 dan v_3 serta medan perpindahan riil $v_0(x)$. Usaha virtual eksternal komplementer yang dilakukan oleh sistem gaya virtual yang secara statis dapat diterima (δq_2, δq_3, dan $\delta w_y(x)$) terhadap deformasi riil (v_2 dan v_3) serta medan perpindahan riil $v_0(x)$ adalah:

$$\delta W_{ext}^{*} = \delta q_2 v_2 + \delta q_3 v_3 + \int_{L} \delta w_y(x) v_0(x) dx \tag{5.159}$$



Gambar 5.22 Kerja Virtual Eksternal Komplementer: Sistem Batang dan Balok.

Persamaan (5.158) dan (5.159) membentuk ekspresi kerja maya eksternal komplementer untuk elemen rangka bidang dan dapat dituliskan bersama sebagai berikut:

$$\delta W_{ext}^{*} = \delta q_1 v_1 + \delta q_2 v_2 + \delta q_3 v_3 + \int_L \delta w_x(x) u_0(x) dx + \int_L \delta w_y(x) v_0(x) dx \qquad (5.160)$$

atau dalam bentuk matriks sebagai:

$$\delta W_{ext}^{*} = \delta q^T v + \int_L \delta w(x)^T u(x) dx \qquad (5.161)$$

di mana vektor deformasi dasar elemen v didefinisikan sebagai $[v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T$ vektor gaya dasar elemen q didefinisikan sebagai $[q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$ vektor medan perpindahan elemen $u(x)$ yang terkait dengan sistem dasar didefinisikan sebagai $[u_0(x) \quad v_0(x)]^T$ dan vektor beban elemen $\boldsymbol{w}(x)$ didefinisikan sebagai $[w_x(x) \quad w_y(x)]^T$.

5.11 PRINSIP GAYA VIRTUAL: ELEMEN RANGKA

Pada dua bagian sebelumnya, telah diturunkan persamaan untuk energi regangan virtual komplementer dan kerja virtual eksternal komplementer bagi elemen rangka yang mengalami berbagai jenis pembebanan. Pada bagian ini, persamaan gaya virtual untuk beberapa jenis elemen rangka akan dirumuskan. Perlu dicatat bahwa persamaan gaya virtual merupakan cara alternatif untuk menyatakan persamaan kompatibilitas.

Elemen Batang:

Berdasarkan Pers. (5.158) dan (5.122), persamaan total kerja virtual komplementer (5.115) untuk elemen batang dapat ditulis sebagai berikut:

$$\delta W^{*} = \delta q_1 v_1 + \underbrace{\int_L \delta w_x(x) u_0(x) dx}_{\delta W_{ext}^{*}} - \underbrace{\int_L \delta N(x) \varepsilon_0(x) dx}_{\delta U_{int}^{*}} = 0 \qquad (5.162)$$

Perlu ditekankan kembali bahwa medan perpindahan $u_0(x)$ serta deformasi ujung v_1 berkaitan dengan sistem dasar yang memungkinkan ditetapkannya sekumpulan gaya virtual yang memenuhi syarat statis (δq_1, $\delta w_x(x)$, dan $\delta N(x)$). Mengingat sifat gaya virtual yang arbitrer, sistem gaya virtual tersebut dapat dipilih sedemikian rupa sehingga $\delta w_x(x) = 0$ tanpa mengurangi keumumannya. Oleh karena itu, Persamaan (5.162) dapat disederhanakan menjadi:

$$\delta W^{*} = \delta q_1 v_1 - \int_L \delta N(x) \varepsilon_0(x) dx = 0 \qquad (5.163)$$

Elemen Rangka Timoshenko:

Berdasarkan Persamaan (5.160), (5.122), (5.142), dan (5.132), ekspresi kerja maya komplementer total (5.115) untuk elemen rangka Timoshenko dapat ditulis sebagai berikut:

$$\delta W^* = \left[\begin{array}{c} \underbrace{\delta q_1 v_1 + \delta q_2 v_2 + \delta q_3 v_3 + \int_L \delta w_x(x) u_0(x) dx + \int_L \delta w_y(x) v_0(x) dx}_{\delta W^*_{ext}} \\ \underbrace{- \int_L \delta N(x) \varepsilon_0(x) dx + \int_L \delta M(x) \kappa_0(x) dx + \int_L \delta V(x) \gamma_0(x) dx}_{\delta U^*_{int}} \end{array} \right] = 0 \quad (5.164)$$

dalam bentuk matriks sebagai:

$$\delta W^* = \underbrace{\delta q^T v + \int_L \delta w(x)^T u(x) dx}_{\delta W^*_{ext}} - \underbrace{\int_L \delta \sigma_{TB}(x)^T \varepsilon_{TB}(x) dx}_{\delta U^*_{int}} = 0 \quad (5.165)$$

Perlu ditekankan kembali bahwa medan perpindahan $u(x)$ serta deformasi ujung v dikaitkan dengan sistem dasar di mana dimungkinkan untuk menetapkan serangkaian gaya virtual yang secara statis dapat diterima $\left(\delta q, \delta w(x), \text{dan } \delta \sigma_{TB}(x)\right)$. Karena sifat gaya virtual yang sembarang, sistem gaya virtual dapat dipilih sedemikian rupa sehingga $\delta w_x(x) = 0$ tanpa mengurangi keumumannya. Oleh karena itu, Persamaan (5.165) dapat disederhanakan menjadi:

$$\delta W^* = \delta q^T v - \int_L \delta \sigma_{TB}(x)^T \varepsilon_{TB}(x) dx = 0 \quad (5.166)$$

Elemen Rangka Euler-Bernoulli:

Berdasarkan Persamaan (5.160), (5.122), dan (5.142), ekspresi kerja maya komplementer total (5.115) untuk elemen rangka Euler-Bernoulli dapat ditulis sebagai berikut:

$$\delta W^* = \left[\begin{array}{c} \underbrace{\delta q_1 v_1 + \delta q_2 v_2 + \delta q_3 v_3 + \int_L \delta w_x(x) u_0(x) dx + \int_L \delta w_y(x) v_0(x) dx}_{\delta W^*_{ext}} \\ \underbrace{- \int_L \delta N(x) \varepsilon_0(x) dx + \int_L \delta M(x) \kappa_0(x) dx}_{\delta U^*_{int}} \end{array} \right] = 0 \quad (5.167)$$

dalam bentuk matriks sebagai:

$$\delta W^* = \underbrace{\delta q^T v + \int_L \delta w(x)^T u(x) dx}_{\delta W^*_{ext}} - \underbrace{\int_L \delta \sigma_{EB}(x)^T \varepsilon_{EB}(x) dx}_{\delta U^*_{int}} = 0 \quad (5.168)$$

Perlu ditekankan kembali bahwa medan perpindahan $u(x)$ serta deformasi ujung v berkaitan dengan sistem dasar di mana dimungkinkan untuk menetapkan sekumpulan gaya virtual yang dapat diterima secara statis $\left(\delta q, \delta w(x), \text{dan } \delta\sigma_{EB}(x)\right)$. Mengingat sifat gaya virtual yang arbitrer, sistem gaya virtual tersebut dapat dipilih sedemikian rupa sehingga $\delta w(x) = 0$ tanpa mengurangi keumumannya. Oleh karena itu, Persamaan (5.168) dapat disederhanakan menjadi:

$$\delta W^* = \delta q^T v - \int_L \delta\sigma_{EB}(x)^T \varepsilon_{EB}(x)\ dx = 0 \tag{5.169}$$

5.12 KARAKTERISTIK SISTEM GAYA VIRTUAL YANG DAPAT DITERIMA SECARA STATIS

Seperti halnya medan perpindahan virtual, medan gaya virtual tidak sepenuhnya sembarang, melainkan harus memenuhi kondisi tertentu. Kondisi ini dikenal sebagai kondisi "dapat diterima secara statis" (*statically admissible*). Dengan kata lain, persyaratan mendasar bagi setiap sistem gaya virtual adalah sistem tersebut harus memenuhi kondisi kesetimbangan internal maupun eksternal.

Sebagai contoh, ditinjau sebuah balok dengan tumpuan sederhana (Gambar 5.23) yang dikenai gaya virtual δP di tengah bentang. Berdasarkan prinsip dasar, dapat diamati bahwa gaya-gaya virtual eksternal yang bersesuaian pada ujung a dan b adalah:

$$\delta R_a = \delta P/2 \quad \text{dan} \quad \delta R_b = \delta P/2 \tag{5.170}$$

dan ekspresi geser virtual yang bersesuaian adalah:

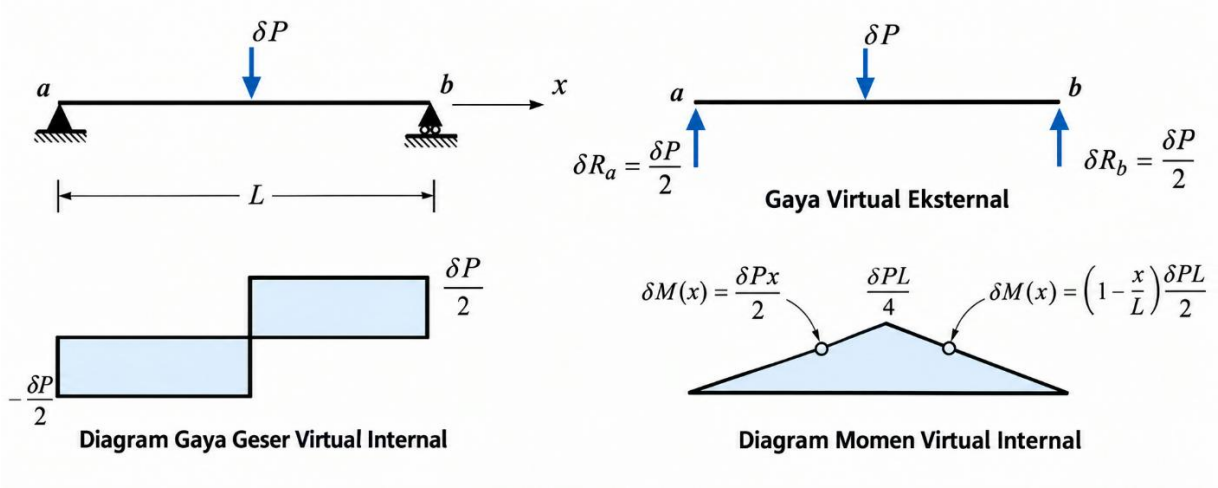
$$\delta V(x) = -\delta P/2 \text{ untuk } 0 \le x \le L/2 \tag{5.171}$$

$$\delta V(x) = \delta P/2 \text{ untuk } L/2 \le x \le L \tag{5.172}$$

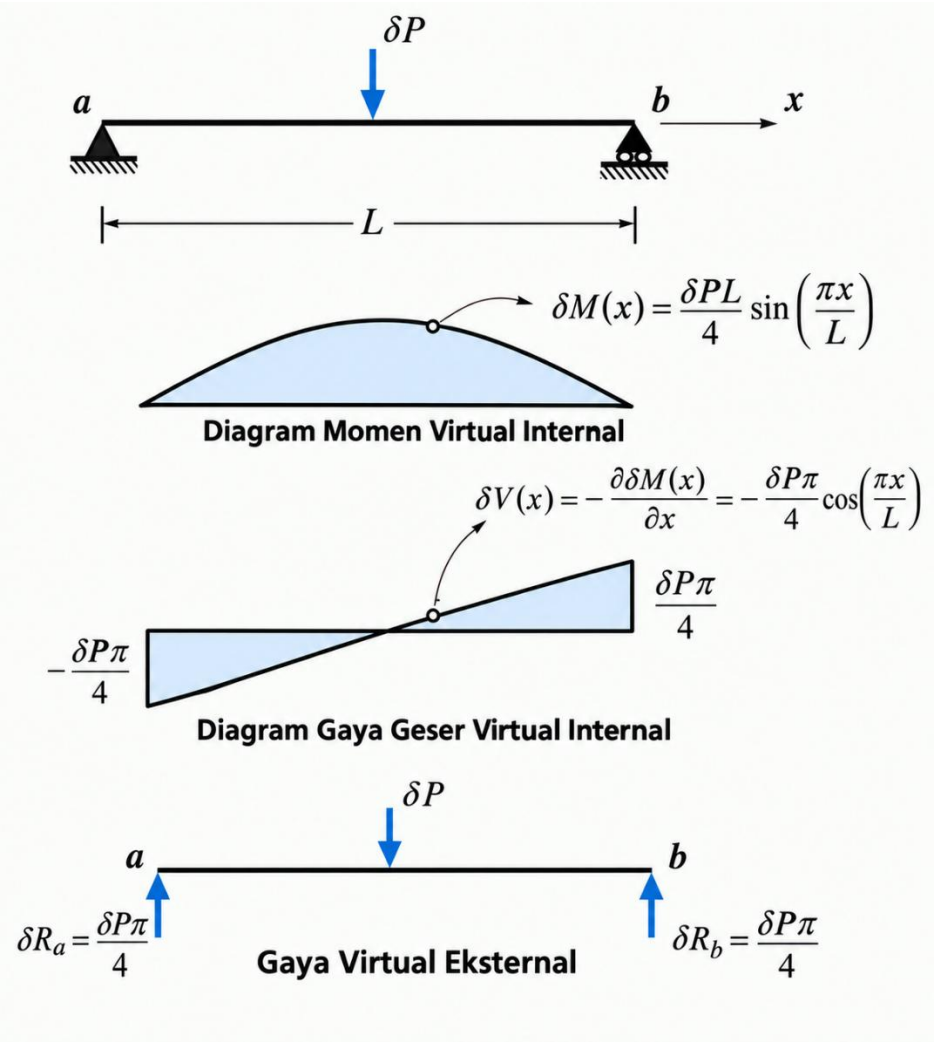
dan ekspresi momen virtual yang bersesuaian adalah:

$$\delta M(x) = \frac{\delta P x}{2} \text{ untuk } 0 \le x \le L/2 \tag{5.173}$$

$$\delta M(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)\frac{\delta P L}{2} \text{ untuk } L/2 \le x \le L \tag{5.174}$$



Gambar 5.23 Sistem Gaya Virtual yang Memenuhi Syarat Statis.



Gambar 5.24 Sistem Gaya Virtual yang Tidak Memenuhi Syarat.

Oleh karena itu, gaya-gaya virtual eksternal ($\delta P, \delta R_a$, dan δR_b) serta gaya-gaya virtual internal ($\delta V(x)$ dan $\delta M(x)$) membentuk suatu himpunan gaya virtual yang memenuhi syarat statis, karena gaya-gaya tersebut memenuhi kondisi kesetimbangan baik eksternal (global)

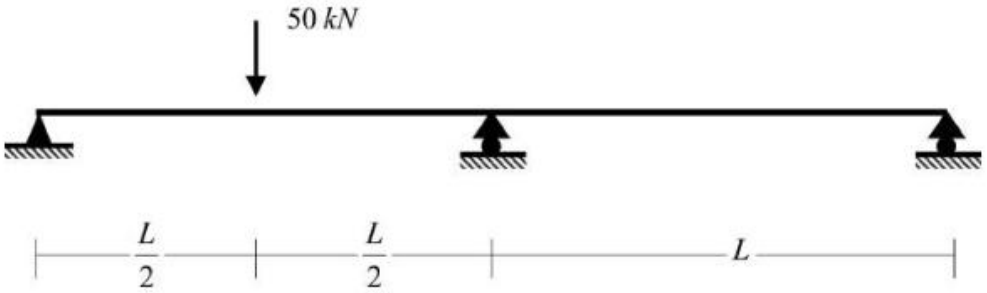
maupun internal (lokal). Pembaca dipersilakan untuk memverifikasi kondisi-kondisi kesetimbangan tersebut.

Sekarang diasumsikan bahwa balok yang sama (Gambar 5.24) dikenai gaya virtual δP di tengah bentang. Dengan asumsi bahwa persamaan momen virtual adalah:

$$\delta M(x) = \frac{\delta P L}{4} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{5.175}$$

dan ekspresi geser virtual yang bersesuaian adalah:

$$\delta V(x) = -\frac{\partial \delta M(x)}{\partial x} = -\frac{\delta P \pi}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{5.176}$$



Gambar 5.25 Balok Statis Tak Tentu.

dan gaya virtual luar yang bersesuaian pada ujung a dan b adalah:

$$\delta R_a = \delta P \pi / 4 \quad \text{dan} \quad \delta R_b = \delta P \pi / 4 \tag{5.177}$$

Jelaslah bahwa sistem gaya virtual eksternal (δP, δR_a, dan δR_b) serta gaya virtual internal ($\delta V(x)$ dan $\delta M(x)$) ini tidak memenuhi syarat statis (tidak *statically admissible*) karena melanggar kondisi kesetimbangan baik eksternal (global) maupun internal (lokal).

$$\delta R_a + \delta R_b - \delta P \neq 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} - \underbrace{w_y(x)}_{0} \neq 0 \tag{5.178}$$

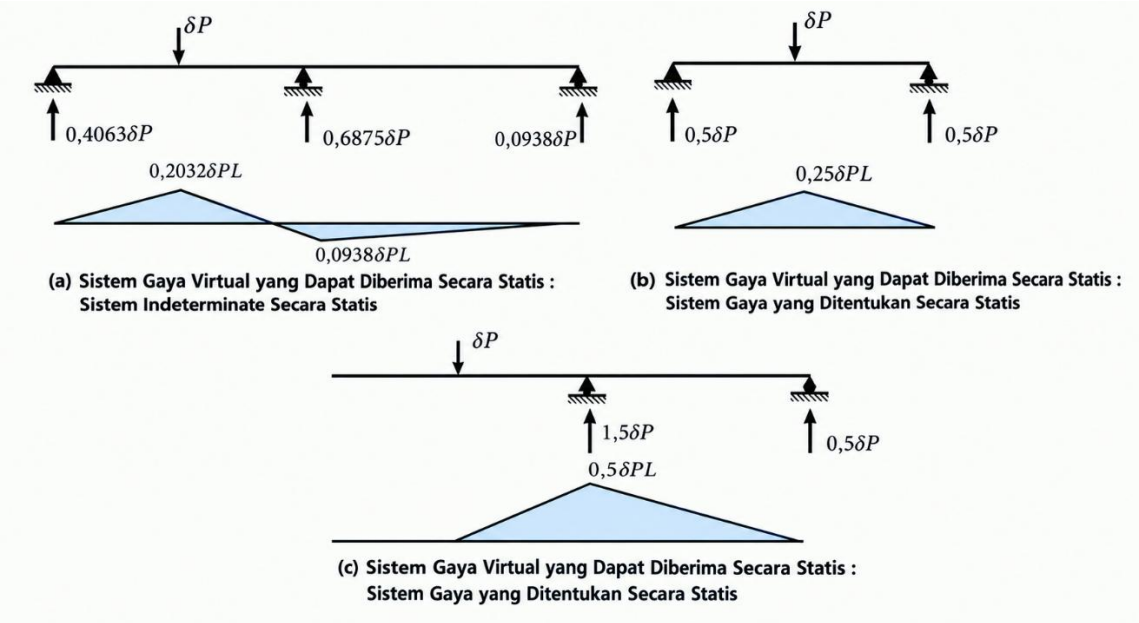
Pada umumnya, dan khususnya untuk struktur statis tak tentu, terdapat lebih dari satu pilihan sistem gaya virtual yang memenuhi syarat statis (*statically admissible*). Sebagai contoh, perhatikan balok menerus yang ditunjukkan pada Gambar 5.25. Balok ini bersifat statis tak tentu secara eksternal. Oleh karena itu, terdapat tak hingga banyaknya kemungkinan sistem gaya virtual yang memenuhi syarat statis untuk beban luar yang bekerja pada balok tersebut. Gambar 5.26 memperlihatkan tiga contoh sistem gaya virtual yang memenuhi syarat statis

untuk balok pada Gambar 5.25. Semuanya memenuhi kondisi kesetimbangan eksternal (global) maupun internal (lokal).

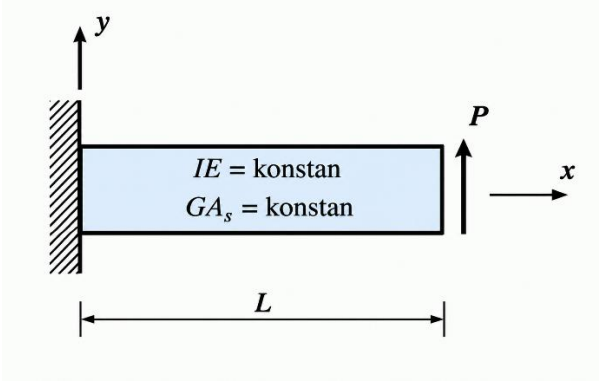
Meskipun tersedia tak hingga banyaknya pilihan sistem gaya virtual yang memenuhi syarat statis untuk struktur statis tak tentu, lebih bijaksana untuk menggunakan bentuk struktur yang statis tertentu, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.26b dan 5.26c. Bentuk struktur statis tak tentu yang ditunjukkan pada Gambar 5.26a bukanlah pilihan yang bijak untuk sistem gaya virtual karena bentuk tersebut merepresentasikan struktur yang sedang dianalisis itu sendiri.

Contoh 5-3

Untuk balok kantilever Timoshenko yang ditunjukkan pada Gambar 5.27, gunakan prinsip gaya virtual untuk menentukan lendutan di ujung balok.



Gambar 5.26 Himpunan Gaya Virtual yang Dapat Diterima Secara Statis: Sistem Statis Tak Tentu dan Tentu.

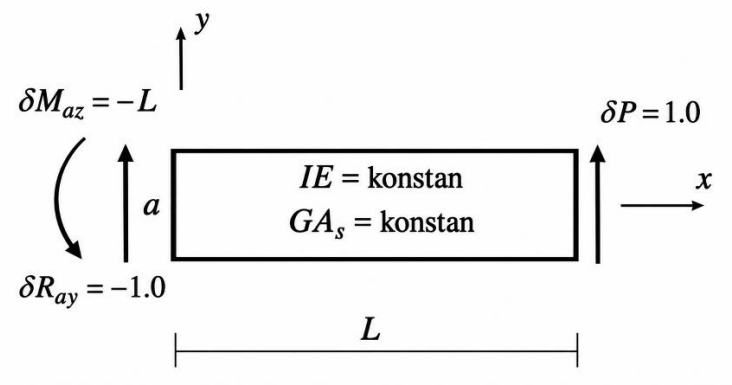


Gambar 5.27 Contoh 5.3.

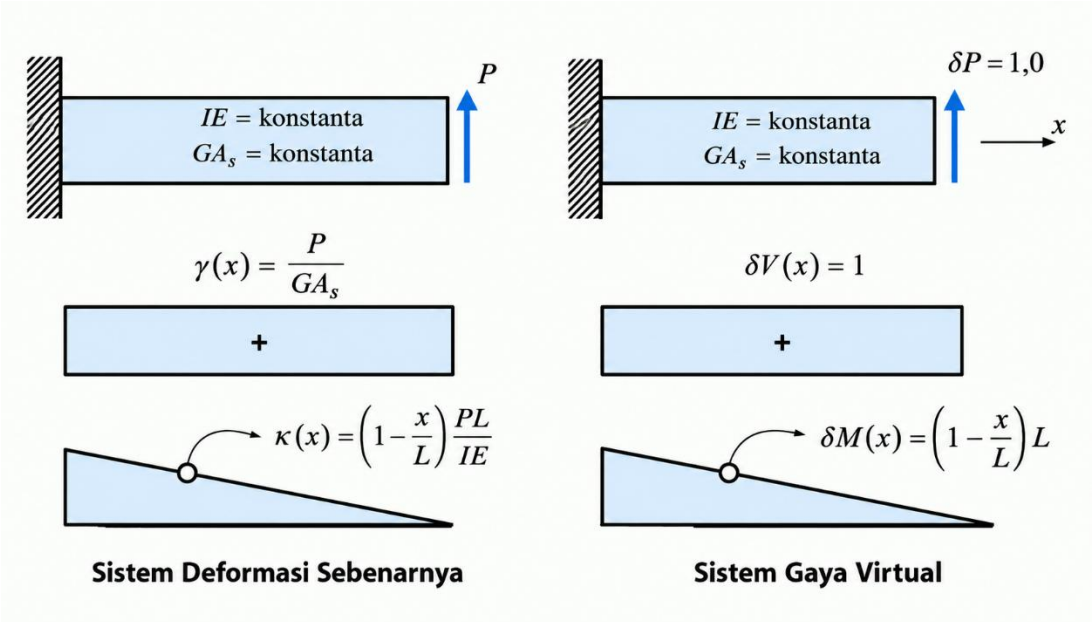
- **Penyelesaian**: Karena lendutan di ujung balok yang ingin diketahui, maka sistem gaya virtual eksternal seperti pada Gambar 5.28 diterapkan:

$$\delta R_{ay} = -1.0; \quad \delta M_{az} = -L; \text{dan } \delta P = 1.0$$

Deformasi riil internal dan gaya virtual internal yang bersesuaian ditunjukkan pada Gambar 5.29.



Gambar 5.28 Contoh 5.3 (Lanjutan).



Gambar 5.29 Contoh 5.3 (Lanjutan).

Kerja virtual eksternal komplementer adalah

$$\delta W_{ext}^{*} = \underbrace{\delta P}_{1} \Delta_{tip} = \Delta_{tip}$$

Pekerjaan virtual internal yang saling melengkapi adalah

$$\delta W_{int}^{*} = -\int_{L} \delta M(x)\kappa_0(x)dx - \int_{L} \delta V(x)\gamma_0(x)dx$$
$$= -\int_{L} \left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{PL}{IE}\left(1-\frac{x}{L}\right)Ldx - \int_{L}\frac{P}{GA_s}(1.0)dx = -\frac{PL^3}{3IE} - \frac{PL}{GA_s}$$

Total kerja maya komplementer adalah:

$$\delta W^{*} = \delta W_{ext}^{*} + \delta W_{int}^{*} = \Delta_{tip} - \frac{PL^3}{3IE} - \frac{PL}{GA_s} = 0 \Rightarrow \Delta_{tip} = \frac{PL^3}{3IE} + \frac{PL}{GA_s}$$

Ketika solusi ini dibandingkan dengan solusi "eksak" yang diperoleh dari bentuk kuat (*strong form*) permasalahan tersebut, ditemukan bahwa keduanya identik. Hal ini tidaklah mengherankan karena sejauh ini tidak ada pendekatan atau asumsi penyederhanaan yang dilakukan. Ini merupakan salah satu karakteristik menarik dari prinsip gaya virtual. Selama dua puluh tahun terakhir, penulis telah mencermati karakteristik prinsip gaya virtual yang menguntungkan ini dan telah merumuskan beberapa model rangka berbasis fleksibilitas dalam kerangka kerja prinsip gaya.

5.13 DERIVASI HUBUNGAN KONTRAGRADIEN GAYA–PERPINDAHAN

Sebelum melangkah ke bagian selanjutnya mengenai perumusan prinsip kerja virtual dan prinsip kerja virtual komplementer untuk struktur secara keseluruhan, perlu disajikan penurunan rasional mengenai hubungan kontragradien antara sistem gaya dan perpindahan pada elemen rangka. Hubungan-hubungan ini telah disinggung dalam Bab 3 dan 4. Hubungan tersebut dapat dibuktikan menggunakan prinsip kerja virtual dan prinsip kerja virtual komplementer.

Aspek Pertama dari Hubungan Kontragradien: Prinsip Gaya Virtual

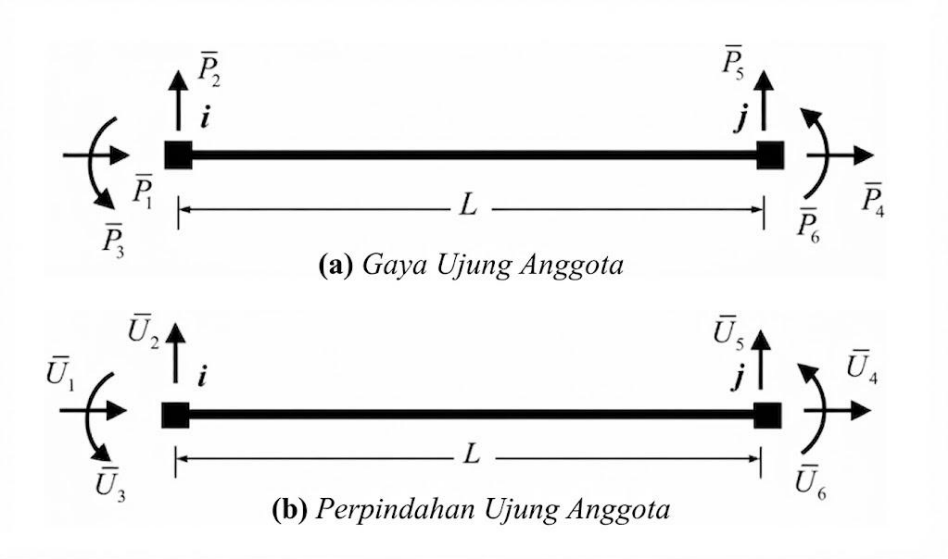
Aspek pertama yang akan ditinjau adalah pemilihan deformasi elemen dasar v sebagai pasangan kerja konjugat bagi gaya elemen dasar q. Sebagaimana ditemukan dalam Bab 3 dan 4, jauh lebih sederhana untuk memilih gaya elemen dasar dengan mempertimbangkan persamaan kesetimbangan dibandingkan memilih deformasi elemen dasar dengan mempertimbangkan persamaan kompatibilitas geometris. Sejauh ini, belum ada bukti yang disajikan mengenai sifat kerja konjugat antara gaya elemen dasar (Bab 3) dan deformasi elemen dasar (Bab 4) untuk sistem balok dengan tumpuan sederhana (*simply-supported beam*). Hal ini dapat dibuktikan dengan bantuan prinsip kerja virtual komplementer.

Dalam pembahasan ini, ditinjau himpunan lengkap gaya ujung dan perpindahan ujung dari suatu elemen rangka sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 5.30. Perlu dicatat bahwa tidak ada beban batang yang bekerja pada sistem (Gambar 5.30 a) karena pengaruhnya dapat diperhitungkan dalam gaya-gaya ujung batang ekuivalen sebagaimana dibahas pada Bab 3. Misalkan perpindahan ujung batang $\overline{U}$ yang ditunjukkan (Gambar 5.30 b) berada dalam keadaan kompatibel. Sistem kompatibel ini kemudian diberi gangguan berupa sekumpulan

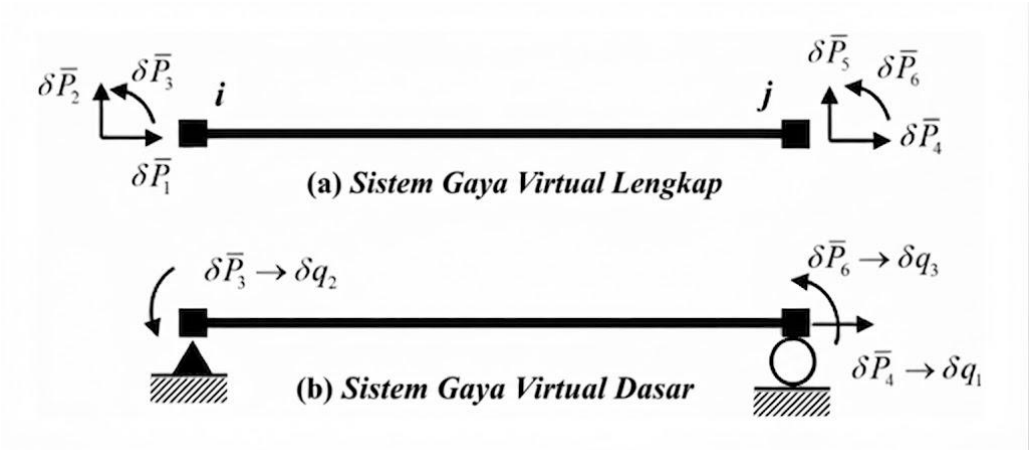
gaya ujung batang virtual $\delta\bar{P}$. Kerja virtual komplementer eksternal yang dilakukan oleh gaya-gaya virtual $\delta\overline{\boldsymbol{P}}$ terhadap perpindahan riil U didefinisikan sebagai berikut:

$$\delta W_{ext}^{*} = \delta\bar{P}^{T}\bar{U} = \delta\bar{P}_1\overline{U_1} + \delta\overline{P_2U_2} + \delta\overline{P_3U_3} + \delta\bar{P}_4\overline{U_4} + \delta\overline{P_5U_5} + \delta\overline{P_6U_6} \qquad (5.179)$$

Perlu diingat bahwa gaya ujung virtual elemen $\delta\overline{\boldsymbol{P}}$ tidak sepenuhnya sembarang, melainkan harus membentuk sistem yang memenuhi syarat keseimbangan statis. Dengan kata lain, hanya terdapat tiga gaya virtual bebas δq, sedangkan tiga gaya ujung sisanya dapat dinyatakan dalam bentuk gaya-gaya virtual bebas tersebut melalui kondisi keseimbangan elemen secara keseluruhan, dengan menggunakan model balok tumpuan sederhana sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 5.31.



Gambar 5.30 Gaya Ujung dan Perpindahan Ujung Elemen: Sistem Referensi Lokal.



Gambar 5.31 Sistem Balok Tumpuan Sederhana: (a) Sistem Gaya Virtual Lengkap; (b) Sistem Gaya Virtual Dasar.

Berdasarkan Bab 3, hubungan statis (3/3.10) antara gaya-gaya virtual pada sistem lengkap dan sistem dasar adalah:

$$\begin{aligned} \delta\overline{P_1} &= -\delta q_1; \quad \delta\overline{P_2} = \delta q_2/L + \delta q_3/L; \quad \delta\overline{P_3} = \delta q_2 \\ \overline{P_4} &= \delta q_1; \quad \delta\overline{P_5} = -\delta q_2/L - \delta q_3/L; \quad \delta\overline{P_6} = \delta q_3 \end{aligned} \tag{5.180}$$

dalam bentuk matriks sebagai:

$$\begin{bmatrix} \delta\overline{P_1} \\ \delta\overline{P_2} \\ \delta\overline{P_3} \\ \delta\overline{P_4} \\ \delta\overline{P_5} \\ \delta\overline{P_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1/L \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & -1/L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{bmatrix} \text{ atau } \delta\overline{P} = b_B \delta q \tag{5.181}$$

Dengan menyubstitusikan Pers. (5.180) ke dalam (5.179), diperoleh:

$$\begin{aligned} \delta W^*_{ext} &= \delta\overline{P}^T\overline{U} = \delta\overline{P_1}\overline{U_1} + \delta\overline{P_2}\overline{U_2} + \delta\overline{P_3}\overline{U_3} + \delta\overline{P_4}\overline{U_4} + \delta\overline{P_5}\overline{U_5} + \delta\overline{P_6}\overline{U_6} \\ &= -\delta q_1\overline{U_1} + (\delta q_2/L + \delta q_3/L)\overline{U_2} + \delta q_2\overline{U_3} + \delta q_1\overline{U_4} + (-\delta q_2/L - \delta q_3/L)\overline{U_5} + \delta q_3\overline{U_6} \\ &= \delta q_1(\overline{U_4} - \overline{U_1}) + \delta q_2(\overline{U_3} + \overline{U_2}/L - \overline{U_5}/L) + (\overline{U_6} + \overline{U_2}/L - \overline{U_5}/L)\delta q_3 \\ &= \delta q_1 v_1 + \delta q_2 v_2 + \delta q_3 v_3 = \delta q^T v \end{aligned} \tag{5.182}$$

Berdasarkan dua hubungan terakhir dari Pers. (5.182), dapat disimpulkan bahwa deformasi dasar elemen—yang merupakan pasangan kerja konjugat dari gaya dasar elemen—didefinisikan dalam bentuk perpindahan ujung elemen sebagai berikut:

$$v_1 = (\overline{U_4} - \overline{U_1}); \quad v_2 = \overline{U_3} - (\overline{U_5} - \overline{U_2})/L; \text{dan } v_3 = \overline{U_6} - (\overline{U_5} - \overline{U_2})/L \tag{5.183}$$

dalam bentuk matriks sebagai:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{U_1} \\ \overline{U_2} \\ \overline{U_3} \\ \overline{U_4} \\ \overline{U_5} \\ \overline{U_6} \end{Bmatrix} \text{ atau } v = \overline{b}_B^T\overline{U} \tag{5.184}$$

Hubungan-hubungan ini persis sama dengan yang diperoleh pada Bab 4 (4/4.22) berdasarkan pertimbangan geometris yang dilinearisasi terhadap kinematika rangka.

Kesimpulan penting lainnya yang ditarik dari hubungan pertama dan terakhir pada Persamaan (5.182) adalah:

$$\delta \bar{P}^T \bar{U} = \delta q^T v \tag{5.185}$$

Hubungan ini secara sederhana menyiratkan invariansi kerja maya komplementer, baik yang didefinisikan terhadap sistem batang lengkap maupun sistem batang dasar. Kesimpulan ini dapat dibenarkan karena kerja maya merupakan besaran skalar yang seharusnya tidak bergantung pada kerangka acuan apa pun.

Berdasarkan pengamatan terhadap sistem balok dengan tumpuan sederhana, kesimpulan-kesimpulan tersebut kini dapat diterapkan pada sistem dasar lainnya serta pada berbagai kombinasi gaya dan perpindahan, baik untuk batang rangka maupun—pada tahap selanjutnya—untuk struktur rangka secara keseluruhan. Misalkan kedua sistem gaya $\bar{P}$ dan q saling terkait melalui matriks kesetimbangan b:

$$\bar{P} = \bar{b} q \tag{5.186}$$

Misalkan kedua sistem perpindahan yang bersesuaian masing-masing adalah $\bar{\boldsymbol{U}}$ dan v. Karena kerja virtual eksternal komplementer bersifat invarian terhadap sistem acuan tertentu apa pun, hubungan kesamaan kerja tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\underbrace{\delta \bar{P}^T \bar{U}}_{\text{System I}} = \underbrace{\delta q^T v}_{\text{System II}} \tag{5.187}$$

Perlu dicatat bahwa kedua sistem gaya virtual tersebut saling berkaitan melalui:

$$\delta \bar{P} = \bar{b} \delta q \Rightarrow \delta \bar{P}^T = \delta q^T \bar{b}^T \tag{5.188}$$

Dengan menyubstitusikan Pers. (5.188) ke dalam (5.187), diperoleh:

$$\underbrace{\delta q^T \bar{b}^T \bar{U}}_{\text{System I}} = \underbrace{\delta q^T v}_{\text{System II}} \Rightarrow \delta q^T \left(\bar{b}^T \bar{U} - v \right) = 0 \tag{5.189}$$

Karena sifat sembarang dan independensi dari $\delta \mathbf{q}$, diperoleh hubungan berikut:

$$v = \bar{b}^T \bar{U} \tag{5.190}$$

Oleh karena itu, secara umum dapat dinyatakan bahwa jika dua sistem gaya dihubungkan melalui relasi kesetimbangan $\bar{P} = \bar{b} q$, maka sistem perpindahan yang bersesuaian dengannya harus memenuhi relasi kompatibilitas $v = \bar{b}^T \bar{U}$. Transformasi kontragradien yang bersesuaian adalah:

$$\bar{P} = \bar{b} q \Rightarrow v = \bar{b}^T \bar{U} \tag{5.191}$$

Perlu disampaikan bahwa persamaan kerja maya komplementer merupakan cara lain untuk merepresentasikan hubungan kompatibilitas.

Aspek Kedua dari Hubungan Kontragradien: Prinsip Perpindahan Maya

Aspek kedua yang sedang dibahas adalah pembuktian bahwa jika dua sistem perpindahan saling terkait melalui hubungan kompatibilitas $v = \bar{a}\overline{U}$, maka sistem gaya yang bersesuaian dengannya harus memenuhi hubungan kesetimbangan $\bar{P} = \bar{a}^T q$. Hal ini dapat ditunjukkan dengan bantuan prinsip kerja maya.

Diasumsikan bahwa himpunan dasar gaya ujung elemen q yang diperlihatkan pada Gambar 5.32(a) berada dalam keadaan setimbang. Perlu dicatat bahwa tidak ada beban elemen yang bekerja pada sistem tersebut karena pengaruhnya dapat diperhitungkan ke dalam gaya ujung elemen ekuivalen sebagaimana telah dibahas pada Bab 3. Sistem yang setimbang ini kemudian diberi gangguan berupa sekumpulan deformasi elemen maya dasar δv (Gambar 5.32(b)). Kerja maya eksternal yang dilakukan oleh gaya-gaya riil q terhadap deformasi maya δv didefinisikan sebagai:

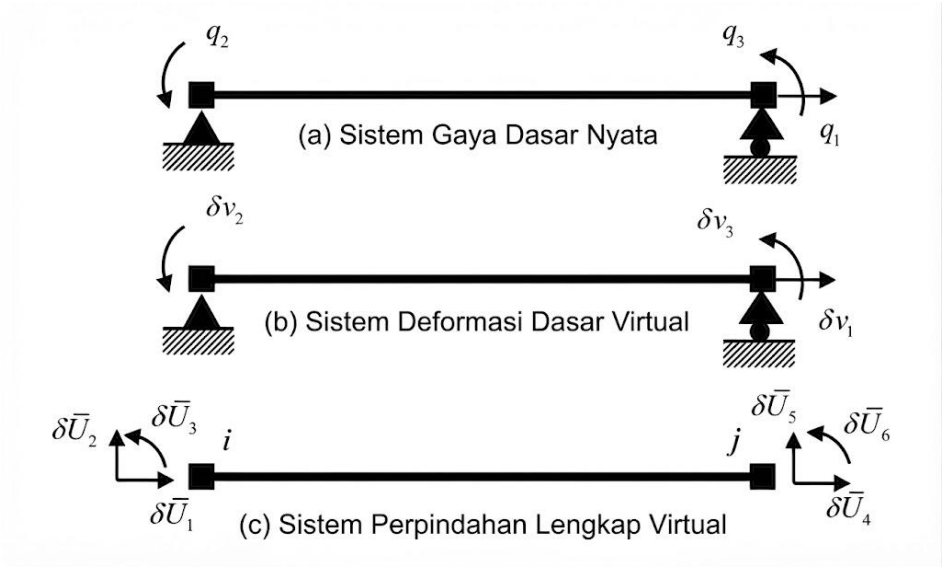
$$\delta W_{ext} = \delta v^T q = \delta v_1 q_1 + \delta v_2 q_2 + \delta v_3 q_3 \tag{5.192}$$

Dengan menggunakan balok dengan tumpuan sederhana sebagai sistem elemen dasar, diperoleh hubungan kinematik (4/4.21) antara perpindahan maya pada sistem dasar dan sistem lengkap (Gambar 5.32 c) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\delta v_1 = \delta\overline{U_4} - \delta\overline{U_1}; \quad \delta v_2 = \delta\overline{U_3} - (\delta\overline{U_5} - \delta\overline{U_2})/L; \\ &\text{dan } \delta v_3 = \delta\overline{U_6} - (\delta\overline{U_5} - \delta\overline{U_2})/L \end{aligned} \tag{5.193}$$

dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} \delta v_1 \\ \delta v_2 \\ \delta v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\overline{U_1} \\ \delta\overline{U_2} \\ \delta\overline{U_3} \\ \delta\overline{U_4} \\ \delta\overline{U_5} \\ \delta\overline{U_6} \end{Bmatrix} \quad \text{or } \delta v = \bar{a}_v \delta\overline{U} \tag{5.194}$$



Gambar 5.32 Sistem Balok Tumpuan Sederhana: (a) Sistem Gaya Dasar Riil; (b) Sistem Deformasi Dasar Virtual; (c) Sistem Perpindahan Lengkap Virtual.

Dengan menyubstitusikan Pers. (5.193) ke dalam (5.192), diperoleh:

$$\begin{aligned}\delta W_{ext} &= \delta v^T q = \delta v_1 q_1 + \delta v_2 q_2 + \delta v_3 q_3 \\ &= (\delta\overline{U_4} - \delta\overline{U_1})q_1 + (\delta\overline{U_3} - (\delta\overline{U_5} - \delta\overline{U_2})/L)q_2 + (\delta\overline{U_6} - (\delta\overline{U_5} - \delta\overline{U_2})/L)q_3 \\ &= -q_1\delta\overline{U_1} + \big((q_2+q_3)/L\big)\delta\overline{U_2} + q_2\delta\overline{U_3} + q_1\delta\overline{U_4} + \big((-q_2-q_3)/L\big)\delta\overline{U_5} + q_3\delta\overline{U_6} \\ &= \overline{P_1}\delta\overline{U_1} + \overline{P_2}\delta\overline{U_2} + \overline{P_3}\delta\overline{U_3} + \overline{P_4}\delta\overline{U_4} + \overline{P_5}\delta\overline{U_5} + \overline{P_6}\delta\overline{U_6} = \delta\bar{U}^T\bar{P}\end{aligned} \quad (5.195)$$

Berdasarkan dua hubungan terakhir dari Pers. (5.195), dapat disimpulkan bahwa gaya-gaya ujung batang yang merupakan pasangan kerja konjugat dari perpindahan ujung batang—didefinisikan dalam bentuk gaya-gaya batang dasar sebagai berikut:

$$\begin{aligned}&\overline{P_1} = -q_1; \quad \overline{P_2} = (q_2+q_3)/L; \quad \overline{P_3} = q_2; \\ &\overline{P_4} = q_1; \overline{P_5} = -(q_2+q_3)/L; \quad \overline{P_6} = q_3\end{aligned} \quad (5.196)$$

dalam bentuk matriks sebagai:

$$\begin{Bmatrix}\overline{P_1}\\ \overline{P_2}\\ \overline{P_3}\\ \overline{P_4}\\ \overline{P_5}\\ \overline{P_6}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1/L & 1/L\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1/L & -1/L\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\end{Bmatrix} \text{atau } \bar{P} = \bar{a}_B^T q \quad (5.197)$$

Hubungan-hubungan ini persis sama dengan yang diperoleh pada Bab 3 (3/3.10) dari tinjauan kesetimbangan terlinearisasi terhadap statika rangka. Kesimpulan penting lainnya yang ditarik dari hubungan pertama dan terakhir pada Pers. (5.195) adalah:

$$\delta v^T q = \delta \bar{U}^T \bar{P} \tag{5.198}$$

Hubungan ini secara sederhana menunjukkan invariansi kerja virtual, baik yang didefinisikan terhadap sistem batang dasar maupun sistem batang lengkap. Kesimpulan ini dapat dibenarkan karena kerja virtual merupakan besaran skalar yang seharusnya tidak bergantung pada kerangka acuan apa pun.

Berdasarkan pengamatan terhadap sistem balok dengan tumpuan sederhana, kesimpulan-kesimpulan tersebut kini dapat diterapkan pada sistem dasar lainnya serta pada berbagai kombinasi gaya dan perpindahan, baik untuk batang rangka maupun nantinya untuk struktur rangka. Misalkan kedua sistem perpindahan v dan $\bar{U}$ saling terkait melalui matriks kompatibilitas $\bar{a}$:

$$v = \bar{a}\bar{U} \tag{5.199}$$

Misalkan kedua sistem gaya yang bersesuaian masing-masing adalah q dan P. Karena kerja maya eksternal bersifat invarian terhadap sistem acuan tertentu apa pun, hubungan kesamaan kerja dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\underbrace{\delta v^T q}_{\text{System I}} = \underbrace{\delta \bar{U}^T \bar{P}}_{\text{System II}} \tag{5.200}$$

Perlu dicatat bahwa kedua sistem perpindahan virtual tersebut saling berkaitan melalui:

$$\delta v = \bar{a}\delta\bar{U} \Rightarrow \delta v^T = \delta \bar{U}^T \bar{a}^T \tag{5.201}$$

Dengan menyubstitusikan Pers. (5.201) ke dalam (5.200), diperoleh:

$$\underbrace{\delta \bar{U}^T \bar{a}^T q}_{\text{System I}} = \underbrace{\delta \bar{U}^T \bar{P}}_{\text{System II}} \Rightarrow \delta \bar{U}^T (\bar{a}^T q - \bar{P}) = 0 \tag{5.202}$$

Karena sifat sembarang dan independensi dari $\delta\bar{U}$, diperoleh hubungan berikut:

$$\bar{P} = \bar{a}^T q \tag{5.203}$$

Oleh karena itu, secara umum dapat dinyatakan bahwa jika dua sistem perpindahan saling terkait melalui hubungan kompatibilitas $v = \bar{a}\bar{U}$, maka sistem gaya yang bersesuaian harus memenuhi hubungan kesetimbangan $\bar{P} = \bar{a}^T q$. Transformasi kontragradien yang bersesuaian adalah:

$$v = \bar{a}\bar{U} \Rightarrow \bar{P} = \bar{a}^T q \tag{5.204}$$

Perlu dicatat bahwa persamaan kerja virtual adalah cara lain untuk merepresentasikan hubungan kesetimbangan. Dari Persamaan (5.191) dan (5.204), dapat disimpulkan bahwa:

$$\bar{b} = \bar{a}^T \text{ dan } \bar{b}^T = \bar{a} \tag{5.205}$$

5.14 PRINSIP KERJA VIRTUAL UNTUK STRUKTUR RANGKA

Sejauh ini, prinsip kerja virtual untuk elemen rangka telah dirumuskan. Semua komponen penting telah disiapkan, yaitu:

- Prinsip perpindahan virtual untuk partikel tegar dan benda tegar.
- Prinsip perpindahan virtual untuk elemen rangka (benda yang dapat terdeformasi), termasuk rumusan kerja virtual internal maupun eksternal.
- Transformasi kontragradien antara dua sistem gaya.

Pada bagian ini, prinsip kerja virtual untuk keseluruhan struktur rangka akan dibahas. Sebagaimana telah disebutkan, struktur rangka terdiri dari titik simpul (partikel tegar) dan elemen rangka (penghubung yang dapat terdeformasi). Secara eksternal, keseluruhan struktur rangka dikenai gaya simpul yang telah ditentukan F_{free} (diketahui) dan beban terbagi rata $w(x)$ (diketahui) di sepanjang setiap elemen, serta gaya simpul reaksi F_{constr} (tidak diketahui) pada tumpuan. Keseluruhan struktur rangka dapat dipandang sebagai satu kesatuan benda yang dapat terdeformasi jika dilepaskan dari tumpuannya. Untuk memastikan terpenuhinya kondisi kesetimbangan global maupun lokal pada struktur rangka, gaya simpul (F_{free} dan F_{constr}), beban elemen $w(x)$, dan medan gaya internal $\sigma(x)$ harus berada dalam keadaan setimbang. Oleh karena itu, prinsip kerja virtual yang dikembangkan untuk benda yang dapat terdeformasi dapat diterapkan pada struktur rangka secara keseluruhan; artinya, jumlah kerja virtual eksternal dan internal bernilai nol.

Dalam hal ini, kerja virtual eksternal didefinisikan sebagai kerja yang dilakukan oleh gaya simpul dan beban elemen terhadap perpindahan virtual pada derajat kebebasan global, sedangkan kerja virtual internal didefinisikan sebagai kerja yang dilakukan oleh medan gaya internal terhadap medan deformasi virtual elemen. Perlu diingat bahwa medan deformasi virtual elemen harus kompatibel dengan perpindahan virtual pada derajat kebebasan global. Dengan kata lain, medan tersebut harus membentuk suatu sistem perpindahan virtual yang dapat diterima secara kinematic.

Dengan demikian, kerja virtual eksternal dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\delta W_{ext} = \delta U_{free}^T F_{free} + \delta U_{constr}^T F_{constr} + \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{L_i} \delta u(x)^T w(x) dx \right) \tag{5.206}$$

dengan L_i sebagai panjang elemen i dan N sebagai jumlah elemen rangka. Perlu dicatat bahwa penjumlahan langsung kerja maya eksternal yang dilakukan oleh beban elemen $w(x)$ pada medan perpindahan maya elemen $\delta u(x)$ untuk seluruh elemen dapat dilakukan karena sifat skalar dari kerja tersebut.

Dengan analogi serupa, total kerja maya internal dapat didefinisikan sebagai penjumlahan langsung kerja maya internal dari seluruh elemen dan dinyatakan sebagai:

$$\delta W_{int} = -\delta U_{int} = -\sum_{i=1}^{N}\left(\int_{L_i} \delta\varepsilon(x)^T \sigma(x) dx\right) \tag{5.207}$$

Persamaan kerja virtual (5.30) seluruh rangka sebagai benda yang dapat dideformasi adalah:

$$\underbrace{\delta U_{free}^T F_{free} + \delta U_{constr}^T F_{constr} + \sum_{i=1}^{N}\left(\int_{L_i} \delta u(x)^T w(x) dx\right)}_{\delta W_{ext}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\left(\int_{L_i} \delta\varepsilon(x)^T \sigma(x) dx\right)}_{\delta W_{int}} = 0 \tag{5.208}$$

Perlu diingat bahwa prinsip kerja virtual (5.208) adalah cara alternatif untuk menyatakan persamaan kesetimbangan. Dengan memindahkan semua suku integral ke sisi kanan, persamaan (5.208) ditulis ulang sebagai:

$$\delta U_{free}^T F_{free} + \delta U_{constr}^T F_{constr} = \sum_{i=1}^{N}\left(\int_{L_i} \delta\varepsilon(x)^T \sigma(x) dx\right) - \sum_{i=1}^{N}\left(\int_{L_i} \delta u(x)^T w(x) dx\right) \tag{5.209}$$

Dengan membandingkan sisi kanan persamaan (5.209) dengan persamaan (5.96) dan (5.98), dapat disimpulkan bahwa:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\int_{L_i} \delta\varepsilon(x)^T \sigma(x) dx - \int_{L_i} \delta u(x)^T w(x) dx\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\delta\overline{U^{(i)T} P^{(i)}}\right) \tag{5.210}$$

di mana superskrip i melambangkan nomor elemen. Jika tidak ada beban pada elemen, transformasi invarian (5.200) dari kerja tersebut digunakan kembali:

$$\delta\overline{U^{(i)T} P^{(i)}} = \delta v^{(i)T} q^{(i)} \tag{5.211}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (5.211) ke dalam (5.210) dan (5.209), diperoleh

$$\delta U_{free}^T F_{free} + \delta U_{constr}^T F_{constr} = \sum_{i=1}^{N} \delta v^{(i)T} q^{(i)} \tag{5.212}$$

Perlu diingat kembali bahwa vektor gaya dasar struktural $\boldsymbol{Q}$ (Bab 3) dan vektor deformasi dasar struktural $\boldsymbol{V}$ (Bab 4) didefinisikan sebagai berikut:

$$Q = [q^{(1)} \quad q^{(2)} \quad \dots \quad q^{(k)} \quad \dots \quad q^{(N)}]_{Element}^T = [Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_k \quad \dots \quad Q_N]_{Structure}^T \tag{5.213}$$

$$V = [v^{(1)} \quad v^{(2)} \quad \dots \quad v^{(k)} \quad \dots \quad v^{(N)}]^T_{Element} = [V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_k \quad \dots \quad V_N]^T_{Structure} \quad (5.214)$$

Akibatnya, ruas kanan Persamaan (5.212) dapat ditulis sebagai hasil kali skalar antara δV dan $\boldsymbol{Q}$.

$$\sum_{i=1}^{N} \delta v^{(i)T} q^{(i)} = \delta V^T Q \quad (5.215)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (5.215) ke dalam (5.212), diperoleh

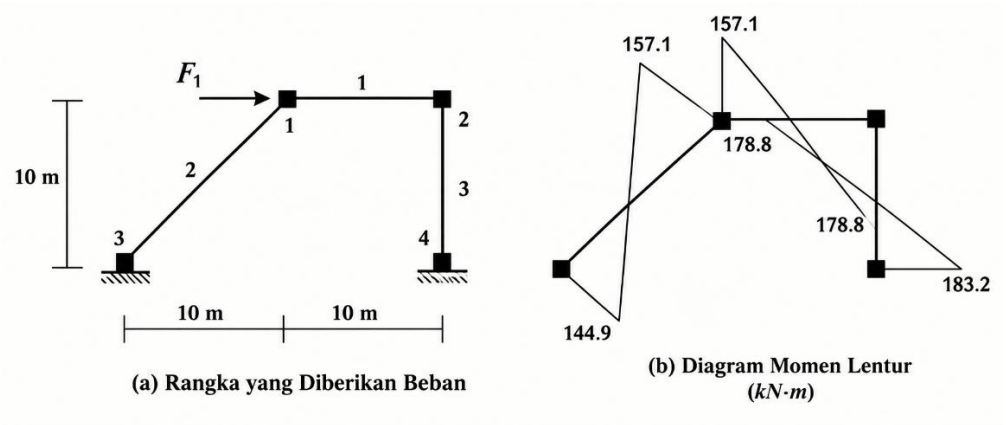
$$\delta U^T_{free} F_{free} + \delta U^T_{constr} F_{constr} = \delta V^T Q \quad (5.216)$$

Persamaan (5.216) merepresentasikan kondisi kesetimbangan struktural antara gaya nodal eksternal (F_{free} dan F_{constr}) dan gaya internal (Q), selama deformasi virtual δV kompatibel dengan perpindahan virtual $\left(\delta U_{free} \text{ ad} \delta U_{constr}\right)$. Perlu dicatat bahwa hubungan ini hanya berlaku jika tidak ada beban pada elemen (*member load*). Namun, efek beban elemen dapat diperlakukan secara sederhana sebagai gaya nodal ekuivalen; untuk itu, medan perpindahan elemen virtual $\delta u(x)$ perlu didefinisikan. Hal ini akan dibahas kemudian.

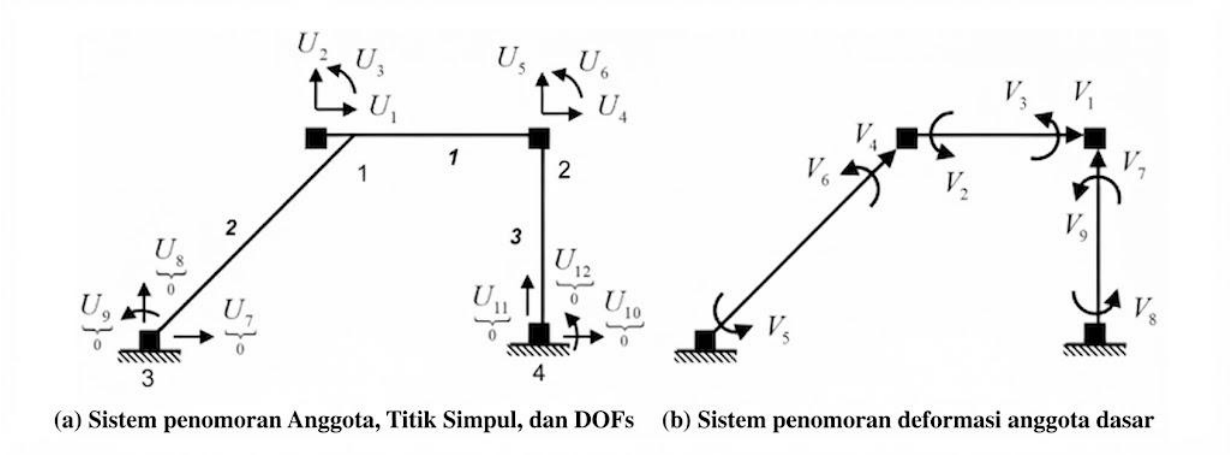
Contoh 5.4

Sebuah struktur rangka tak-dapat-mulur (*inextensible*) yang ditunjukkan pada Gambar 5.33a dikenai gaya horizontal pada titik simpul (*node*) 1. Berdasarkan diagram momen lentur yang ditunjukkan pada Gambar 5.33b, tentukan besarnya gaya horizontal pada titik simpul 1 menggunakan prinsip perpindahan virtual.

- **Penyelesaian**: Sistem penomoran elemen, titik simpul, dan derajat kebebasan (DOF) ditunjukkan pada Gambar 5.34a, sedangkan sistem penomoran deformasi elemen dasar ditunjukkan pada Gambar 5.34b.



Gambar 5.33 Contoh 5.4.



Gambar 5.34 Contoh 5.4 (Lanjutan).

Dengan mengikuti pendekatan yang dijelaskan dalam Bab 4, persamaan kompatibilitas matriks untuk keseluruhan struktur pada derajat kebebasan bebas dapat dinyatakan dalam format ringkas sebagai berikut:

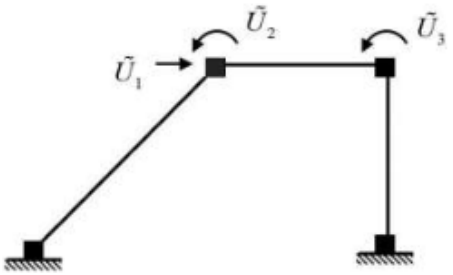
$$V = V_{free} = A_{free}U_{free} \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 1 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & -0.1 & 1 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.05 & -0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.05 & -0.05 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

Hubungan kinematik antara U_{free} bebas dan $\widetilde{U}$ yang bersesuaian dengan kendala ketidakmampuan untuk meregang (Gambar 5.35) ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$U_{free} = A_c\widetilde{U} \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widetilde{U_1} \\ \widetilde{U_2} \\ \widetilde{U_3} \end{Bmatrix}$$

Persamaan kompatibilitas matriks untuk struktur dengan kendala adalah:

$$V_{free} = A_{free}U_{free} = A_{free}A_c\tilde{U} = \tilde{A}_{free}\tilde{U} \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 1 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widetilde{U_1} \\ \widetilde{U_2} \\ \widetilde{U_3} \end{Bmatrix}$$



Gambar 5.35 Contoh 5.4 (Lanjutan).

Jelas bahwa deformasi dasar yang terkait dengan respons aksial bernilai nol. Berdasarkan diagram momen lentur pada Gambar 5.33 b, vektor gaya elemen dasar Q didefinisikan sebagai berikut:

$$Q = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \quad Q_7 \quad Q_8 \quad Q_9]^T$$
$$= [N.A. \quad -157.1 \quad -178.8 \quad N.A. \quad 144.9 \quad 157.1 \quad N.A. \quad 183.2 \quad 178.8]^T$$

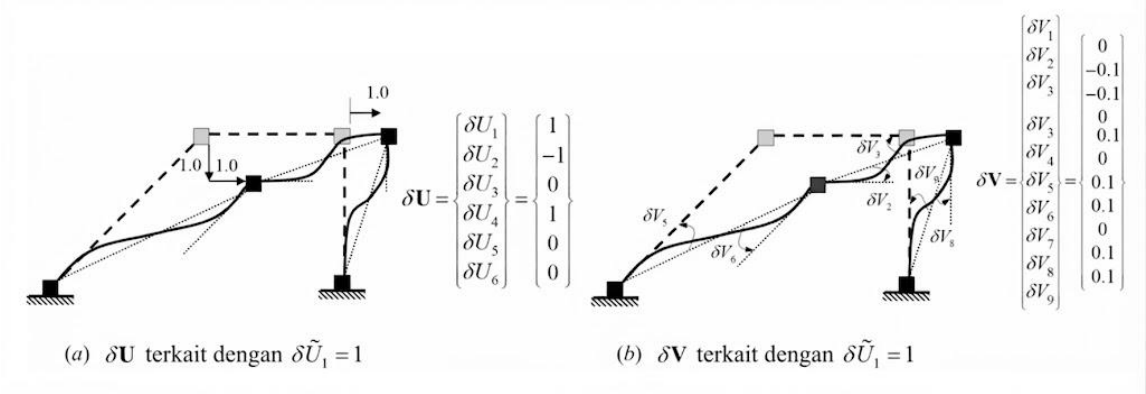
Perpindahan simpul virtual berikut diterapkan pada struktur yang terkekang:

$$\delta\widetilde{U_1} = 1 \text{ dan } \delta\widetilde{U_2} = \delta\widetilde{U_3} = 0$$

Perpindahan titik simpul yang bersesuaian untuk struktur tanpa kendala ditunjukkan pada Gambar 5.36a, sedangkan deformasi dasar virtual ditunjukkan pada Gambar 5.36b.

- Usaha virtual internal adalah: $\delta W_{int} = -\delta V^T Q = -100$
- Usaha virtual eksternal adalah: $\delta W_{ext} = \delta\widetilde{U_1}\widetilde{F_1} = 1.0 \times \widetilde{F_1}$
- Total usaha virtual adalah: $\delta W = \delta W_{ext} + \delta W_{int} = 1.0 \times \widetilde{F_1} - 100 = 0 \Rightarrow \widetilde{F_1} = 100$ kN

Pembaca dipersilakan untuk memverifikasi nilai gaya ini melalui tinjauan sistematis terhadap keseimbangan titik simpul dan elemen. Proses ini bisa jadi sangat melelahkan.



Gambar 5.36 Contoh 5.4 (Lanjutan).

5.15 MEDAN PERGESERAN VIRTUAL UNTUK AKSI STRUKTURAL

Sampai batas tertentu, persyaratan kontinuitas medan pergeseran virtual $\delta\boldsymbol{u}(x)$ untuk beberapa aksi struktural telah dibahas di bagian sebelumnya. Namun, belum ada tinjauan teoritis tentang medan pergeseran virtual yang diberikan. Medan virtual ini memainkan peran penting dalam mengevaluasi kerja virtual eksternal yang dilakukan oleh beban elemen $w(x)$ seperti yang ditunjukkan pada Persamaan (5.208). Secara umum, medan pergeseran virtual untuk aksi struktural yang relevan harus memenuhi persamaan kompatibilitas diferensial terkait yang didefinisikan dalam Bab 2 dan batas pergeseran spesifik. Medan pergeseran nyata $u(x)$ juga tunduk pada persyaratan yang sama. Masalah-masalah ini untuk setiap jenis elemen rangka akan diselidiki di sub-bagian berikut.

Elemen Batang

Diingat dari Bab 2 bahwa persamaan kompatibilitas diferensial dari segmen batang adalah

$$\varepsilon_0(x) = \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \qquad (2/2.3)$$

Medan perpindahan virtual $\delta u_0(x)$ juga harus memenuhi hubungan ini. Oleh karena itu, medan tersebut harus kontinu dan setidaknya memiliki turunan pertama yang kontinu di setiap titik di dalam domain elemen. Pilihan yang paling umum untuk medan perpindahan (*virtual*) adalah polinomial karena mudah untuk dievaluasi, diturunkan, dan diintegralkan, baik secara analitis maupun numeris. Dalam bab ini, konfigurasi elemen batang yang paling sederhana menjadi fokus pembahasan. Model batang paling sederhana (Gambar 5.37) memiliki dua titik simpul ujung, dan medan perpindahan yang relevan baginya adalah polinomial linear. Oleh karena itu, interpolasi tipe Lagrange digunakan untuk merepresentasikan medan perpindahan dalam bentuk perpindahan di titik-titik ujung sebagai berikut:

$$u_0(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)\overline{U}_1 + \frac{x}{L}\overline{U}_4 \qquad (5.217)$$

Elemen Balok *Euler-Bernoulli*

Seperti yang telah diingat dari Bab 2, persamaan kompatibilitas diferensial dari segmen balok *Euler-Bernoulli* adalah

$$K_0(x) = \frac{\partial^2 v_0(x)}{\partial x^2} \qquad (2/2.17)$$

Medan perpindahan virtual $\delta v_0(x)$ juga harus memenuhi hubungan ini. Oleh karena itu, medan ini harus kontinu dan setidaknya memiliki turunan kedua yang kontinu di setiap titik di dalam domain elemen. Pilihan yang paling umum untuk medan perpindahan (*virtual*) adalah polinomial karena mudah untuk dievaluasi, diturunkan, dan diintegralkan, baik secara analitis maupun numerik. Dalam bab ini, fokus diberikan pada konfigurasi paling sederhana dari model balok *Euler-Bernoulli.*

Model balok *Euler-Bernoulli* yang paling sederhana (Gambar 5.38) memiliki dua titik simpul ujung, dan setiap titik simpul ujung memiliki dua syarat batas, yaitu perpindahan vertikal dan rotasi. Oleh karena itu, polinomial kubik merupakan pilihan yang tepat untuk medan perpindahan tersebut. Fungsi polinomial ini harus memenuhi nilai-nilai yang telah ditentukan untuk fungsi itu sendiri serta kemiringannya pada batas-batas ujung. Polinomial semacam itu dikenal sebagai fungsi interpolasi "*Hermite*" dan dinyatakan sebagai berikut:

$$v_0(x) = \left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\overline{U_2} + \left[L\left(\frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right)\right]\overline{U_3} + \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\overline{U_5} + \left[L\left(-\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right)\right]\overline{U_6} \qquad (5.218)$$

Elemen Balok *Timoshenko*

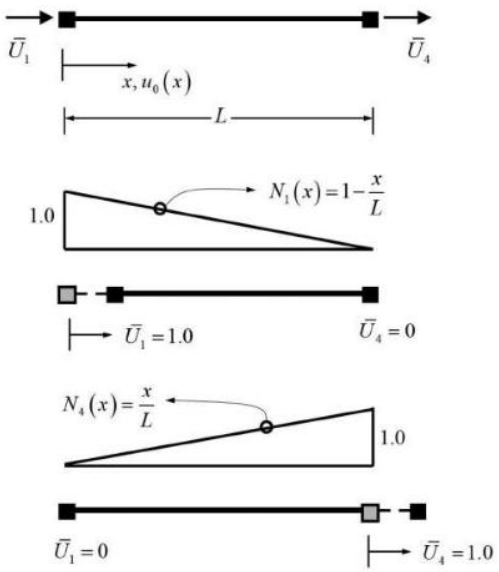
Seperti yang telah diingat dari Bab 2, persamaan kompatibilitas diferensial dari segmen balok *Timoshenko* adalah

$$\kappa_0(x) = \frac{\partial \alpha_0(x)}{\partial x} \quad \text{dan} \quad \gamma_0(x) = \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} - \alpha_0(x) \qquad (2/2.41)$$

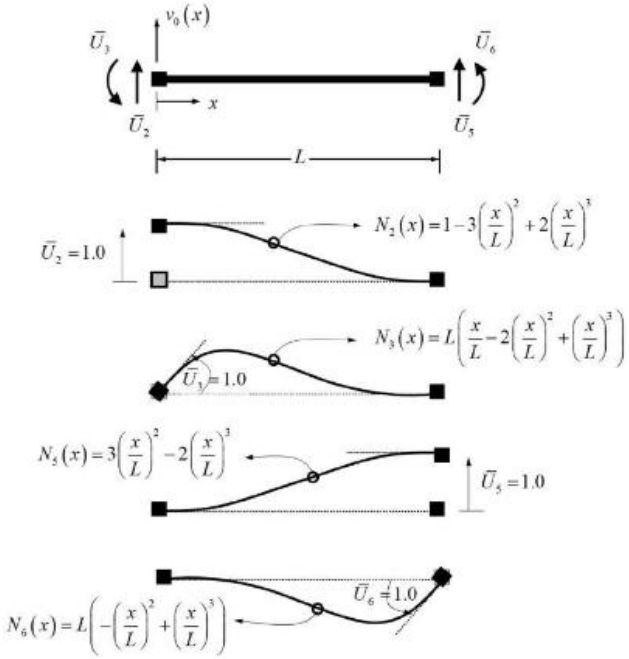
Berbeda dengan balok *Euler-Bernoulli* yang memiliki satu medan variabel tunggal $v0(x)$, terdapat dua medan variabel independen, yaitu medan perpindahan $v0(x)$dan medan rotasi lentur $\alpha 0(x)$. Pilihan yang paling umum untuk medan variabel (*virtual*) adalah polinomial karena mudah untuk dievaluasi, diturunkan, dan diintegralkan, baik secara analitis maupun numerik. Dalam bab ini, fokus diberikan pada konfigurasi paling sederhana dari model balok *Timoshenko*. Model balok *Timoshenko* yang paling sederhana (Gambar 5.39) memiliki dua titik simpul ujung. Setiap medan variabel harus memenuhi dua nilai fungsi tertentu pada ujung-ujung elemen, dan medan yang bersangkutan berbentuk polinomial linear. Interpolasi tipe Lagrange digunakan untuk merepresentasikan medan variabel dalam bentuk nilai-nilai ujung sebagai berikut:

$$v_0(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)\bar{U}_2 + \frac{x}{L}\bar{U}_5 \tag{5.219}$$

$$\alpha_0(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)\bar{U}_3 + \frac{x}{L}\bar{U}_6 \tag{5.220}$$

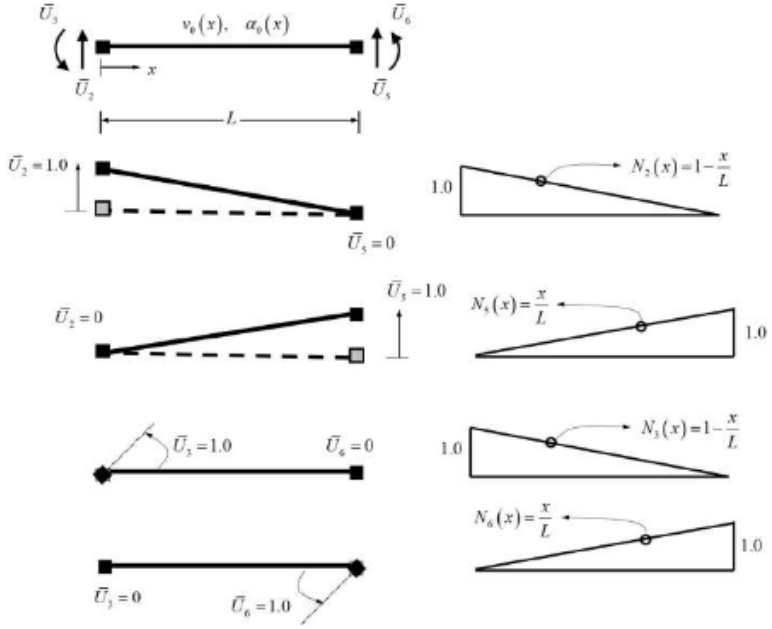


Gambar 5.37 Medan Perpindahan untuk Model Batang 2-Simpul.



Gambar 5.38 Medan Perpindahan untuk Model Balok Euler-Bernoulli 2-Simpul.

Bidang variabel virtual ($\delta v_0(x)$ dan $\delta\alpha_0(x)$) juga harus mempunyai relasi ini.

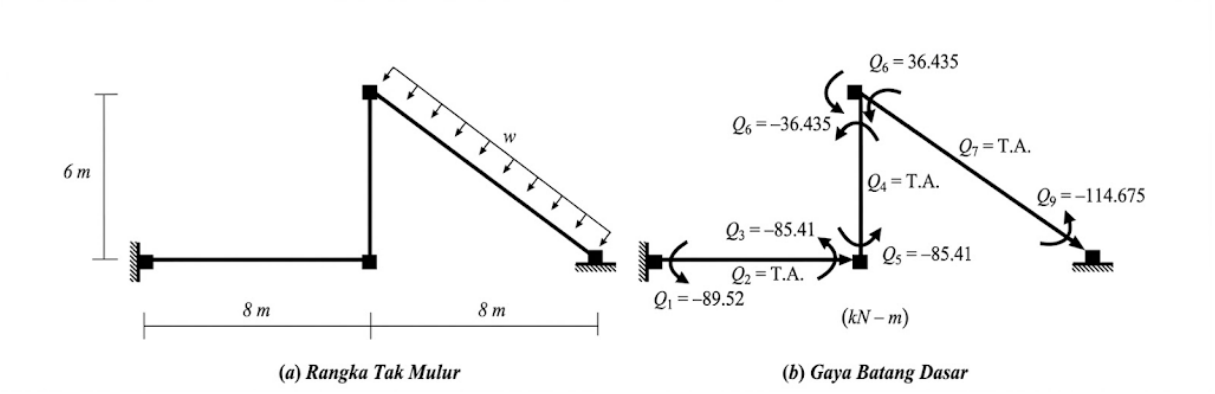


Gambar 5.39 Medan perpindahan untuk model balok *Timoshenko* 2-simpul.

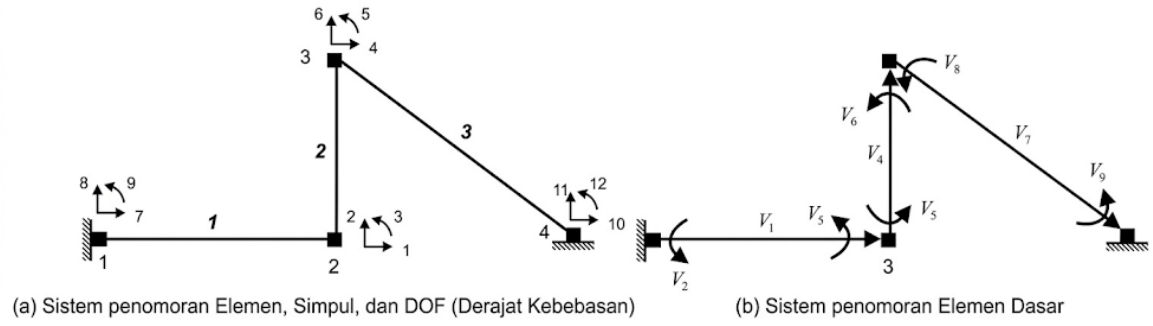
Contoh 5.5

Struktur rangka tak-mulur yang diperlihatkan pada Gambar 5.40 a hanya dibebani oleh beban terbagi rata *w* di sepanjang batang miring. Berdasarkan momen ujung yang diperlihatkan pada Gambar 5.40 b, tentukan besarnya beban terbagi rata *w* di sepanjang batang miring tersebut menggunakan prinsip perpindahan maya. Penyelesaian: Sistem penomoran batang, simpul, dan derajat kebebasan (DOF) diperlihatkan pada Gambar 5.41 a, sedangkan sistem penomoran deformasi dasar batang diperlihatkan pada Gambar 5.41 b. Dengan mengikuti pendekatan yang dijelaskan dalam Bab 4, persamaan kompatibilitas matriks untuk keseluruhan struktur pada derajat kebebasan bebas dapat dinyatakan dalam format ringkas sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.125 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.1667 & 0 & 1 & 0.1667 & 0 & 0 \\ -0.1667 & 0 & 0 & 0.1667 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.06 & 0.08 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.06 & 0.08 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} \text{ atau } \mathbf{V}_{free} = \mathbf{A}_{free}\mathbf{U}_{free}$$



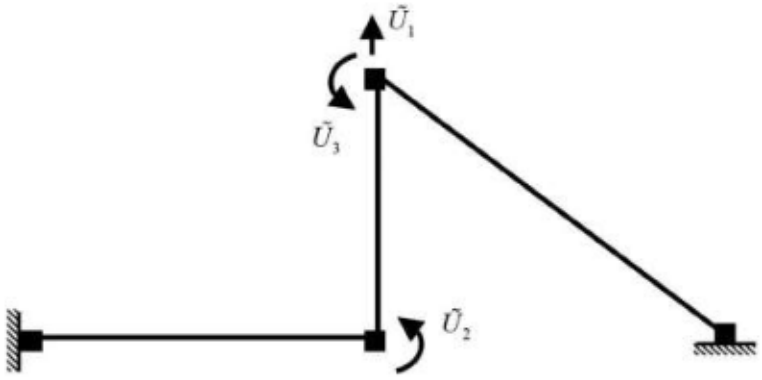
Gambar 5.40 Contoh 5.5.



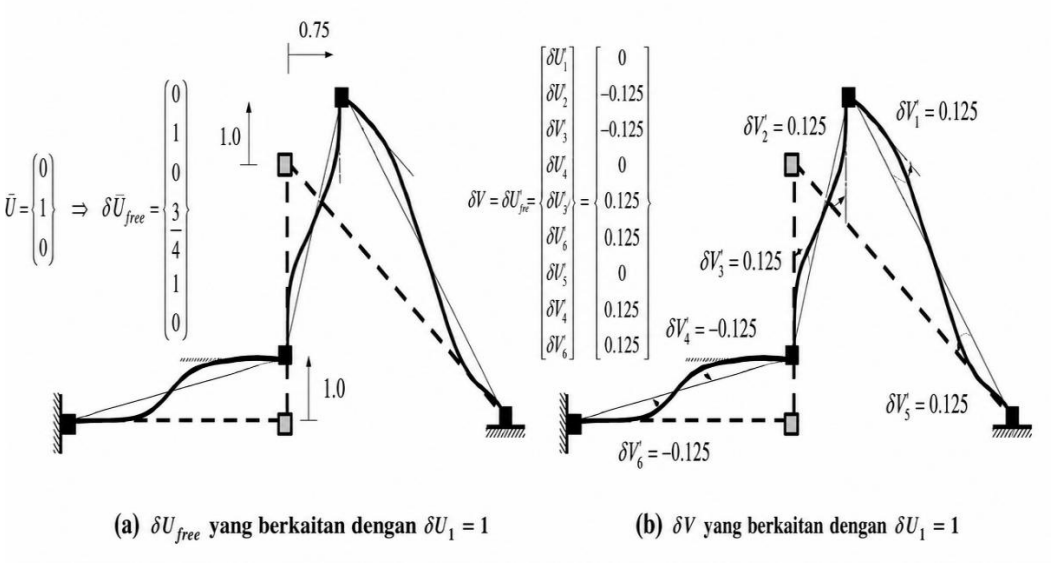
Gambar 5.41 Contoh 5.5 (Lanjutan).

Hubungan kinematik antara U bebas dan $U\sim$ yang bersesuaian dengan kendala ketidakmampuan untuk meregang (Gambar 5.42) ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$left\{\begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.75 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad U_{\text{free}} = A_C \tilde{U}$$



Gambar 5.42 Contoh 5.5 (Lanjutan).



Gambar 5.43 Contoh 5.5 (Lanjutan).

Persamaan kompatibilitas matriks untuk struktur terkekang tersebut adalah:

$$V_{\text{free}} = A_{\text{free}} U_{\text{free}} = A_{\text{free}} A_C \tilde{U} = \tilde{A}_{\text{free}} \tilde{U} \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.125 & 0 & 0 \\ -0.125 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 1 & 0 \\ 0.125 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 0 & 1 \\ 0.125 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

Jelas bahwa deformasi dasar yang terkait dengan respons aksial bernilai nol. Perpindahan simpul virtual berikut diterapkan pada struktur yang terkekang.

$$\delta\tilde{U}_1 = 1 \quad \text{dan} \quad \delta\tilde{U}_2 = \delta\tilde{U}_3 = 0$$

Perpindahan titik simpul yang bersesuaian untuk struktur tanpa kendala ditunjukkan pada Gambar 5.43 a, sedangkan deformasi dasar virtual ditunjukkan pada Gambar 5.43 b. Berdasarkan momen ujung yang ditunjukkan pada Gambar 5.40 b, vektor gaya dasar elemen Q didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \quad Q_7 \quad Q_8 \quad Q_9]^T \\ &= [\text{N.A.} \quad 89.52 \quad 85.41 \quad \text{N.A.} \quad -85.41 \quad -36.44 \quad \text{N.A.} \quad 36.44 \\ &\quad -114.68]^T \end{aligned}$$

Kerja virtual internal adalah: $\delta W_{\text{int}} = -\delta \mathbf{V}^T \mathbf{Q} = 46.88$
Kerja maya eksternal adalah:

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{U}_{\text{free}}^{T} \underbrace{\mathbf{F}_{\text{free}}}_{0} + \sum_{i=1}^{3} \int_{L_i} \delta\, u(x)\, w_i(x)\, dx = -\int_{L_3} \delta\, v_0(x)\, w\, dx$$

Diperlukan kecermatan khusus dalam mengevaluasi kerja maya eksternal yang dilakukan oleh beban terdistribusi w pada medan perpindahan maya $\left(\delta v_0(x)\right)$ di sepanjang elemen 3. Berdasarkan Persamaan (5.218), medan perpindahan maya $\left(\delta v_0(x)\right)$dari elemen 3 dapat dinyatakan sebagai:

$$\delta v_0^{(3)}(x) = \left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\delta \overline{U}_2^{(3)} + \left[L\left\{\frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right\}\right]\underbrace{\delta \overline{U}_3^{(3)}}_{0}$$
$$+ \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\underbrace{\delta \overline{U}_5^{(3)}}_{0} + \left[L\left\{-\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right\}\right]\underbrace{\delta \overline{U}_6^{(3)}}_{0}$$

Dari persamaan (4/4.43), diperoleh

$$\delta \overline{U}_2^{(3)} = -\sin\phi\ \delta U_1^{(3)} + \cos\phi\ \delta {U_2}'^{(3)} = -(-0.6) \times 0.75 + 0.8 \times 1 = 1.25$$

Karena itu,

$$\delta v_0^{(3)}(x) = \left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right](1.25)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = -\int_{L_3} \delta\, v_0^{(3)}(x) w\, dx = -1.25w \int_{L_3} \left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right] dx = -6.25w$$

Total kerja maya adalah:

$$\delta W = \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}} = -6.25w + 46.88 = 0 \Rightarrow w = 7.5\ \text{kN/m}$$

5.16 PRINSIP KERJA VIRTUAL KOMPLEMENTER: STRUKTUR RANGKA

Sejauh ini, prinsip kerja virtual komplementer untuk elemen rangka telah dirumuskan. Semua komponen yang diperlukan telah tersedia, yaitu:

- Prinsip gaya virtual untuk partikel tegar dan benda tegar.
- Prinsip gaya virtual untuk elemen rangka (benda yang dapat mengalami deformasi), termasuk ekspresi kerja virtual komplementer internal maupun eksternal.
- Transformasi kontragradien antara dua sistem perpindahan.

Pada bagian ini, prinsip kerja virtual komplementer untuk keseluruhan struktur rangka akan dirumuskan. Sebagaimana telah disebutkan, struktur rangka terdiri dari titik simpul (partikel tegar) dan elemen rangka (penghubung yang dapat mengalami deformasi). Keseluruhan

struktur rangka dikenai perpindahan titik simpul tertentu $\mathbf{U}_{\text{constr}}$ (diketahui), sementara derajat kebebasan yang tidak terkendala bergerak melalui perpindahan titik simpul bebas $\mathbf{U}_{\text{free}}$ (tidak diketahui). Medan deformasi internal $e(x)$ harus kompatibel dengan perpindahan eksternal tersebut ($\mathbf{U}_{\text{free}}$ dan $\mathbf{U}_{\text{constr}}$). Karena keseluruhan struktur rangka dapat dipandang sebagai satu benda yang dapat mengalami deformasi, prinsip kerja virtual komplementer yang dikembangkan untuk benda semacam itu dapat diterapkan pada struktur rangka secara keseluruhan; artinya, jumlah kerja virtual komplementer eksternal dan internal bernilai nol.

Dalam hal ini, kerja virtual komplementer eksternal didefinisikan sebagai kerja yang dilakukan oleh gaya titik simpul virtual dan beban elemen virtual terhadap perpindahan aktual pada derajat kebebasan global, sedangkan kerja virtual komplementer internal didefinisikan sebagai kerja yang dilakukan oleh medan gaya internal virtual terhadap medan deformasi elemen aktual. Perlu diingat bahwa medan gaya elemen virtual harus berada dalam keadaan setimbang dengan gaya eksternal virtual pada derajat kebebasan global. Dengan kata lain, medan gaya tersebut harus membentuk suatu sistem gaya virtual yang memenuhi syarat statis (*statically admissible*). Oleh karena itu, kerja virtual komplementer eksternal dapat dinyatakan sebagai:

$$\delta W^*_{\text{ext}} = \delta \mathbf{F}^T_{\text{free}} \mathbf{U}_{\text{free}} + \delta \mathbf{F}^T_{\text{constr}} \mathbf{U}_{\text{constr}} + \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{L_i} \delta\, \mathbf{w}^T(x) \mathbf{u}(x)\, dx \right) \tag{5.221}$$

Perlu dicatat bahwa penjumlahan langsung kerja virtual eksternal komplementer yang dihasilkan oleh beban batang virtual $\delta w(x)$ pada medan perpindahan batang riil $u(x)$ di seluruh batang dapat dilakukan karena sifat skalar dari kerja tersebut.

Berdasarkan analogi serupa, total kerja virtual internal komplementer dapat didefinisikan sebagai penjumlahan langsung kerja virtual internal komplementer dari seluruh batang dan dinyatakan sebagai berikut:

$$\delta W^*_{\text{int}} = -\delta U^*_{\text{int}} = -\sum_{i=1}^{N} \left(\int_{L_i} \delta\, \boldsymbol{\sigma}(x)^T \boldsymbol{\varepsilon}(x)\, dx \right) \tag{5.222}$$

Persamaan kerja maya komplementer (5.114) untuk keseluruhan rangka sebagai benda yang dapat mengalami deformasi adalah:

$$\underbrace{\delta W^* = \delta \mathbf{F}^T_{\text{free}} \mathbf{U}_{\text{free}} + \delta \mathbf{F}^T_{\text{constr}} \mathbf{U}_{\text{constr}} + \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{L_i} \delta\, \mathbf{w}(x)^T \mathbf{u}(x)\, dx \right)}_{\delta W^*_{\text{ext}}}$$

$$\underbrace{-\sum_{i=1}^{N} \left(\int_{L_i} \delta\, \boldsymbol{\sigma}(x)^T \boldsymbol{\varepsilon}(x)\, dx \right)}_{\delta W^*_{\text{int}}} = 0 \tag{5.223}$$

Mengingat sifat sembarang dari gaya virtual, sistem gaya virtual dapat dipilih sedemikian rupa sehingga $\delta w(x)$ tanpa mengurangi keumumannya. Oleh karena itu, Persamaan (5.223) dimodifikasi menjadi:

$$\delta W^* = \delta \mathbf{F}_{\text{free}}^T \mathbf{U}_{\text{free}} + \delta \mathbf{F}_{\text{constr}}^T \mathbf{U}_{\text{constr}} - \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{L_i} \delta\, \boldsymbol{\sigma}(x)^T \boldsymbol{\varepsilon}(x)\, dx \right) = 0 \qquad (5.224)$$

Perlu diingat kembali bahwa prinsip kerja maya (5.224) merupakan cara alternatif untuk menyatakan persamaan kompatibilitas. Dengan memindahkan suku integral ke ruas kanan, Persamaan (5.224) ditulis ulang sebagai berikut:

$$\delta \mathbf{F}_{\text{free}}^T \mathbf{U}_{\text{free}} + \delta \mathbf{F}_{\text{constr}}^T \mathbf{U}_{\text{constr}} = \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{L_i} \delta\, \boldsymbol{\sigma}(x)^T \boldsymbol{\varepsilon}(x)\, dx \right) \qquad (5.225)$$

Dengan membandingkan sisi kanan persamaan (5.225) dengan persamaan (5.166) dan (5.169), dapat disimpulkan bahwa:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\int_{L_i} \delta\, \boldsymbol{\sigma}(x)^T \boldsymbol{\varepsilon}(x)\, dx \right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\delta \mathbf{q}^{(i)} \right)^T \mathbf{v}^{(i)} \qquad (5.226)$$

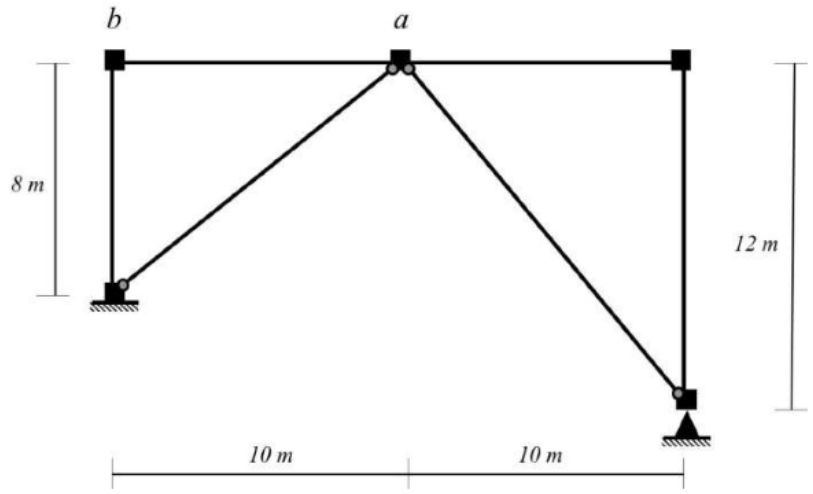
Perlu diingat kembali bahwa vektor gaya dasar struktural Q (Bab 3) dan vektor deformasi dasar struktural V (Bab 4) masing-masing didefinisikan dalam Persamaan (5.213) dan (5.214). Akibatnya, ruas kanan Persamaan (5.226) dapat ditulis sebagai hasil kali skalar antara Qdan V.

$$\sum_{i=1}^{N} \delta\, \mathbf{q}^{(i)T} \mathbf{v}^{(i)} = \delta \mathbf{Q}^T \mathbf{V} \qquad (5.227)$$

Mensubstitusikan Persamaan (5.227) ke dalam (5.225) menghasilkan:

$$\delta \mathbf{F}_{\text{free}}^T \mathbf{U}_{\text{free}} + \delta \mathbf{F}_{\text{constr}}^T \mathbf{U}_{\text{constr}} = \delta \mathbf{Q}^T \mathbf{V} \qquad (2.228)$$

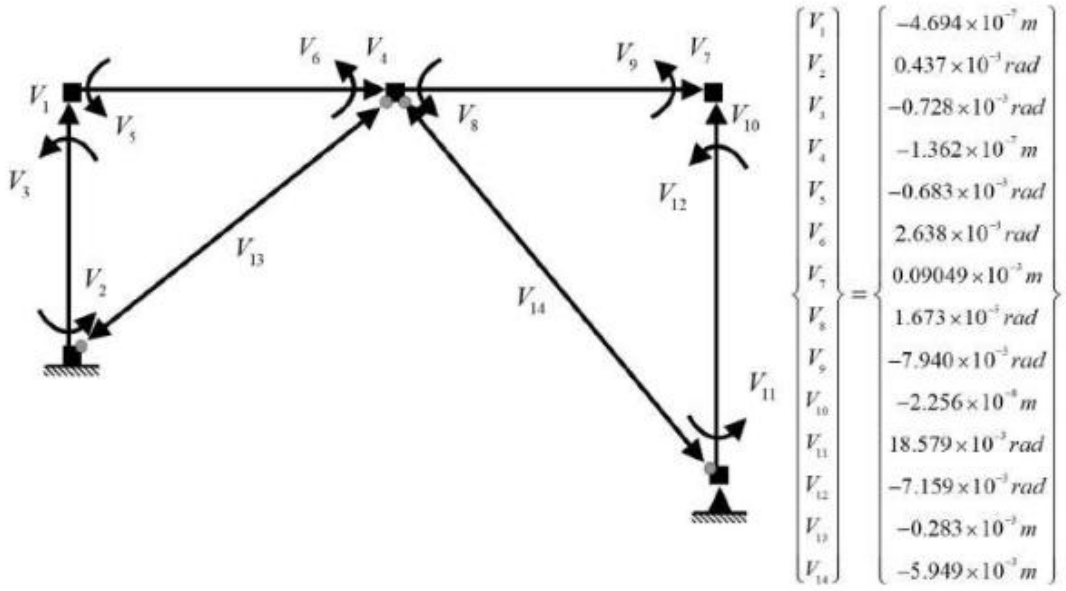
Persamaan (5.228) merupakan cara alternatif untuk menyatakan hubungan kompatibilitas antara deformasi dasar struktural V serta perpindahan nodal struktural $\mathbf{U}_{\text{free}}$ dan $\mathbf{U}_{\text{constr}}$, selama gaya virtual internal δQ dan gaya virtual eksternal δF_{free} dan δF_{constr} membentuk suatu sistem gaya virtual yang secara statis dapat diterima (*statically admissible*).



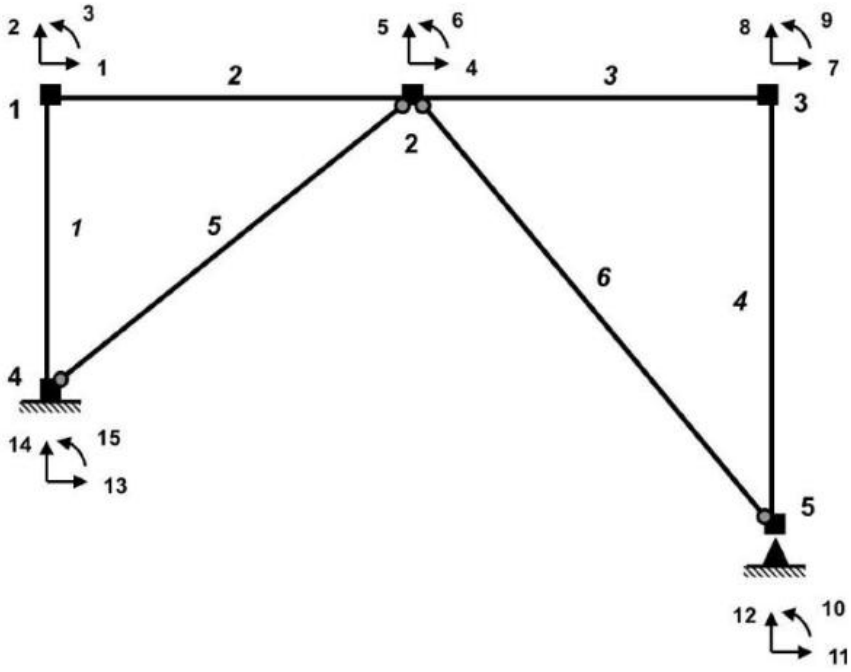
Gambar 5.44 Contoh 5.6.

Contoh 5.6

Diketahui bahwa deformasi dasar struktural dari struktur rangka berpengaku yang diperlihatkan pada Gambar 5.44 disajikan dalam Gambar 5.45: Gunakan prinsip gaya maya untuk menentukan perpindahan vertikal pada titik simpul a dan perpindahan horizontal pada titik simpul b.



Gambar 5.45 Contoh 5.6 (Lanjutan).



Gambar 5.46 Contoh 5.6 (Lanjutan).

- **Penyelesaian**: Sistem penomoran batang, titik simpul, dan derajat kebebasan (DOF) ditunjukkan pada Gambar 5.46. Untuk menentukan perpindahan vertikal pada titik simpul a, digunakan sistem gaya virtual pada Gambar 5.47.

Sistem gaya virtual eksternal $\left((\delta F_5, \delta F_{10}, \delta F_{11}, \delta F_{12}, \delta F_{13}, \delta F_{14}, \delta F_{15})\right)$ dan gaya virtual internal $(\delta Q_{13}, \delta Q_{14})$ membentuk suatu sistem yang memenuhi syarat statis (*statically admissible*) karena sistem tersebut memenuhi kondisi kesetimbangan baik internal maupun eksternal.

Vektor gaya virtual eksternal δF didefinisikan sebagai:

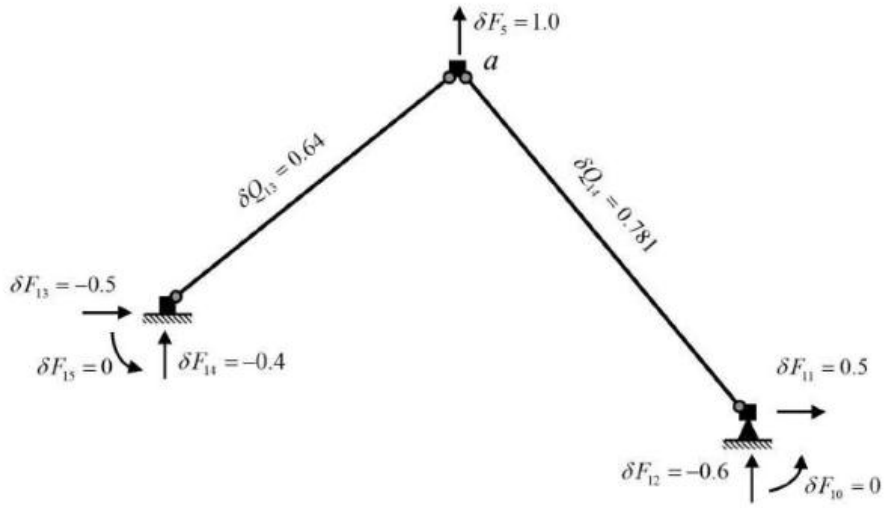
$$\delta F = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.5 \quad -0.6 \quad -0.5 \quad -0.4 \quad 0]^T$$

Vektor gaya virtual internal $\delta\mathbf{Q}$ didefinisikan sebagai:

$$\delta\mathbf{Q} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.64 \quad 0.781]^T$$

Kerja virtual eksternal komplementer adalah:

$$\delta W_{ext}^* = \delta\mathbf{F}^T\mathbf{U} = U_5$$



Gambar 5.47 Contoh 5.6 (Lanjutan).

Di mana

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} & \underbrace{U_{11}}_{0} & \underbrace{U_{12}}_{0} & \underbrace{U_{13}}_{0} & \underbrace{U_{14}}_{0} & \underbrace{U_{15}}_{0} \end{bmatrix}^T$$

Kerja virtual internal komplementer adalah:

$$\delta W_{int}^* = -\delta \mathbf{Q}^T \mathbf{V} = 4.827 \times 10^{-3}$$

Total kerja virtual komplementer adalah:

$$\delta W^* = \delta W_{ext}^* + \delta W_{int}^* = U_5 + 4.827 \times 10^{-3} = 0 \Rightarrow U_5 = -4.827 \times 10^{-3}$$
$$= 4.827 \times 10^{-3}\ m \downarrow$$

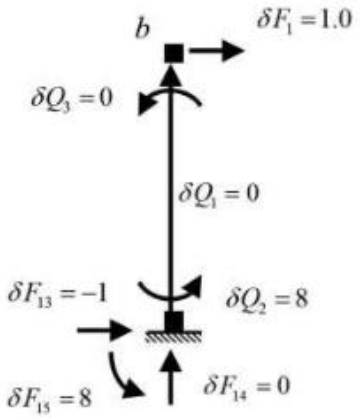
Perlu dicatat bahwa sistem gaya virtual ini merupakan bagian statis tertentu (*statically determinate*) dari keseluruhan rangka. Oleh karena itu, sistem gaya virtual ini relatif mudah untuk dianalisis. Untuk menentukan perpindahan horizontal pada titik simpul b, digunakan sistem gaya virtual pada Gambar 5.48:

Sistem gaya virtual eksternal (δF_1, δF_{13}, δF_{14}, dan δF_{15}) dan internal (δQ_1, δQ_2, dan δQ_3) membentuk suatu sistem yang memenuhi syarat statis (*statically admissible*), karena sistem tersebut memenuhi kondisi kesetimbangan internal maupun eksternal. Vektor gaya virtual eksternal $\delta\mathbf{F}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\delta\mathbf{F} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 8]^T$$

Vektor gaya virtual internal $\delta\mathbf{Q}$ didefinisikan sebagai:

$$\delta\mathbf{Q} = [0 \quad 8 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$



Gambar 5.48 Contoh 5.6 (Lanjutan).

Kerja virtual eksternal komplementer adalah:

$$\delta W_{ext}^{*} = \delta \mathbf{F}^{T} \mathbf{U} = U_1$$

Kerja virtual internal komplementer adalah:

$$\delta W_{int}^{*} = -\delta \mathbf{Q}^{T} \mathbf{V} = -3.496 \times 10^{-3}$$

Total kerja virtual komplementer adalah:

$$\delta W^{*} = \delta W_{ext}^{*} + \delta W_{int}^{*} = U_1 - 3.496 \times 10^{-3} = 0 \Rightarrow U_1 = 3.496 \times 10^{-3}$$
$$= 3.496 \times 10^{-3}\ m \rightarrow$$

BAB 6
METODE KEKAKUAN PENDEKATAN KONSEPTUAL

6.1 PENDEKATAN MATRIKS DALAM ANALISIS STRUKTUR RANGKA

Sejauh ini, belum ada pendekatan matriks yang dikembangkan untuk menganalisis struktur rangka, meskipun hal tersebut merupakan topik utama dalam buku teks ini. Namun, hampir semua komponen dasar yang diperlukan untuk mengembangkan metode analisis struktur semacam itu sudah tersedia, yaitu:

- Persyaratan kesetimbangan dari Bab 3.
- Persyaratan kompatibilitas geometris dari Bab 4.
- Solusi bentuk kuat (*strong-form*) untuk elemen rangka dari Bab 2 guna memperoleh
- sifat-sifat dasar elemen.
- Prinsip perpindahan maya dan gaya maya dari Bab 5.

Tiga hal pertama merupakan persyaratan utama yang harus dipenuhi, sedangkan hal terakhir adalah sarana yang memungkinkan ketiga persyaratan utama tersebut dirumuskan secara bersamaan. Secara umum, terdapat dua pendekatan matriks dalam analisis struktur: "Metode Kekakuan" (*Stiffness Method*) dan "Metode Fleksibilitas" (*Flexibility Method*). Pengantar singkat mengenai metode-metode ini telah diberikan pada Bab 1.

Tujuan utama bab ini adalah merumuskan persamaan kesetimbangan yang dikaitkan dengan derajat kebebasan struktur dalam bentuk matriks. Hubungan matriks ini dikenal sebagai "persamaan kekakuan dasar" atau disingkat "persamaan kekakuan". Istilah "dasar" mengisyaratkan bahwa persamaan tersebut dirumuskan berdasarkan sistem elemen dasarnya (misalnya, balok dengan tumpuan sederhana) di mana moda benda tegar telah dihilangkan. Versi metode kekakuan yang berorientasi pada komputer akan dibahas pada bab berikutnya. Solusi mendasar yang diperoleh dari penyelesaian persamaan kekakuan adalah sekumpulan perpindahan titik simpul yang diakibatkan oleh pembebanan tertentu (baik mekanis maupun non-mekanis). Hal ini menjelaskan mengapa metode kekakuan juga dikenal sebagai "metode perpindahan" (*displacement method*).

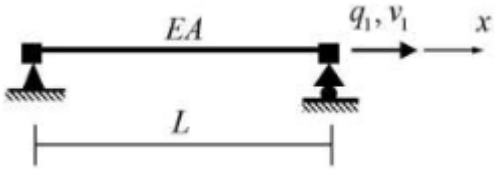
6.2 MATRIKS KEKAKUAN DASAR UNTUK ELEMEN RANGKA PRISMATIK

Pada Bab 2, matriks kekakuan dasar untuk elemen balok Timoshenko prismatik telah diturunkan dan dibahas dalam Contoh 2.4. Matriks kekakuan dasar ini disebut "eksak" karena diperoleh melalui penyelesaian analitis terhadap persamaan diferensial yang relevan. Dengan mengikuti pendekatan yang sama, matriks kekakuan dasar untuk jenis elemen rangka lainnya yang dibahas pada Bab 2 dapat diturunkan, dan penyajiannya di sini dianggap bermanfaat.

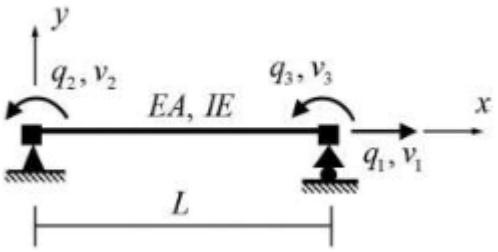
Elemen Batang Prismatik

Persamaan kekakuan dasar untuk elemen batang prismatik (Gambar 6.1) dituliskan sebagai berikut:

$$q_1 = \frac{EA}{L} v_1 \text{ atau } \mathbf{q} = \mathbf{k}_{Bar}\mathbf{v} \tag{6.1}$$



Gambar 6.1 Elemen Batang Prismatik: Sistem Dasar.



Gambar 6.2 Elemen Rangka *Euler-Bernoulli* Prismatik: Sistem Tumpuan Sederhana.

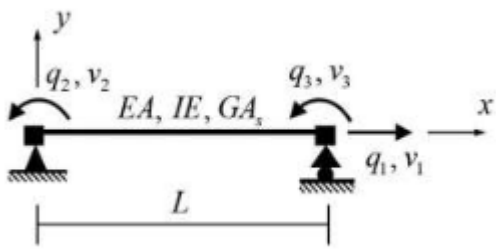
Elemen Rangka Euler-Bernoulli Prismatik: Sistem Tumpuan Sederhana

Persamaan kekakuan dasar elemen rangka Euler-Bernoulli pada sistem tumpuan sederhana (Gambar 6.2) dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4IE}{L} & \frac{2IE}{L} \\ 0 & \frac{2IE}{L} & \frac{4IE}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \text{ atau } q = \bar{k}_{EB}^{B} v \tag{6.2}$$

Elemen Rangka Timoshenko Prismatik: Sistem Tumpuan Sederhana

Persamaan kekakuan dasar elemen rangka *Timoshenko* pada sistem tumpuan sederhana (Gambar 6.3) dituliskan sebagai berikut:



Gambar 6.3 Elemen Rangka Timoshenko Prismatik: Sistem Tumpuan Sederhana.

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(4+\Phi)IE}{(1+\Phi)L} & \frac{(2-\Phi)IE}{(1+\Phi)L} \\ 0 & \frac{(2-\Phi)IE}{(1+\Phi)L} & \frac{(4+\Phi)IE}{(1+\Phi)L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 v_3 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad q = k^B_{TBv} \tag{6.3}$$

di mana adalah ukuran tak-berdimensi dari hubungan antara kekakuan lentur dan kekakuan geser. Jika rangka bersifat langsing, kekakuan geser sangat kecil dibandingkan dengan kekakuan lentur, sehingga $\Phi \rightarrow 0$ dan matriks kekakuan (6.3) untuk rangka Timoshenko pada akhirnya mendekati matriks kekakuan rangka Euler-Bernoulli (6.2).

6.3 MATRIKS KEKAKUAN LENGKAP UNTUK ELEMEN RANGKA

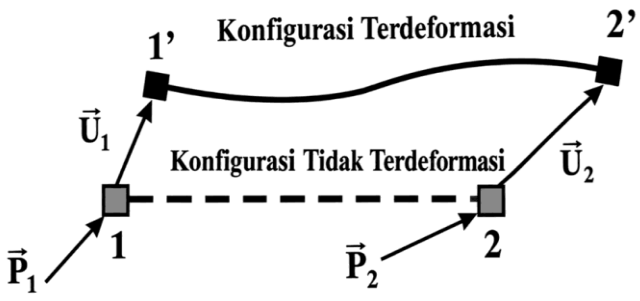
Pada bagian sebelumnya, telah disajikan beberapa matriks kekakuan dasar untuk berbagai jenis elemen rangka yang umum. Matriks-matriks kekakuan ini bersifat eksak dalam arti bahwa matriks-matriks tersebut didasarkan pada solusi bentuk-kuat dari persamaan diferensial yang relevan. Pada bagian ini, disajikan matriks kekakuan untuk jenis-jenis elemen rangka tersebut dalam kaitannya dengan sistem lengkapnya. Matriks kekakuan yang terkait dengan sistem lengkap sangat penting dalam metode kekakuan versi komputasi (metode kekakuan langsung), sebagaimana akan dibahas pada bab berikutnya. Matriks kekakuan lengkap dapat diperoleh dengan mudah dari matriks kekakuan dasarnya melalui matriks transformasi kesetimbangan dan kompatibilitas, sebagaimana masing-masing telah disajikan dalam Bab 3 dan Bab 4. Meskipun tersedia metode yang lebih langsung, pendekatan ini jauh lebih sederhana dan memainkan peran krusial dalam formulasi model rangka berbasis fleksibilitas. Prinsip fisis di balik pendekatan ini serupa dengan memasukkan mode benda-kaku ke dalam sistem dasar. Matriks kekakuan lengkap untuk elemen rangka umumnya menghubungkan gaya-gaya nodal $\bar{P} = [\overline{P_1} \quad \overline{P_2}]^T$ dengan perpindahan nodal $\overline{U} = [\overline{U_1} \quad \overline{U_2}]^T$. Biasanya, matriks ini ditulis dalam bentuk berikut:

$$\overline{P} = \{\overline{P}_1 \overline{P}_2\} = \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & \overline{K}_{12} \\ \overline{K}_{21} & \overline{K}_{22} \end{bmatrix} \{\overline{U}_1 \overline{U}_2\} = \overline{K\overline{U}} \tag{6.4}$$

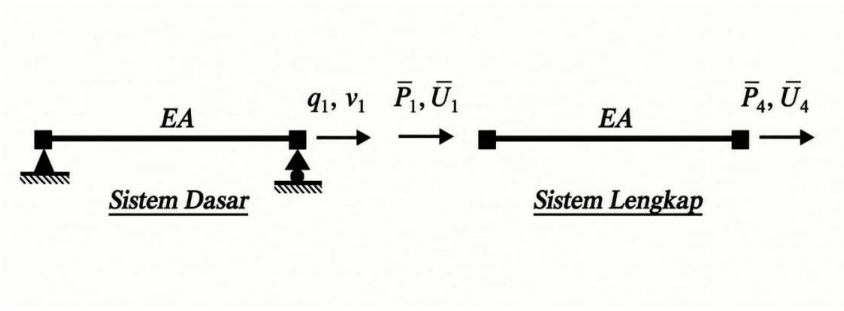
Persamaan (6.4) merupakan ekspresi matriks kekakuan untuk elemen rangka yang memiliki dua titik simpul, masing-masing di setiap ujungnya. Ukuran vektor dan submatriks bergantung pada elemen rangka yang ditinjau. Meskipun demikian, sifat umum dari ekspresi matriks kekakuan pada Persamaan (6.4) dapat diamati melalui konfigurasi umum elemen rangka yang ditunjukkan dalam Gambar 6.4.

Dapat dilihat dengan jelas bahwa submatriks $\overline{K}_{11}$ dan $\overline{K}_{21}$ merepresentasikan gaya-gaya ujung yang timbul semata-mata akibat perpindahan titik simpul $\overline{U}_1$. Demikian pula, $\overline{K}_{12}$ dan $\overline{K}_{12}$ merepresentasikan gaya-gaya ujung yang timbul hanya akibat perpindahan titik simpul $\overline{U}_2$. Berdasarkan Teorema Resiprokal Betti atau Teorema Resiprokal Maxwell, dapat dibuktikan bahwa matriks kekakuan selalu bersifat simetris untuk sistem konservatif.

$$\overline{K_{12}} = \overline{K_{21}^T} \tag{6.5}$$



Gambar 6.4 Elemen Rangka Umum: Gaya dan Perpindahan Nodal.



Gambar 6.5 Elemen Batang Prisma: Sistem Dasar vs. Sistem Lengkap.

Penting untuk dicatat bahwa matriks kekakuan lengkap $\overline{K}$ bersifat singular. Dengan kata lain, $\overline{K}$ tidak memiliki invers. Makna fisis dari singularitas ini adalah bahwa perpindahan nodal $\overline{\boldsymbol{U}}$ tidak dapat dinyatakan dalam bentuk gaya nodal $\overline{\boldsymbol{P}}$. Hal ini dapat dijelaskan karena matriks kekakuan lengkap diperoleh dengan memasukkan mode benda tegar ke dalam matriks kekakuan dasar.

Elemen Batang Prismatik

Tinjau sistem dasar dan sistem lengkap dari elemen batang prismatik yang ditunjukkan pada Gambar 6.5. Gaya-gaya ujung pada kedua sistem ini saling terkait melalui persamaan kesetimbangan matriks (3/3.50) yang dibahas dalam Bab 3.

$$\begin{Bmatrix}\bar{P}_1\\ \bar{P}_4\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} q_1 \text{ atau } \bar{P} = \begin{bmatrix}\bar{b}_1^{truss}\\ \bar{b}_2^{truss}\end{bmatrix} q = \bar{b}^{truss} q \tag{3/3.50}$$

Deformasi dasar elemen v_1 serta perpindahan ujung elemen $\overline{U}_1$ dan $\overline{U}_4$ saling terkait melalui persamaan kompatibilitas matriks (4/4.76) yang dibahas dalam Bab 4.

$$v_1 = [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix}\overline{U_1}\\ \overline{U_4}\end{Bmatrix} \text{atau } v = [\bar{a}_1^{truss} \quad \bar{a}_2^{truss}] \begin{Bmatrix}\overline{U}_1\\ \overline{U}_4\end{Bmatrix} = \bar{a}^{truss} \overline{U} \tag{4/4.76}$$

Dari sifat invarian kerja virtual eksternal (5/5.200), dapat disimpulkan bahwa:

$$\underbrace{\delta v^T q}_{Basic\ System} = \underbrace{\delta \overline{U^T \bar{P}}}_{Complete\ System} \tag{6.6}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4/4.76) ke dalam (6.6), diperoleh

$$\underbrace{\delta \overline{U^T}}_{Arbitrary} \left[\bar{P} - \overline{a^{truss^T} q}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{P} = \overline{a^{truss^T} q} \tag{6.7}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (6.1) ke dalam (6.7), diperoleh

$$\bar{P} = \bar{a}^{truss^T} k_{Bar} v \tag{6.8}$$

Dengan menyubstitusikan Persamaan (4/4.76) ke dalam Persamaan (6.8), diperoleh hubungan kekakuan untuk sistem lengkap sebagai berikut:

$$\bar{P} = \bar{a}^{truss^T} k_{Bar} \bar{a}^{truss} \bar{U} = \bar{K}_{Bar} \bar{U} \tag{6.9}$$

di mana kekakuan anggota lengkap $\bar{K}_{Bar}$ didefinisikan sebagai

$$\bar{K}_{Bar} = \bar{a}^{truss^T} k_{Bar} \bar{a}^{truss} \tag{6.10}$$

Bentuk transformasi ini disebut transformasi "kongruen". Secara eksplisit, kekakuan elemen lengkap KBar dinyatakan sebagai:

$$\bar{K}_{Bar} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1^{truss^T} k_{Bar} \bar{a}_1^{truss} & \bar{a}_1^{truss^T} k_{Bar} \bar{a}_2^{truss} \\ \bar{a}_2^{truss^T} k_{Bar} \bar{a}_1^{truss} & \bar{a}_2^{truss^T} k_{Bar} \bar{a}_2^{truss} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

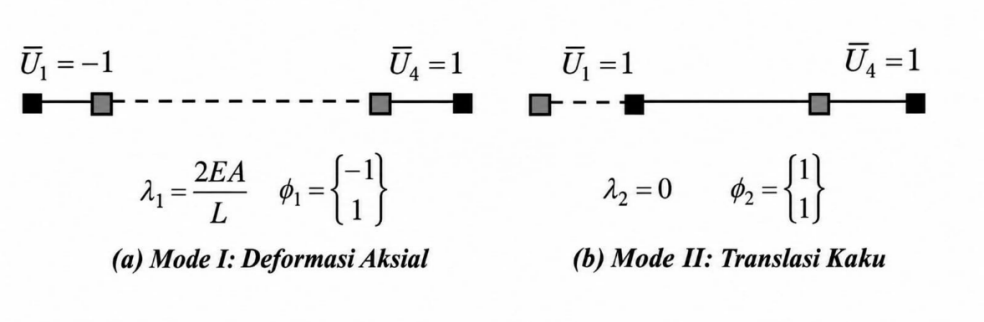
Matriks $\boldsymbol{K}_{Bar}$ bersifat singular karena memuat mode benda tegar. Nilai-nilai eigen λ_1 dan vektor-vektor eigen ϕ_1 yang bersesuaian adalah:

$$\lambda_1 = \frac{2EA}{L} \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = 0 \tag{6.12}$$

$$\phi_1 = [-1 \quad 1]^T \quad \text{dan} \quad \phi_2 = [1 \quad 1]^T \tag{6.13}$$

Dapat diamati bahwa matriks $\boldsymbol{K}_{Bar}$ bersifat semi-positif definit dan memiliki satu nilai eigen nol yang bersesuaian dengan jumlah mode benda tegar. Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 6.6, mode pertama berkaitan dengan deformasi aksial, dan usaha yang diperlukan untuk mendeformasi batang dengan mode ini adalah:

$$W_I = \frac{1}{2}\phi_1^T \overline{K}_{Bar}\phi_1 = \frac{2EA}{L} \tag{6.14}$$



Gambar 6.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari Matriks Kekakuan $\boldsymbol{K}_{Bar}$.

Moda kedua berkaitan dengan translasi benda tegar, dan usaha yang diperlukan untuk memindahkan batang dengan moda ini adalah:

$$W_{II} = \frac{1}{2}\phi_2^T \overline{K}_{Bar}\phi_2 = 0 \tag{6.15}$$

Elemen Rangka Prismatik Euler-Bernoulli: Sistem Tumpuan Sederhana

Tinjau sistem dasar dan sistem lengkap dari elemen Euler-Bernoulli prismatik yang diperlihatkan pada Gambar 6.7. Gaya-gaya ujung antara kedua sistem ini dihubungkan melalui persamaan kesetimbangan matriks (3/3.11) yang telah dibahas pada Bab 3.

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{1B} \\ \bar{b}_{2B} \end{bmatrix} q \text{ atau } \bar{P} = \bar{b}_B q \tag{3/3.11}$$

Deformasi dasar elemen v dan perpindahan ujung elemen $\overline{U}$ saling terkait melalui persamaan kompatibilitas matriks (4/4.23) yang dibahas dalam Bab 4.

$$v = [\bar{a}_{1B} \quad \bar{a}_{2B}] \begin{Bmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{U}_2 \end{Bmatrix} \text{ atau } v = \bar{a}_B \overline{U} \tag{4/4.23}$$

Dari sifat invarian kerja virtual eksternal (5/5.200), dapat disimpulkan bahwa:

$$\underbrace{\delta v^{Tq}}_{Basic\ ystem} = \underbrace{\delta \overline{U^T} \overline{P}}_{Complete\ ystem} \tag{6.16}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4/4.23) ke dalam (6.16), diperoleh

$$\underbrace{\delta \overline{U^T}}_{Arbitrary} \left[\bar{P} - \overline{a_B^T q}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{P} = \overline{a_B^T q} \tag{6.17}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (6.2) ke dalam (6.17), diperoleh

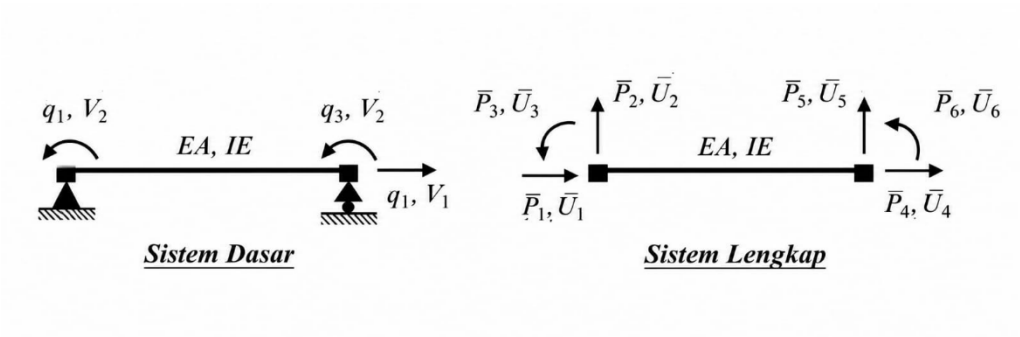
$$\bar{P} = \bar{a}_B^T \bar{k}_{EB}^B v \tag{6.18}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4/4.23) ke dalam (6.18), diperoleh

$$\bar{P} = \bar{a}_B^T \bar{k}_{EB}^B \bar{a}_B \bar{U} = \overline{K}_{EB} \bar{U} \tag{6.19}$$

di mana kekakuan anggota lengkap $\overline{K}_{EB}$ didefinisikan sebagai

$$\overline{K}_{EB} = \bar{a}_B^T \bar{k}_{EB}^B \bar{a}_B \tag{6.20}$$



Gambar 6.7 Elemen Rangka Euler-Bernoulli Prismatik: Sistem Tumpuan Sederhana vs. Sistem Lengkap.

Bentuk transformasi ini disebut transformasi "kongruen". Secara eksplisit, kekakuan elemen lengkap $\overline{K}_{EB}$ dinyatakan sebagai:

$$\overline{K}_{EB} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{1B}^T \bar{k}_{EB}^B \bar{a}_{1B} & \bar{a}_{1B}^T \bar{k}_{EB}^B \bar{a}_{2B} \\ \bar{a}_{2B}^T \bar{k}_{EB}^B \bar{a}_{1B} & \bar{a}_{2B}^T \bar{k}_{EB}^B \bar{a}_{2B} \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

$$\overline{K}_{EB} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & -12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} & 0 & 12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

Matriks $\overline{K}_{EB}$ bersifat singular karena memuat mode benda tegar. Nilai eigen λ_1 dan vektor eigen ϕi yang bersesuaian adalah:

$$\lambda_1 = \frac{2EA}{L}; \lambda_2 = \frac{2IE}{L}; \lambda_3 = \frac{6(4IE + IEL^2)}{L^3}; \text{dan } \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0 \tag{6.23}$$

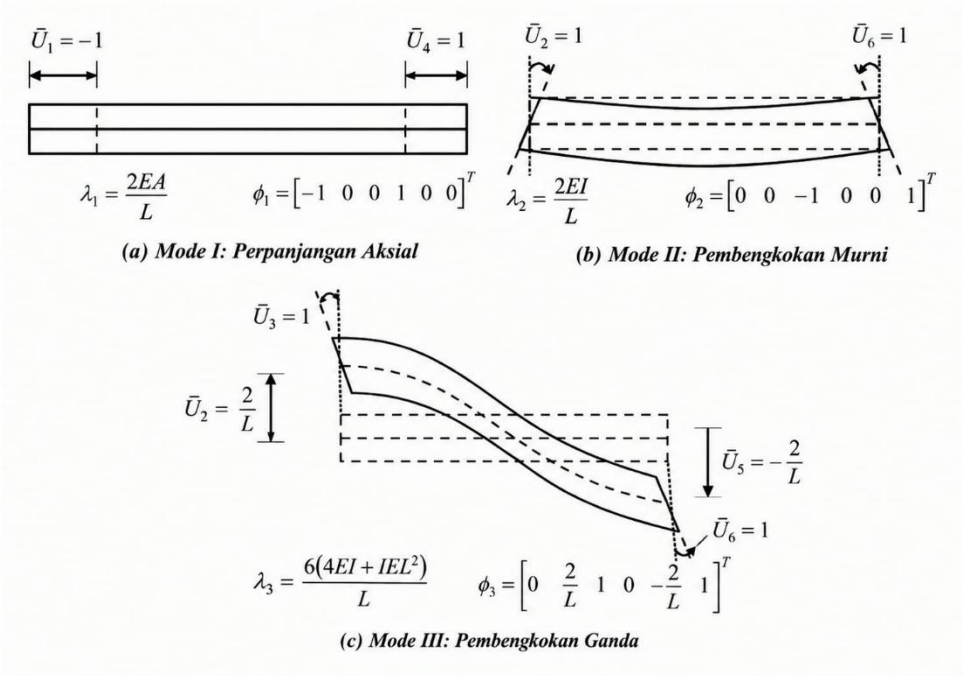
$$\phi_1 = [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T; \phi_2 = [0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T; \phi_3 = \left[0 \quad \frac{2}{L} \quad 1 \quad 0 \quad -\frac{2}{L} \quad 1\right]^T; \tag{6.24}$$
$$\phi_4 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T; \phi_5 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T; \phi_6 = [0 \quad -L \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$

Teramati bahwa matriks $\overline{K}_{EB}$ bersifat semi-positif definit dan memiliki tiga nilai eigen nol, yang bersesuaian dengan jumlah mode benda tegar. Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 6.8, mode deformabel pertama berkaitan dengan deformasi aksial, dan usaha yang diperlukan untuk mendeformasi balok dengan mode ini adalah:

$$W_1 = \frac{1}{2}\phi_1^T \overline{K_{EB}} \phi_1 = \frac{2EA}{L} \tag{6.25}$$

Mode deformasi kedua dikaitkan dengan lentur murni, dan usaha yang diperlukan untuk mendeformasi balok dengan mode ini adalah:

$$W_{II} = \frac{1}{2}\phi_2^T \overline{K_{EB}} \phi_2 = \frac{2IE}{L} \tag{6.26}$$



Gambar 6.8 Mode Deformasi: Elemen Rangka Euler-Bernoulli.

Mode deformasi ketiga berkaitan dengan lenturan ganda, dan usaha yang diperlukan untuk mendeformasi balok dengan mode ini adalah:

$$W_{III} = \frac{1}{2}\phi_3^T \overline{K_{EB}} \phi_3 = \frac{6IE(4+L^2)^2}{L^5} \tag{6.27}$$

Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 6.9, moda keempat berkaitan dengan translasi horizontal kaku, dan usaha yang diperlukan untuk memindahkan balok dengan moda ini adalah:

$$W_{IV} = \frac{1}{2}\phi_4^T \overline{K_{EB}} \phi_4 = 0 \tag{6.28}$$

Moda kelima berkaitan dengan translasi vertikal kaku, dan usaha yang diperlukan untuk memindahkan balok dengan moda ini adalah:

$$W_V = \frac{1}{2}\phi_5^T \overline{K_{EB}} \phi_5 = 0 \tag{6.29}$$

Moda keenam berkaitan dengan rotasi kaku, dan usaha yang diperlukan untuk memindahkan balok dengan moda ini adalah:

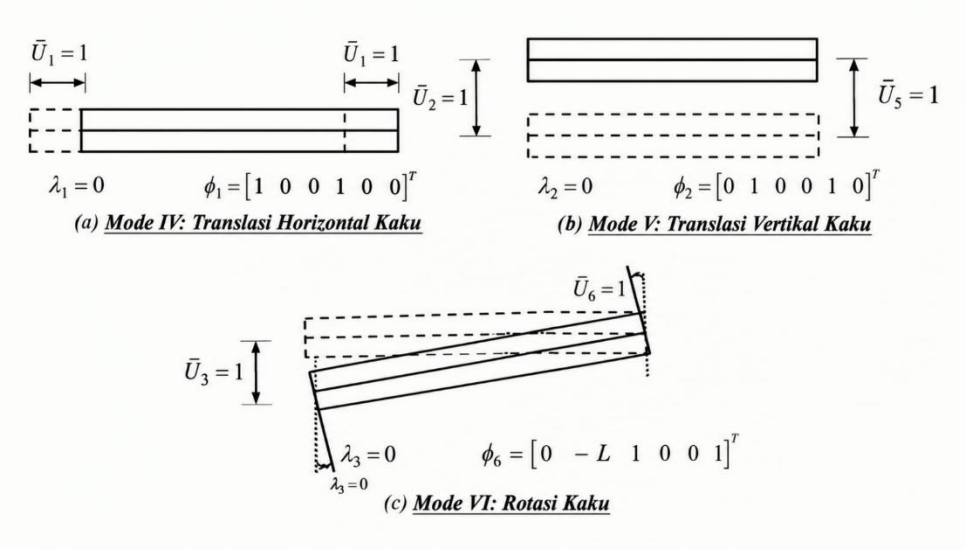
$$W_{VI} = \frac{1}{2}\phi_6^T \overline{K_{EB}} \phi_6 = 0 \tag{6.30}$$

Elemen Rangka Timoshenko Prismatik: Sistem Tumpuan Sendi-Rol (*Simply Supported*)

Tinjau sistem dasar dan sistem lengkap dari elemen rangka Timoshenko prismatik yang diperlihatkan pada Gambar 6.10. Gaya-gaya ujung antara kedua sistem ini dihubungkan melalui persamaan kesetimbangan matriks (3/3.11) yang dibahas dalam Bab 3. Deformasi dasar elemen v dan perpindahan ujung elemen $\overline{U}$ dihubungkan melalui persamaan kompatibilitas matriks (4/4.23) yang dibahas dalam Bab 4. Persamaan-persamaan tersebut perlu dicantumkan kembali di sini.

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{1B} \\ \bar{b}_{2B} \end{bmatrix} q \text{ atau } \bar{P} = \bar{b}_B q \tag{3/3.11}$$

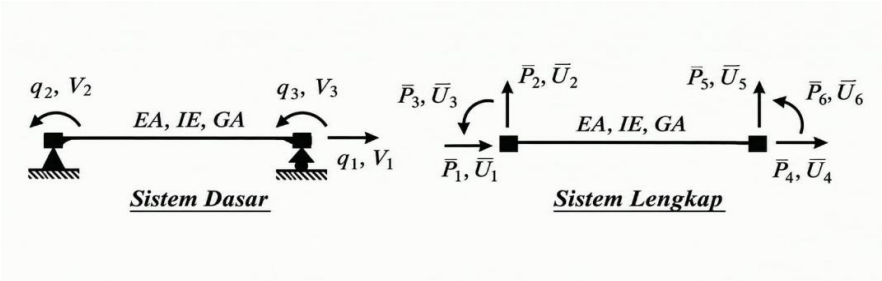
$$v = [\bar{a}_{1B} \quad \bar{a}_{2B}] \begin{Bmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{U}_2 \end{Bmatrix} \text{ atau } v = \bar{a}_B \overline{U} \tag{4/4.23}$$



Gambar 6.9 Moda Benda Kaku: Elemen Rangka Euler-Bernoulli.

Dari sifat invarian kerja virtual eksternal (5/5.200), dapat disimpulkan bahwa:

$$\underbrace{\delta v^T q}_{Basic\ ystem} = \underbrace{\delta \overline{U^T \bar{P}}}_{Complete\ ystem} \tag{6.31}$$



Gambar 6.10 Anggota Rangka Timoshenko Prisma: Sistem Tumpuan Sederhana vs. Sistem Lengkap.

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4/4.23) ke dalam (6.31), diperoleh

$$\underbrace{\delta \overline{U^T}}_{Arbitrary} \left[\bar{P} - \overline{a_B^T q}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{P} = \overline{a_B^T q} \tag{6.32}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (6.3) ke dalam (6.17), diperoleh

$$\bar{P} = \bar{a}_B^T \bar{k}_{TB}^B v \tag{6.33}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4/4.23) ke dalam (6.33), diperoleh

$$\bar{P} = \bar{a}_B^T \bar{k}_{TB}^B \bar{a}_B \bar{U} = \bar{K}_{TB} \bar{U} \tag{6.34}$$

di mana kekakuan anggota lengkap $\overline{K}_{TB}$ didefinisikan sebagai

$$\overline{K}_{TB} = \bar{a}_B^T \bar{k}_{TB}^B \bar{a}_B \tag{6.35}$$

Secara eksplisit, kekakuan anggota lengkap $\overline{K}_{TB}$ adalah

$$\overline{K}_{TB} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{1B}^T \bar{k}_{TB}^B \bar{a}_{1B} & \bar{a}_{1B}^T \bar{k}_{TB}^B \bar{a}_{2B} \\ \bar{a}_{2B}^T \bar{k}_{TB}^B \bar{a}_{1B} & \bar{a}_{2B}^T \bar{k}_{TB}^B \bar{a}_{2B} \end{bmatrix} \tag{6.36}$$

$$\overline{K}_{TB} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{L^3(1+\Phi)} & 6\frac{EI}{L^2(1+\Phi)} & 0 & -12\frac{EI}{L^3(1+\Phi)} & 6\frac{EI}{L^2(1+\Phi)} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2(1+\Phi)} & \frac{(4+\Phi)EI}{(1+\Phi)L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2(1+\Phi)} & \frac{(2-\Phi)EI}{(1+\Phi)L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI}{L^3(1+\Phi)} & -6\frac{EI}{L^2(1+\Phi)} & 0 & 12\frac{EI}{L^3(1+\Phi)} & -6\frac{EI}{L^2(1+\Phi)} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2(1+\Phi)} & \frac{(2-\Phi)EI}{(1+\Phi)L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2(1+\Phi)} & \frac{(4+\Phi)EI}{(1+\Phi)L} \end{bmatrix} \tag{6.37}$$

Terlihat bahwa matriks $\overline{K}_{TB}$ bersifat singular karena memuat mode benda tegar. Nilai eigen λ_i dan vektor eigen ϕ_i yang bersesuaian adalah:

$$\lambda_1 = \frac{2EA}{L}; \lambda_2 = \frac{2IE}{L}; \lambda_3 = \frac{6(4IE + IEL^2)}{L^3(1+\Phi)}; \text{dan } \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0 \tag{6.38}$$

$$\phi_1 = [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T; \phi_2 = [0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T; \phi_3 = \left[0 \quad \frac{2}{L} \quad 1 \quad 0 \quad -\frac{2}{L} \quad 1\right]^T;$$
$$\phi_4 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T; \phi_5 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T; \phi_6 = [0 \quad -L \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \tag{6.39}$$

Sebagaimana diperkirakan, terdapat tiga nilai eigen bernilai nol yang bersesuaian dengan tiga mode benda tegar (*rigid-body modes*). Semua vektor eigennya sama dengan vektor eigen pada matriks kekakuan rangka Euler-Bernoulli prismatik (Gambar 6.8 dan Gambar 6.9). Hal ini dapat dibenarkan karena kedua jenis elemen balok tersebut seharusnya menunjukkan mode deformasi dan mode benda tegar yang sama. Lebih lanjut, menarik untuk dicermati bahwa hanya dua nilai eigen pertama ($\lambda_1$dan λ_2) yang sama dengan nilai eigen pada matriks kekakuan rangka Euler-Bernoulli prismatik. Hal ini wajar karena kedua nilai eigen tersebut beserta vektor eigen yang bersesuaian ($\boldsymbol{\phi_1}$ dan $\boldsymbol{\phi_2}$) berkaitan dengan deformasi aksial dan mode lentur murni (Gambar 6.8a dan b), di mana gaya geser bernilai nol. Namun, nilai eigen ketiga (λ_3) berbeda dari nilai eigen pada matriks kekakuan rangka Euler-Bernoulli prismatik. Hal ini sesuai dugaan

karena mode deformasi (Gambar 6.8c) yang bersesuaian dengan nilai eigen ini berada dalam kondisi lentur ganda (*double bending*) yang melibatkan adanya gaya geser.

6.4 TRANSFORMASI KEKAKUAN

Pada bagian sebelumnya, transformasi kekakuan digunakan untuk menurunkan matriks kekakuan lengkap dari matriks kekakuan dasar beberapa jenis elemen. Jenis transformasi ini dapat disebut sebagai transformasi "Mode Benda Tegar" (*Rigid-Body-Mode*). Pada bagian ini, akan dibahas jenis transformasi kekakuan lainnya. Akan ditunjukkan bahwa hubungan transformasi kekakuan dapat diturunkan dari prinsip kerja maya (*virtual work principle*).

Transformasi Koordinat

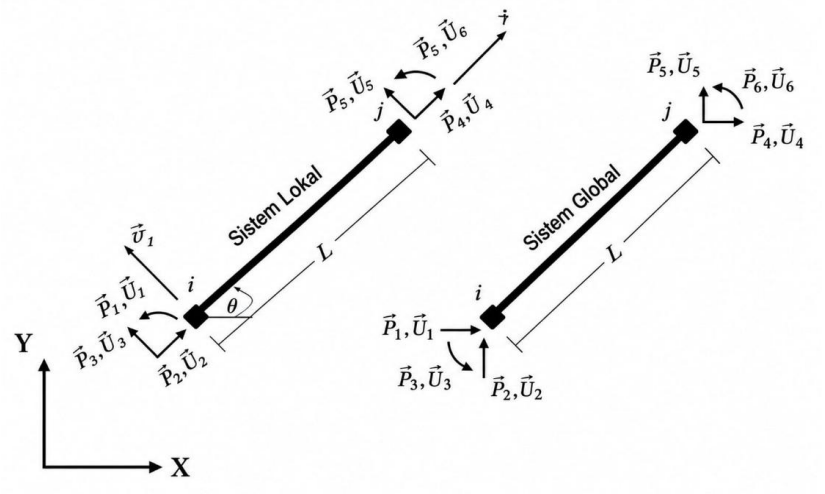
Pada bagian sebelumnya, telah diperoleh matriks kekakuan lengkap untuk beberapa elemen rangka terhadap sistem acuan lokalnya masing-masing. Kini, diperlukan transformasi matriks-matriks kekakuan tersebut dari sistem acuan lokal ($x - y - z$) ke sistem acuan global ($X - Y - Z$). Hal ini dapat dilakukan melalui transformasi koordinat dengan bantuan prinsip kerja maya. Perhatikan elemen rangka 2-D yang ditunjukkan pada Gambar 6.11. Gaya ujung elemen $\bar{P}$ dan perpindahan $\bar{U}$ terhadap sumbu acuan lokal didefinisikan sebagai berikut:

$$\bar{P} = [\bar{P}_1 \quad \bar{P}_2 \quad \bar{P}_3 \quad \bar{P}_4 \quad \bar{P}_5 \quad \bar{P}_6]^T \quad \text{dan} \quad \bar{U} = [\bar{U}_1 \quad \bar{U}_2 \quad \bar{U}_3 \quad \bar{U}_4 \quad \bar{U}_5 \quad \bar{U}_6]^T \quad (6.40)$$

Gaya ujung elemen P dan perpindahan U terhadap sumbu acuan global didefinisikan sebagai:

$$P = [P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5 \quad P_6]^T \quad \text{dan} \quad U = [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \quad U_6]^T \quad (6.41)$$

Perpindahan ujung lokal $\bar{U}$ dan perpindahan ujung global U saling terkait melalui persamaan kompatibilitas matriks (4/4.47) yang dibahas dalam Bab 4. Persamaan-persamaan tersebut patut diulang kembali di sini.



Gambar 6.11 Transformasi Koordinat Rangka 2-D: Sistem Lokal vs. Sistem Global.

$$\begin{Bmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{U}_2 \\ \overline{U}_3 \\ \overline{U}_4 \\ \overline{U}_5 \\ \overline{U}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} \text{ atau } \overline{U} = \Gamma_{ROT} U \quad (4/4.47)$$

Dimana

$$\Gamma_{ROT} = \begin{bmatrix} T_{ROT} & 0 \\ 0 & T_{ROT} \end{bmatrix} \quad (4/4.48)$$

Dari sifat invarian kerja virtual eksternal (5/5.200), dapat disimpulkan bahwa:

$$\underbrace{\delta\overline{U^T\overline{P}}}_{Local\,ystem} = \underbrace{\delta U^T P}_{Global\,ystem} \quad (6.42)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (4/4.47) ke dalam (6.42), diperoleh

$$\underbrace{\delta U^T}_{Arbitrary} [P - \Gamma_{ROT}^T \bar{P}] = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \Gamma_{ROT}^T \bar{P} \quad (6.43)$$

Perlu diingat kembali bahwa persamaan kekakuan elemen lokal adalah:

$$\bar{P} = \overline{K}\overline{U} \quad (6.44)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (6.44) ke dalam (6.43), diperoleh

$$P = \Gamma_{ROT}^T \overline{K}\overline{U} \quad (6.45)$$

Dengan menyubstitusikan Pers. (4/4.47) ke dalam (6.45), diperoleh

$$P = \Gamma_{ROT}^T \overline{K} \Gamma_{ROT} U = KU \quad (6.46)$$

Oleh karena itu, hubungan antara matriks kekakuan lokal dan global adalah:

$$K = \Gamma_{ROT}^T \overline{K} \Gamma_{ROT} \quad (6.47)$$

Untuk elemen rangka Euler-Bernoulli prismatik, matriks kekakuan global K_{EB} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$K_{EB} = \Gamma_{ROT}^T \overline{K}_{EB} \Gamma_{ROT} \quad (6.48)$$

Secara eksplisit,

$$K_{EB} = \begin{bmatrix} c^2\frac{EA}{L} + s^2\frac{12EI}{L^3} & cs\frac{EA}{L} - cs\frac{12EI}{L^3} & -s\frac{6EI}{L^2} & -c^2\frac{EA}{L} - s^2\frac{12EI}{L^3} & -cs\frac{EA}{L} + cs\frac{12EI}{L^3} & -s\frac{6EI}{L^2} \\ cs\frac{EA}{L} - cs\frac{12EI}{L^3} & s^2\frac{EA}{L} + c^2\frac{12EI}{L^3} & c\frac{6EI}{L^2} & -cs\frac{EA}{L} + cs\frac{12EI}{L^3} & -s^2\frac{EA}{L} - c^2\frac{12EI}{L^3} & c\frac{6EI}{L^2} \\ -s\frac{6EI}{L^2} & c\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & s\frac{6EI}{L^2} & -c\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -c^2\frac{EA}{L} - s^2\frac{12EI}{L^3} & -cs\frac{EA}{L} + cs\frac{12EI}{L^3} & s\frac{6EI}{L^2} & c^2\frac{EA}{L} + s^2\frac{12EI}{L^3} & cs\frac{EA}{L} - cs\frac{12EI}{L^3} & s\frac{6EI}{L^2} \\ -cs\frac{EA}{L} + cs\frac{12EI}{L^3} & -s^2\frac{EA}{L} - c^2\frac{12EI}{L^3} & -c\frac{6EI}{L^2} & cs\frac{EA}{L} - cs\frac{12EI}{L^3} & s^2\frac{EA}{L} + c^2\frac{12EI}{L^3} & -c\frac{6EI}{L^2} \\ -s\frac{6EI}{L^2} & c\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & s\frac{6EI}{L^2} & -c\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

Dimana

$$c = \cos\phi \text{ dan } s = \sin\phi \quad (6.50)$$

Nilai-nilai eigen dari matriks K_{EB} adalah:

$$\lambda_1 = \frac{2EA}{L}; \lambda_2 = \frac{2IE}{L}; \lambda_3 = \frac{6(4IE + IEL^2)}{L^3}; \text{dan } \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0 \quad (6.51)$$

Dapat diamati bahwa matriks K_{EB} bersifat semi-positif definit dan menghasilkan jumlah nilai eigen nol yang tepat yang berkaitan dengan mode benda tegar. Selain itu, nilai-nilai eigen tak-nolnya sama dengan nilai eigen matriks kekakuan lokal K_{EB}. Hal ini wajar karena besarnya nilai eigen berkaitan dengan besaran usaha yang invarian terhadap kerangka acuan apa pun. Untuk elemen batang prismatik, matriks kekakuan global K_{Bar} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$K_{Bar} = \Gamma_{ROT}^{Bar\,T}\overline{K}_{Bar}\Gamma_{ROT}^{Bar} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

Dimana

$$\Gamma_{ROT}^{Bar} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

Nilai-nilai eigen dari matriks K_{Bar} adalah:

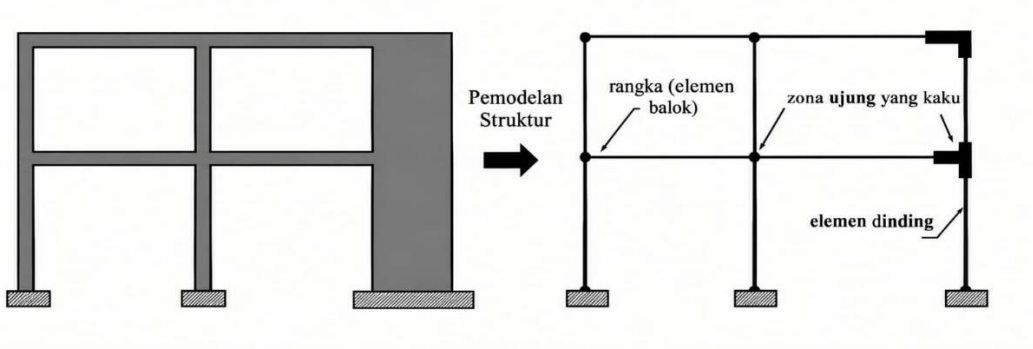
$$\lambda_1 = \frac{2EA}{L} \text{ dan } \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \quad (6.54)$$

Teramati bahwa matriks K_{Bar} bersifat semi-positif definit dan menghasilkan jumlah nilai eigen nol yang tepat terkait dengan moda benda tegar (*rigid body modes*). Selain itu, nilai eigen tak-nolnya sama dengan nilai eigen matriks kekakuan lokal $\overline{K}_{Bar}$. Hal ini dapat dibenarkan karena besarnya nilai eigen berkaitan dengan besaran usaha yang invarian terhadap kerangka acuan apa pun. Untuk elemen rangka lainnya, langkah-langkah yang sama dapat diikuti untuk memperoleh matriks kekakuan global dari matriks kekakuan lokal.

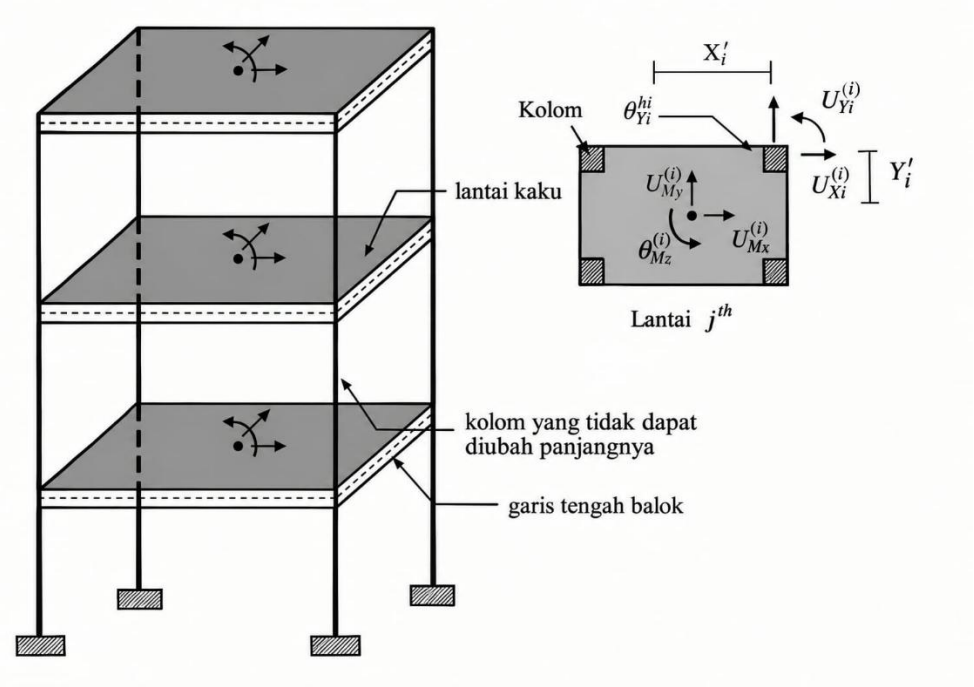
Transformasi Zona Ujung Kaku (*Rigid-End-Zone*)

Terdapat beberapa situasi di mana transformasi Zona Ujung Kaku memainkan peran penting dalam analisis struktur. Sebagai contoh,

1. Ukuran Sambungan Terhingga (Gambar 6.12): Pada kenyataannya, sambungan struktural (titik simpul) bukanlah titik matematis sebagaimana biasanya diasumsikan dalam model struktural. Ketika sambungan direpresentasikan secara memadai oleh sebuah titik, hal ini menyiratkan bahwa panjang tambahan kolom dan balok (biasanya setengah dari tinggi penampang kolom atau balok) cukup untuk mengakomodasi efek dari sambungan yang memiliki dimensi terhingga. Untuk sebagian besar aplikasi, hipotesis ini valid. Namun, ketika tinggi penampang elemen struktural menjadi besar atau kekakuan sambungan menjadi tinggi, hipotesis ini tidak lagi berlaku.
2. Diafragma Lantai Kaku (Gambar 6.13): Biasanya, deformasi pada diafragma lantai dan atap bangunan tergolong kecil dibandingkan dengan simpangan antar-lantai (*inter-story drift*) yang berdekatan. Jika demikian halnya, diafragma dapat dianggap kaku secara efektif, sehingga menghasilkan pengurangan yang signifikan dalam jumlah derajat kebebasan. Banyak program komersial (misalnya SAP 2000) memanfaatkan asumsi ini untuk mengurangi beban komputasi.
3. Hubungan Kaku antara Pelat dan Balok (Gambar 6.14): Saat menganalisis keseluruhan sistem pelat dan balok pendukungnya, sangat penting untuk memperhitungkan jarak eksentrisitas (*offset*) antara titik simpul rangka (balok) dan pelat.
4. Eksentrisitas Titik Simpul (Gambar 6.15): Umumnya, bagian atas balok dan bukan garis tengahnya yang memiliki elevasi sama dalam sistem lantai. Oleh karena itu, balok-balok yang bersebelahan dengan tinggi penampang berbeda akan menghasilkan eksentrisitas titik simpul.



Gambar 6.12 Struktur Rangka-Dinding dengan Sambungan Berdimensi Hingga.

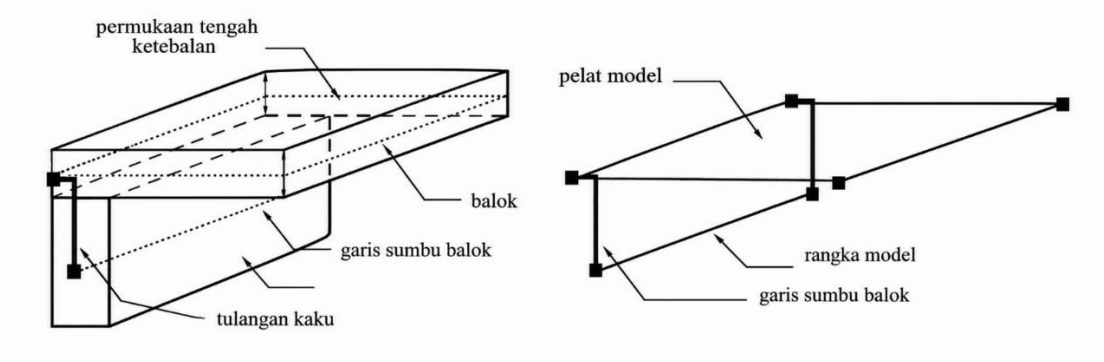


Gambar 6.13 Rangka Bertingkat Banyak dengan Diafragma Lantai Kaku dan Kolom Tak-Dapat-Memanjang.

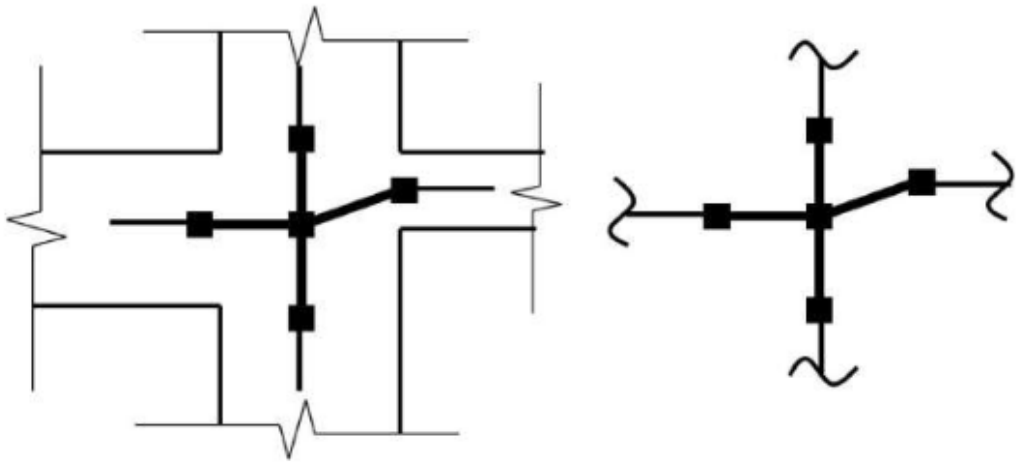
Transformasi *Rigid-End-Zone* (zona ujung kaku) dapat digunakan untuk memperhitungkan efek-efek yang telah disebutkan sebelumnya akibat adanya bagian-bagian yang kaku. Transformasi matriks kekakuan yang terkait dapat diperoleh dengan meninjau hubungan geometris dan menerapkan prinsip perpindahan maya. Selanjutnya, ditinjau kasus umum elemen rangka 2-D dengan zona ujung kaku seperti yang diperlihatkan pada Gambar 6.16. Perpindahan ujung $\overline{U}$ dan gaya ujung $\overline{P}$ dari rangka fleksibel bagian tengah dituliskan dalam bentuk vektor sebagai berikut:

$$\overline{U} = \lfloor \overline{U_1} \quad \overline{U_2} \quad \overline{U_3} \quad \overline{U_4} \quad \overline{U_5} \quad \overline{U_6} \rceil^T \tag{6.55}$$

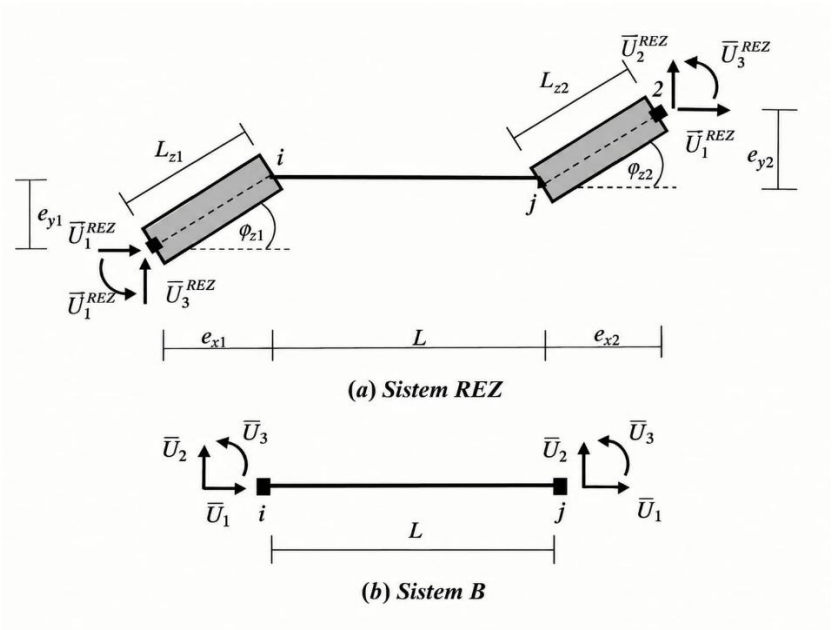
$$\overline{P} = \lfloor \overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \overline{P_3} \quad \overline{P_4} \quad \overline{P_5} \quad \overline{P_6} \rceil^T \tag{6.56}$$



Gambar 6.14 Sambungan Kaku antara Model Pelat (Pelat Lantai) dan Model Rangka (Balok).



Gambar 6.15 Sambungan Berdimensi (*Finite Joint*) dengan Ofset Balok.



Gambar 6.16 Elemen Rangka 2-D: (a) dengan Zona Ujung Kaku; (b) tanpa Zona Ujung Kaku.

Hubungan kekakuan antara kedua besaran ujung ini adalah:

$$\bar{P} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{Bmatrix} = \bar{K}\bar{U} \tag{6.57}$$

Perlu dicatat bahwa elemen rangka tengah dapat berupa salah satu elemen rangka yang telah dikembangkan sebelumnya. Perpindahan ujung $\bar{U}_{REZ}$ dan gaya ujung $\bar{P}_{REZ}$ pada ujung kaku dinyatakan dalam bentuk vektor sebagai berikut:

$$\bar{U}_{REZ} = \begin{bmatrix} \overline{U_1^{REZ}} & \overline{U_2^{REZ}} & \overline{U_3^{REZ}} & \overline{U_4^{REZ}} & \overline{U_5^{REZ}} & \overline{U_6^{REZ}} \end{bmatrix}^T \tag{6.58}$$

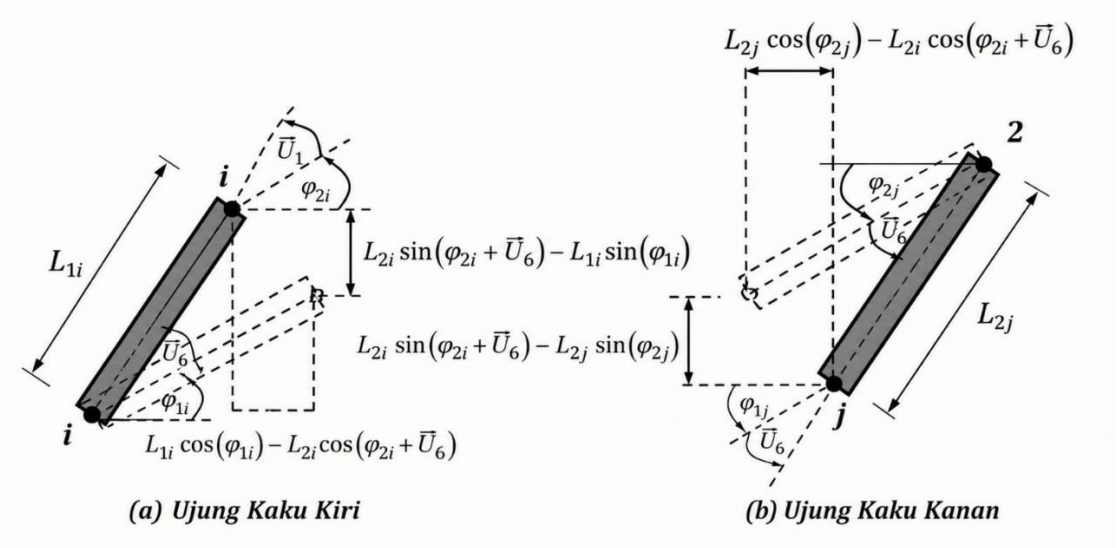
$$\bar{P}_{REZ} = \left[\overline{P_1^{REZ}} \quad \overline{P_2^{REZ}} \quad \overline{P_3^{REZ}} \quad \overline{P_4^{REZ}} \quad \overline{P_5^{REZ}} \quad \overline{P_6^{REZ}}\right]^T \tag{6.59}$$

Hubungan kompatibilitas antara perpindahan ujung $\overline{U}$ dan $\overline{U}_{REZ}$ dapat diperoleh dengan meninjau kinematika ujung kaku kiri dan kanan. Berdasarkan tinjauan kinematik (Gambar 6.17a) terhadap ujung kaku kiri, diperoleh hubungan-hubungan berikut:

$$\begin{aligned}
\overline{U_1} &= \overline{U_1^{REZ}} - (L_{1i}\cos(\varphi_{1i}) - L_{1i}\cos(\varphi_{1i} + \overline{U_3})) \\
\overline{U_2} &= \overline{U_2^{REZ}} + L_{1i}\sin(\varphi_{1i} + \overline{U_3}) - L_{1i}\sin(\varphi_{1i}) \\
\overline{U_3} &= \overline{U_3^{REZ}}
\end{aligned} \tag{6.60}$$

Hubungan kinematik nonlinear ini sama dengan kendala benda tegar (4/4.125) yang diperoleh pada Bab 4. Karena fokus utama hanya terbatas pada struktur geometris linear, Pers. (6.60) dapat dilinearisasi dengan menguraikan semua fungsi trigonometri dan menggunakan linearisasi berikut:

$$\cos\overline{U_3} \approx 1 \text{ dan } \sin\overline{U_3} \approx \overline{U_3} \tag{6.61}$$



Gambar 6.17 Kinematika Ujung Kaku:

Oleh karena itu, Persamaan (6.60) dapat ditulis ulang sebagai:

$$\overline{U_1} = \overline{U_1^{REZ}} - \overline{U_3}L_{1i}\sin(\varphi_{1i})\,; \quad \overline{U_2} = \overline{U_2^{REZ}} + \overline{U_3}L_{1i}\cos(\varphi_{1i})\,; \text{dan } \overline{U_3} = \overline{U_3^{REZ}} \tag{6.62}$$

dan dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai:

$$\begin{Bmatrix}\overline{U}_1\\ \overline{U}_2\\ \overline{U}_3\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -L_{1i}\sin(\varphi_{1i})\\ 0 & 1 & L_{1i}\cos(\varphi_{1i})\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{U_1^{REZ}}\\ \overline{U_2^{REZ}}\\ \overline{U_3^{REZ}}\end{Bmatrix} \text{atau } \overline{U}_1 = \Gamma_{REZ1}\overline{U}_1^{REZ} \tag{6.63}$$

Demikian pula, berdasarkan tinjauan kinematik (Gambar 6.17b) terhadap ujung kaku sebelah kanan, diperoleh hubungan-hubungan berikut:

$$\begin{aligned}\overline{U_4} &= \overline{U_4^{REZ}} + \left(L_{2j}\cos\left(\varphi_{2j}\right) - L_{2j}\cos\left(\varphi_{2j} + \overline{U_6}\right)\right)\\ \overline{U_5} &= \overline{U_5^{REZ}} - L_{2j}\sin\left(\varphi_{2j} + \overline{U_6}\right) + L_{2j}\sin\left(\varphi_{2j}\right)\\ \overline{U_6} &= \overline{U_6^{REZ}}\end{aligned} \tag{6.64}$$

Persamaan (6.64) dapat dilinearisasi menjadi:

$$\overline{U_4} = \overline{U_4^{REZ}} + \overline{U_6}L_{2j}\sin\left(\varphi_{2j}\right);\quad \overline{U_5} = \overline{U_5^{REZ}} - \overline{U_6}L_{2j}\cos\left(\varphi_{2j}\right); \text{dan } \overline{U_6} = \overline{U_6^{REZ}} \tag{6.65}$$

dan dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai:

$$\begin{Bmatrix}\overline{U}_4\\ \overline{U}_5\\ \overline{U}_6\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & L_{2j}\sin\left(\varphi_{2j}\right)\\ 0 & 1 & -L_{2j}\cos\left(\varphi_{2j}\right)\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{U_4^{REZ}}\\ \overline{U_5^{REZ}}\\ \overline{U_6^{REZ}}\end{Bmatrix} \text{atau } \overline{U}_2 = \Gamma_{REZ2}\overline{U}_2^{REZ} \tag{6.66}$$

Dengan menggabungkan Pers. (6.63) dan (6.66), hubungan kompatibilitas matriks antara $\overline{U}$ dan $\overline{U}_{REZ}$ adalah:

$$\begin{Bmatrix}\overline{U}_1\\ \overline{U}_2\\ \overline{U}_3\\ \overline{U}_4\\ \overline{U}_5\\ \overline{U}_6\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -L_{1i}\sin(\varphi_{1i}) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & L_{1i}\cos(\varphi_{1i}) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & L_{2j}\sin\left(\varphi_{2j}\right)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L_{2j}\cos\left(\varphi_{2j}\right)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{U_1^{REZ}}\\ \overline{U_2^{REZ}}\\ \overline{U_3^{REZ}}\\ \overline{U_4^{REZ}}\\ \overline{U_5^{REZ}}\\ \overline{U_6^{REZ}}\end{Bmatrix} \text{atau } \overline{U} = G_{REZ}\overline{U}_{REZ} \tag{6.67}$$

Dengan mengacu pada Gambar 6.16, matriks transformasi *Rigid-End-Zone* dapat dinyatakan dalam bentuk dimensi *offset* sebagai berikut:

$$G_{REZ} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -e_{y1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & e_{x1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & e_{y2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -e_{x2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{6.68}$$

Dalam hal koordinat simpul, dimensi *offset* dapat didefinisikan sebagai:

$$e_{x1} = x_i - x_j;\quad e_{y1} = y_i - y_j;\quad e_{x2} = x_2 - x_j;\quad \text{dan}\quad e_{y2} = y_2 - y_j; \tag{6.69}$$

Dari sifat invarian kerja virtual eksternal (5/5.200), dapat disimpulkan bahwa:

$$\underbrace{\delta\overline{\mathbf{U}}_{REZ}^{T}\overline{\mathbf{P}}_{REZ}}_{\text{System REZ}} = \underbrace{\delta\overline{\mathbf{U}}^{T}\overline{\mathbf{P}}}_{\text{System B}} \tag{6.70}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (6.67) ke dalam (6.70), diperoleh

$$\underbrace{\delta\overline{\mathbf{U}}_{REZ}^{T}}_{\text{Arbitrary}}\left[\overline{\mathbf{P}}_{REZ} - \boldsymbol{\Gamma}_{REZ}^{T}\overline{\mathbf{P}}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{P}}_{REZ} = \boldsymbol{\Gamma}_{REZ}^{T}\overline{\mathbf{P}} \tag{6.71}$$

Persamaan (6.71) secara sederhana mewakili hubungan kesetimbangan antara dua sistem gaya ujung P dan $\overline{\mathbf{P}}_{REZ}$.
Dengan mensubstitusikan Persamaan (6.57) ke dalam (6.71), diperoleh

$$\overline{\mathbf{P}}_{REZ} = \boldsymbol{\Gamma}_{REZ}^{T}\overline{\mathbf{K}}\overline{\mathbf{U}} \tag{6.72}$$

Dengan menyubstitusikan Pers. (6.67) ke dalam (6.72), diperoleh

$$\overline{\mathbf{P}}_{REZ} = \boldsymbol{\Gamma}_{REZ}^{T}\overline{\mathbf{K}}\boldsymbol{\Gamma}_{REZ}\overline{\mathbf{U}}_{REZ} = \overline{\mathbf{K}}_{REZ}\overline{\mathbf{U}}_{REZ} \tag{6.73}$$

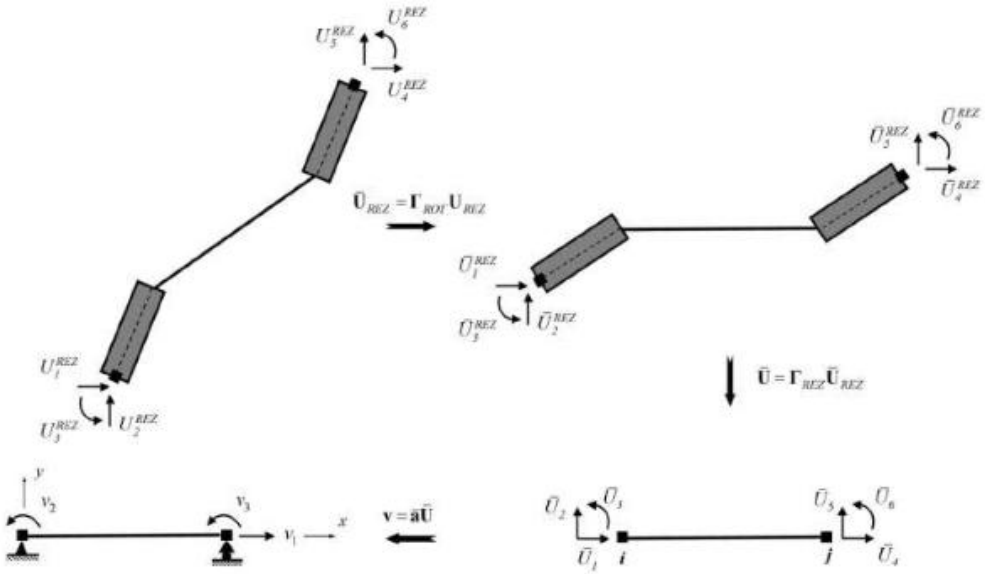
Oleh karena itu, hubungan transformasi yang memperhitungkan keberadaan zona ujung kaku adalah:

$$\overline{\mathbf{K}}_{REZ} = \boldsymbol{\Gamma}_{REZ}^{T}\overline{\mathbf{K}}\boldsymbol{\Gamma}_{REZ} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_{REZ1}^{T}\overline{\mathbf{K}}_{11}\boldsymbol{\Gamma}_{REZ1} & \boldsymbol{\Gamma}_{REZ1}^{T}\overline{\mathbf{K}}_{12}\boldsymbol{\Gamma}_{REZ2} \\ \boldsymbol{\Gamma}_{REZ2}^{T}\overline{\mathbf{K}}_{21}\boldsymbol{\Gamma}_{REZ1} & \boldsymbol{\Gamma}_{REZ2}^{T}\overline{\mathbf{K}}_{22}\boldsymbol{\Gamma}_{REZ2} \end{bmatrix} \tag{6.74}$$

Untuk rangka *Euler-Bernoulli* prismatik, matriks kekakuan elemennya—termasuk zona ujung kaku—adalah:

$$\overline{\mathbf{K}}_{REZ}^{EB} = \boldsymbol{\Gamma}_{REZ}^{T}\overline{\mathbf{K}}_{EB}\boldsymbol{\Gamma}_{REZ}$$

Untuk jenis elemen rangka tengah lainnya, matriks kekakuannya dapat ditransformasikan dengan cara yang serupa.



Gambar 6.18 Representasi Skematis Transformasi Perpindahan.

6.5 RINGKASAN TRANSFORMASI KEKAKUAN

Sejauh ini, bab ini telah membahas tiga transformasi perpindahan elemen, yaitu:

- Transformasi mode benda tegar (*rigid-body-mode*)
- Transformasi koordinat
- Transformasi zona ujung kaku (*rigid-end-zone*)

Semua transformasi tersebut dapat dituliskan secara bersamaan sebagai berikut:

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{a}}\boldsymbol{\Gamma}_{REZ}^{T}\boldsymbol{\Gamma}_{REZ}\bar{\mathbf{U}}_{REZ} = \boldsymbol{\Gamma}\bar{\mathbf{U}}_{REZ} \tag{6.75}$$

dan digambarkan secara skematis pada Gambar 6.18.

Berdasarkan prinsip kerja maya, transformasi gaya yang bersesuaian dinyatakan sebagai:

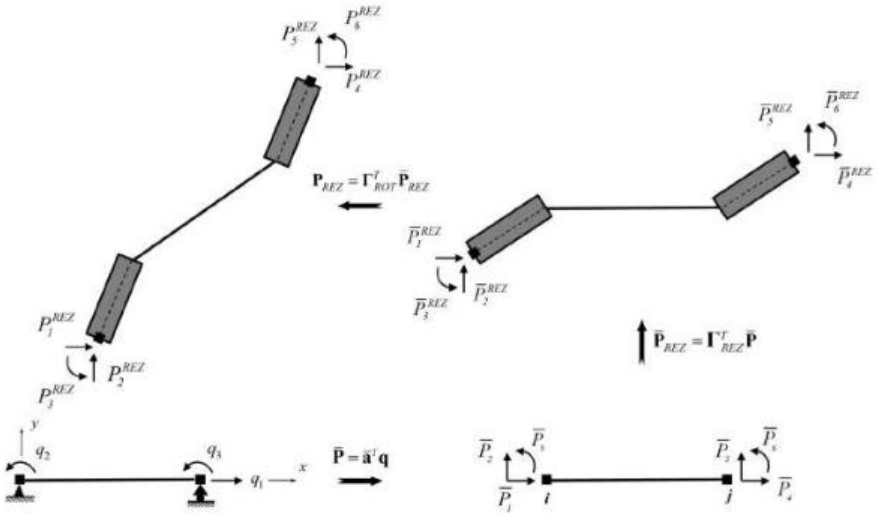
$$\mathbf{P}_{REZ} = \boldsymbol{\Gamma}_{ROT}^{T}\boldsymbol{\Gamma}_{REZ}^{T}\bar{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\Gamma}^{T}\mathbf{q} \tag{6.76}$$

dan secara skematis direpresentasikan pada Gambar 6.19. Akibatnya, transformasi matriks kekakuan dapat ditulis bersama sebagai:

$$\mathbf{P}_{REZ} = \boldsymbol{\Gamma}_{ROT}^{T}\boldsymbol{\Gamma}_{REZ}^{T}\bar{\mathbf{a}}^{T}\bar{\mathbf{K}}\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{REZ}\boldsymbol{\Gamma}_{ROT}\mathbf{U}_{REZ} = \boldsymbol{\Gamma}^{T}\bar{\mathbf{K}}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{U}_{REZ} = \mathbf{K}_{REZ}\mathbf{U}_{REZ} \tag{6.77}$$

Dimana

$$\mathbf{K}_{REZ} = \boldsymbol{\Gamma}_{ROT}^{T}\boldsymbol{\Gamma}_{REZ}^{T}\bar{\mathbf{a}}^{T}\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{a}}\boldsymbol{\Gamma}_{REZ}\boldsymbol{\Gamma}_{ROT} = \boldsymbol{\Gamma}^{T}\bar{\mathbf{k}}\boldsymbol{\Gamma} \tag{6.78}$$



Gambar 6.19 Representasi Skematik Transformasi Gaya.

6.6 METODE KEKAKUAN: PENDEKATAN KONSEPTUAL

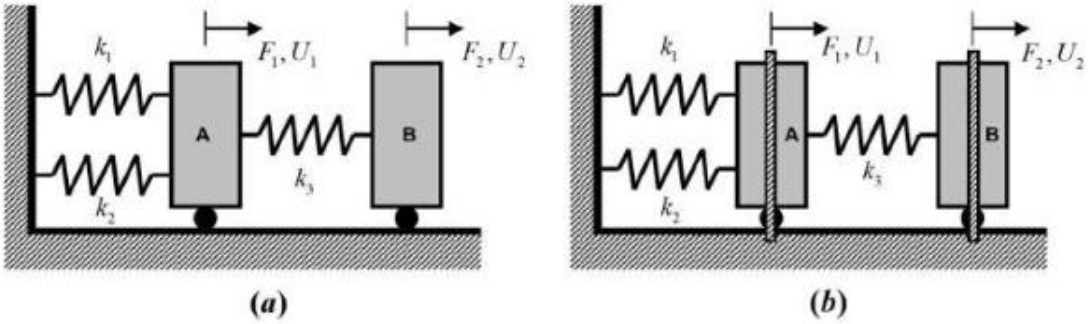
Tujuan utama bab ini adalah mengembangkan persamaan kekakuan untuk struktur rangka. Penyelesaian dasar dari persamaan ini adalah sekumpulan perpindahan titik simpul yang diakibatkan oleh pembebanan tertentu (baik mekanis maupun non-mekanis). Gaya-gaya elemen dan reaksi tumpuan kemudian ditentukan berdasarkan perpindahan titik simpul tersebut menggunakan prosedur tambahan. Tugas utama dalam metode kekakuan adalah menyusun matriks kekakuan struktur K. Pada bagian ini, pendekatan yang disebut sebagai pendekatan "konseptual" akan digunakan untuk menyusun matriks kekakuan struktur. Langkah-langkah umum dalam pendekatan ini adalah sebagai berikut:

1. Struktur dibuat menjadi tentu secara kinematik dengan mengunci semua titik simpul agar tidak mengalami perpindahan.
2. Pada setiap titik simpul yang terkunci, diberikan perpindahan satuan yang bersesuaian dengan setiap derajat kebebasan perpindahan. Berdasarkan definisi, gaya-gaya titik simpul yang timbul untuk mempertahankan bentuk struktur yang telah mengalami perpindahan tersebut merupakan koefisien kekakuan. Perlu dicatat bahwa hanya satu perpindahan yang diberikan pada satu waktu saat menghitung koefisien kekakuan, sementara titik simpul lainnya tetap terkunci.
3. Semua persamaan kesetimbangan yang terkait dengan derajat kebebasan bebas dituliskan secara bersamaan dan kemudian diselesaikan untuk memperoleh nilai perpindahan titik simpul.

Penting untuk dicatat bahwa dengan mengikuti prosedur-prosedur tersebut, persamaan-persamaan yang mengatur perilaku struktur dipenuhi dalam hierarki berikut:

a. **Kondisi Kompatibilitas:** Deformasi elemen harus kompatibel secara geometris dengan perpindahan titik simpul yang diberikan.
b. **Kondisi Konstitutif:** Hubungan tegangan-regangan atau hubungan gaya-deformasi harus dipenuhi.

c. Kondisi Kesetimbangan: Gaya-gaya pada titik simpul dan elemen harus berada dalam keadaan setimbang.



Gambar 6.20 Contoh 6.1.

Contoh 6.1

Tinjau susunan sederhana tiga pegas seperti yang ditunjukkan pada Gambar 6.20a. Gunakan pendekatan konseptual untuk menyusun persamaan kekakuan yang menghubungkan gaya F_1 dan F_2 dengan perpindahan U_1 dan U_2.

- **Penyelesaian**: Sistem pertama-tama dibuat tertentu secara kinematik dengan mengunci semua titik simpul agar tidak mengalami perpindahan (Gambar 6.20b), kemudian diberikan perpindahan satuan sebesar U_1 (Gambar 6.21a).

Berdasarkan tinjauan geometris, deformasi pegas 1, 2, dan 3 adalah:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 1.0 \quad \text{dan} \quad \Delta_3 = -1.0$$

Berdasarkan hubungan konstitutif setiap pegas, gaya internal yang bersesuaian pada setiap pegas dapat ditentukan sebagai berikut:

$$N_1 = k_1\Delta_1 = k_1; \quad N_2 = k_2\Delta_2 = k_2; \quad \text{dan} \quad N_3 = k_3\Delta_3 = -k_3$$

Gaya-gaya yang diperlukan untuk mempertahankan bentuk akibat perpindahan ini ditentukan dengan meninjau kondisi kesetimbangan blok A dan B (Gambar 6.21 b). Dengan demikian, K_{11} dan K_{21} adalah:

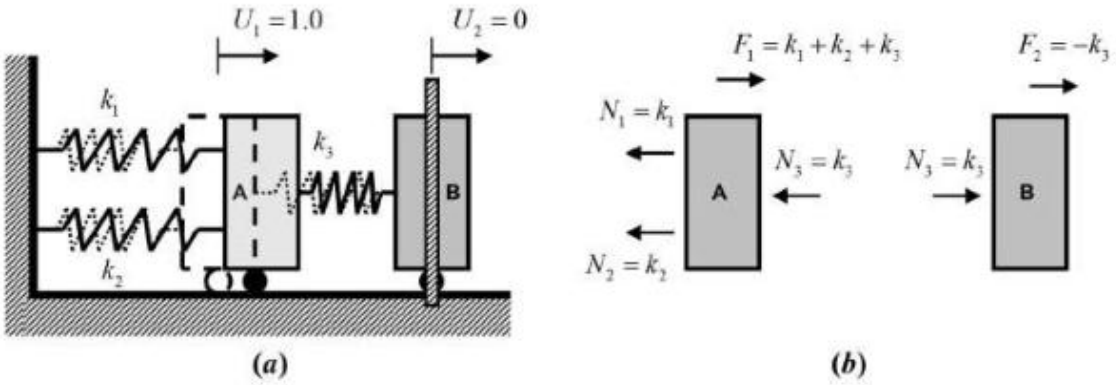
$$K_{11} = F_1 = k_1 + k_2 + k_3 \quad \text{dan} \quad K_{21} = F_2 = -k_3$$

Demikian pula, sistem kemudian dikenai perpindahan satuan sebesar U_2 (Gambar 6.22a). Berdasarkan tinjauan geometris, deformasi pegas 1, 2, dan 3 adalah:

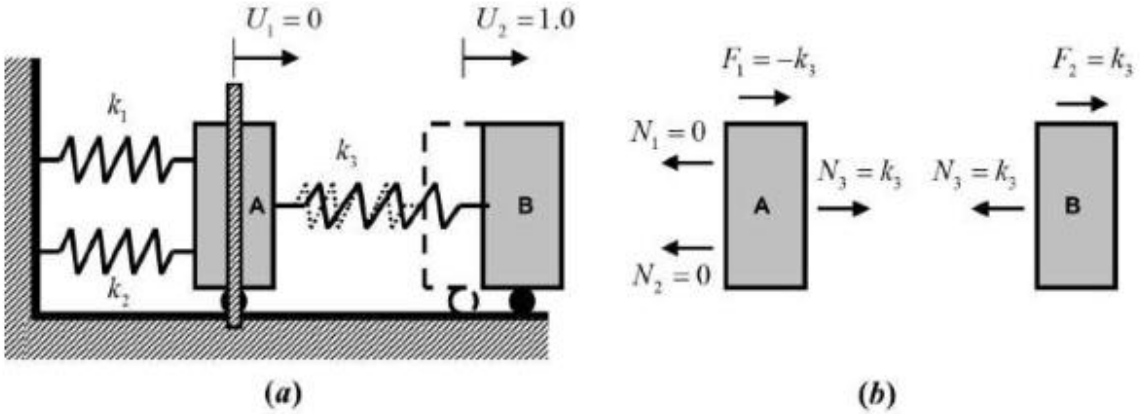
$$\Delta_1 = \Delta_2 = 0 \text{ dan } \Delta_3 = 1.0$$

Berdasarkan hubungan konstitutif setiap pegas, gaya internal yang bersesuaian pada setiap pegas dapat ditentukan sebagai berikut:

$$N_1 = k_1\Delta_1 = 0;\ N_2 = k_2\Delta_2 = 0;\ \text{dan}\ N_3 = k_3\Delta_3 = k_3$$



Gambar 6.21 Contoh 6.1 (Lanjutan).



Gambar 6.22 Contoh 6.1 (Lanjutan).

Gaya-gaya yang diperlukan untuk mempertahankan bentuk terdeformasi ini ditentukan dengan meninjau kondisi kesetimbangan blok A dan B (Gambar 6.22 b). Dengan demikian, K_{12} dan K_{22} adalah:

$$K_{12} = F_1 = -k_3 \text{ dan } K_{22} = F_2 = k_3$$

Berdasarkan prinsip superposisi, dua persamaan kesetimbangan yang terkait dengan U_1 dan U_2 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$F_1 = (k_1 + k_2 + k_3)U_1 - k_3U_2 \text{ dan } F_2 = -k_3U_1 + k_3U_2$$

dalam bentuk matriks sebagai:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \text{ atau } \mathbf{F} = \mathbf{KU}$$

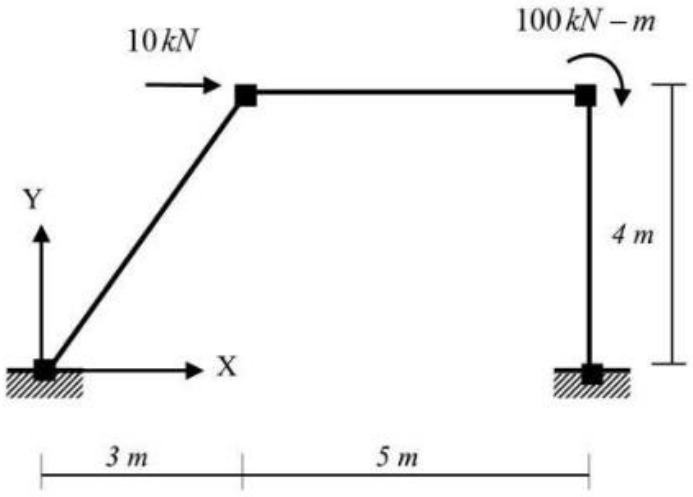
Contoh 6.2

Untuk rangka pada Contoh 4.1, gunakan pendekatan konseptual untuk menyusun persamaan kekakuan struktural yang terkait dengan derajat kebebasan bebas, serta tentukan perpindahan titik simpul, gaya ujung batang, dan reaksi tumpuan. Untuk semua batang, $EA = 10 \times 10^3 kN$ dan $IE = 10^3 kN \cdot m^2$.

- **Penyelesaian**: Berdasarkan Contoh 4.1, persamaan kompatibilitas matriks struktur yang terkait dengan derajat kebebasan bebas adalah:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.16 & -0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.16 & -0.12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} \text{ atau } \mathbf{V} = \mathbf{V}_{free} = \mathbf{A}_{free}\mathbf{U}_{free}$$

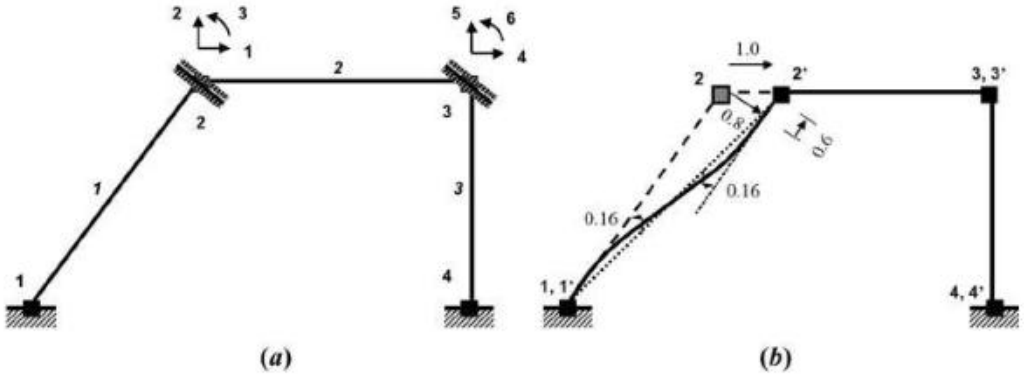
Struktur tersebut pertama-tama dibuat menjadi tentu secara kinematik dengan mengunci semua titik simpul agar tidak mengalami perpindahan (Gambar 6.24a). Kemudian, pada setiap titik simpul yang terkunci tersebut, diberikan perpindahan sebesar satu satuan yang bersesuaian dengan perpindahan yang tidak diketahui.



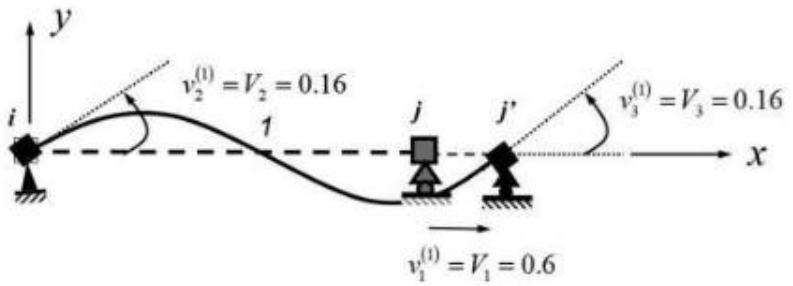
Gambar 6.23 Contoh 6.2.

Sebagai contoh, derajat kebebasan pertama dilepaskan sementara yang lainnya tetap terkunci ($U_1 = 1{,}0$) sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 6.24 b. Berdasarkan matriks kompatibilitas struktural A_free, deformasi yang terkait pada elemen 1 ditunjukkan pada Gambar 6.25 dan gaya-gaya elemen dasar yang bersesuaian adalah:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 400 \\ 0 & 400 & 800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6 \\ 0.16 \\ 0.16 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1200 \\ 192 \\ 192 \end{Bmatrix}$$



Gambar 6.24 Contoh 6.2 (Lanjutan).



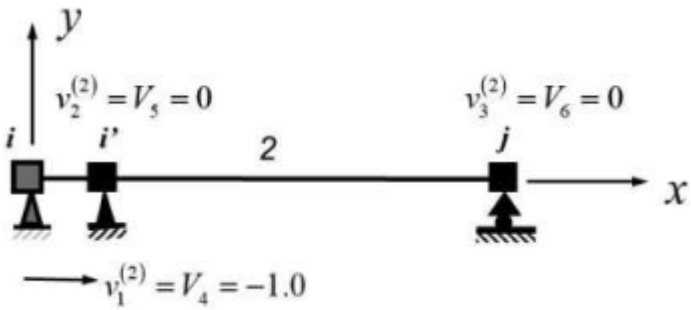
Gambar 6.25 Contoh 6.2 (Lanjutan).

Gaya-gaya ujung elemen yang bersesuaian terhadap sistem acuan global adalah:

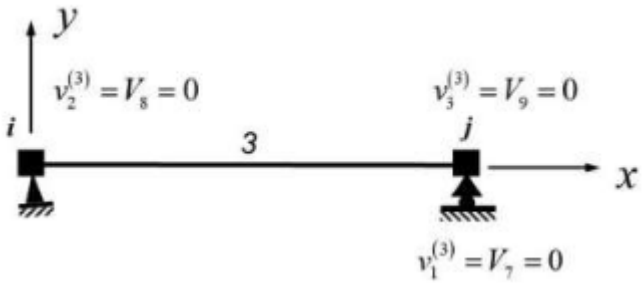
$$\begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_3^{(1)} \\ P_4^{(1)} \\ P_5^{(1)} \\ P_6^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.16 & -0.16 \\ -0.8 & 0.12 & 0.12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0.16 & 0.16 \\ 0.8 & -0.12 & -0.12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -781.44 \\ -913.92 \\ 192 \\ 781.44 \\ 913.92 \\ 192 \end{Bmatrix}$$

Deformasi yang terkait pada elemen 2 ditunjukkan pada Gambar 6.26, dan gaya-gaya dasar elemen yang bersesuaian adalah:

$$\begin{Bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 400 \\ 0 & 400 & 800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Gambar 6.26 Contoh 6.2 (Lanjutan).



Gambar 6.27 Contoh 6.2 (Lanjutan).

Gaya ujung batang yang bersesuaian terhadap sistem acuan global adalah:

$$\begin{Bmatrix} P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} \\ P_3^{(2)} \\ P_4^{(2)} \\ P_5^{(2)} \\ P_6^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2000 \\ 0 \\ 0 \\ -2000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Deformasi yang terkait pada bagian 3 ditunjukkan pada Gambar 6.27 dan gaya-gaya dasar bagian yang bersesuaian adalah:

$$\lfloor Q_7 \quad Q_8 \quad Q_9 \rfloor^T = \lfloor 0 \quad 0 \quad 0 \rfloor^T$$

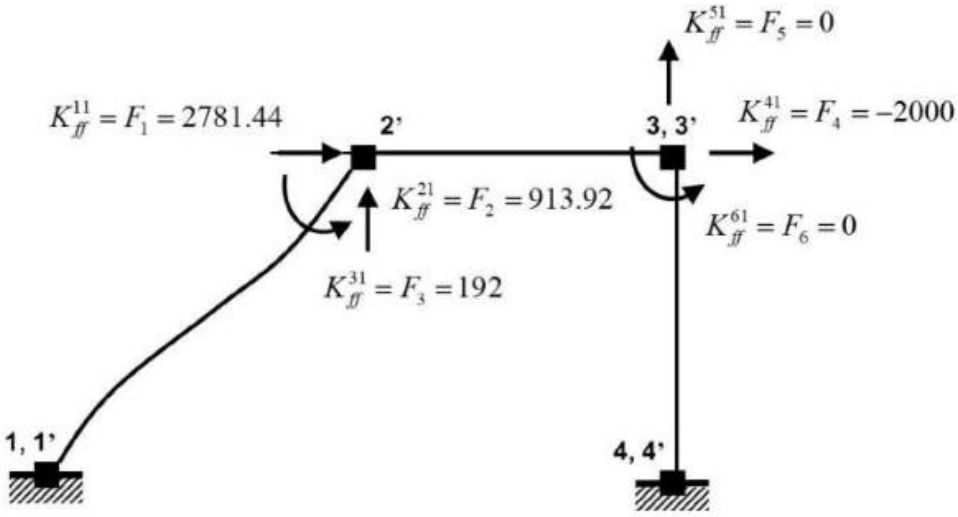
Gaya ujung batang yang bersesuaian terhadap sistem acuan global adalah:

$$\left\lfloor P_1^{(3)} \quad P_2^{(3)} \quad P_3^{(3)} \quad P_4^{(3)} \quad P_5^{(3)} \quad P_6^{(3)} \right\rfloor^T = \lfloor 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rfloor^T$$

Akibatnya, gaya-gaya kendala yang diperlukan untuk mempertahankan bentuk terdeformasi ini ($U_1 = 1{,}0$) ditunjukkan pada Gambar 6.28.

Dengan menerapkan prosedur yang sama pada derajat kebebasan (DOF) bebas lainnya, persamaan kesetimbangan yang terkait dengan setiap derajat kebebasan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 10 &= 2781.44U_1 + 913.92U_2 + 192U_3 - 2000U_4 \\ 0 &= 913.92U_1 + 1410.56U_2 + 96U_3 - 96U_5 + 240U_6 \\ 0 &= 192U_1 + 96U_2 + 1600U_3 - 240U_5 + 400U_6 \\ 0 &= -2000U_1 + 2187.5U_4 + 375U_6 \\ 0 &= -96U_2 - 240U_3 + 2596U_5 - 240U_6 \\ -100 &= 240U_2 + 400U_3 + 375U_4 - 240U_5 + 1800U_6 \end{aligned}$$



Gambar 6.28 Contoh 6.2 (Lanjutan).

Persamaan-persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{F}_{free} = \mathbf{K}_{ff}\mathbf{U}_{free} \text{ atau } \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2781.44 & 913.92 & 192 & -2000 & 0 & 0 \\ 913.92 & 1410.56 & 96 & 0 & -96 & 240 \\ 192 & 96 & 1600 & 0 & -240 & 400 \\ -2000 & 0 & 0 & 2187.5 & 0 & 375 \\ 0 & -96 & -240 & 0 & 2596 & -240 \\ 0 & 240 & 400 & 375 & -240 & 1800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

Ini adalah hubungan kekakuan struktural yang terkait dengan derajat kebebasan, dan kumpulan perpindahan titik simpul dapat diselesaikan dari hubungan ini sebagai:

$$\mathbf{U}_{free} = \left[\mathbf{K}_{ff}\right]^{-1}\mathbf{F}_{free} = \lfloor 0.06082 \quad -0.02883 \quad 0.01071 \quad 0.06743 \quad -0.006455 \quad -0.06900 \rfloor^T$$

Deformasi komponen dasar diperoleh kembali dengan mensubstitusi kumpulan perpindahan nodal ini ke dalam hubungan kompatibilitas struktural.

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}_{free}\mathbf{U}_{free} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.16 & -0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.16 & -0.12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.06082 \\ -0.02883 \\ 0.01071 \\ 0.06743 \\ -0.006455 \\ -0.06900 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.01342 \\ 0.01319 \\ 0.02390 \\ 0.006616 \\ 0.006238 \\ -0.07348 \\ -0.006455 \\ 0.01686 \\ -0.05214 \end{Bmatrix}$$

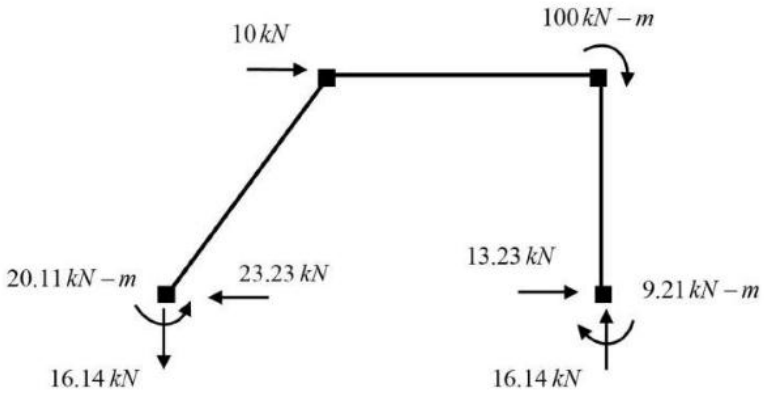
Gaya-gaya dasar setiap elemen ditentukan berdasarkan persamaan kekakuan dasar elemen tersebut. Sebagai contoh, gaya-gaya dasar elemen 1 adalah:

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{k}_1\mathbf{V}_1 \text{ atau } \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 400 \\ 0 & 400 & 800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01342 \\ 0.01319 \\ 0.02390 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 26.85 \text{ kN} \\ 20.11 \text{ kN-m} \\ 24.4 \text{ kN-m} \end{Bmatrix}$$

Gaya-gaya lengkap pada setiap elemen ditentukan berdasarkan persamaan kesetimbangan elemen tersebut.
Sebagai contoh, gaya-gaya lengkap pada elemen 1 adalah:

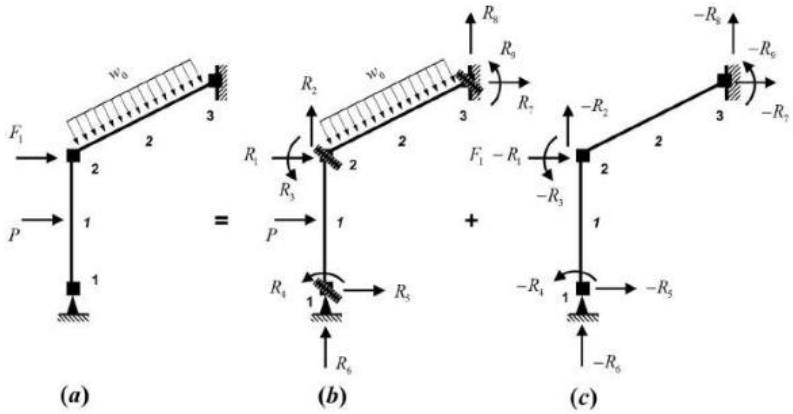
$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{b}_B^{(1)}\mathbf{Q}_1 \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_3^{(1)} \\ P_4^{(1)} \\ P_5^{(1)} \\ P_6^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.16 & -0.16 \\ -0.8 & 0.12 & 0.12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0.16 & 0.16 \\ 0.8 & -0.12 & -0.12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 26.85 \\ 20.11 \\ 24.4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -23.23 \text{ kN} \\ -16.14 \text{ kN} \\ 20.11 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ 23.23 \text{ kN} \\ 16.14 \text{ kN} \\ 24.4 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{Bmatrix}$$

Gaya-gaya reaksi ditunjukkan pada Gambar 6.29. Sejauh ini, pembahasan terbatas pada struktur rangka yang hanya menerima beban nodal. Jenis pembebanan ini dapat ditangani dengan mudah karena berkaitan langsung dengan derajat kebebasan struktur. Oleh karena itu, memasukkannya ke dalam persamaan kekakuan struktur relatif sederhana. Kini, perluasan metode kekakuan secara konseptual dilakukan untuk menganalisis struktur rangka yang menerima beban nodal maupun beban pada batang (*member loads*). Langkah-langkah umum yang telah dibahas sebelumnya tetap berlaku. Pengaruh beban pada batang dapat ditangani secara sederhana sebagai beban nodal ekuivalen. Dengan demikian, hanya diperlukan modifikasi pada vektor beban struktur.



Gambar 6.29 Contoh 6.2 (Lanjutan).

Perhatikan struktur rangka yang ditunjukkan pada Gambar 6.30a. Struktur ini menerima beban nodal dan beban pada batang. Beban luar yang bekerja pada struktur sebenarnya (Gambar 6.30a) dapat diuraikan menjadi dua sistem pembebanan nodal, masing-masing seperti yang ditunjukkan pada Gambar 6.30b dan c. Sistem pertama (Gambar 6.30b) terdiri dari beban-beban nodal yang diperlukan untuk menahan semua titik simpul (*node*) agar tidak bergerak akibat beban pada batang. Kumpulan beban nodal penahan ini dapat ditentukan dengan cara mengunci semua titik simpul agar tidak bergerak, kemudian meninjau kondisi kesetimbangan pada semua titik simpul yang terkunci tersebut. Sistem kedua (Gambar 6.30c) mencakup semua beban nodal yang bekerja pada struktur sebenarnya serta beban nodal yang berlawanan arah dengan beban nodal dari sistem pembebanan pertama. Beban-beban nodal ini disebut sebagai beban nodal "ekuivalen".



Gambar 6.30 Superposisi struktur yang ditahan dan struktur yang dikenai beban nodal ekuivalen.

Berdasarkan prinsip superposisi, gaya dalam dan deformasi pada penampang batang mana pun, serta komponen perpindahan pada titik mana pun dari struktur yang ditunjukkan pada Gambar 6.30a, merupakan jumlah dari besaran-besaran terkait pada rangka yang ditunjukkan pada Gambar 6.30b dan c. Perlu dicatat bahwa beban simpul tertahan pada sistem pertama

tidak selalu disebabkan oleh beban mekanis yang bekerja sepanjang elemen. Beban tersebut dapat timbul akibat gangguan-gangguan berikut:

a) Perubahan suhu pada elemen terkait dalam struktur aktual.
b) Ketidaksesuaian sambungan antar-elemen pada struktur aktual.
c) Pergerakan tumpuan.

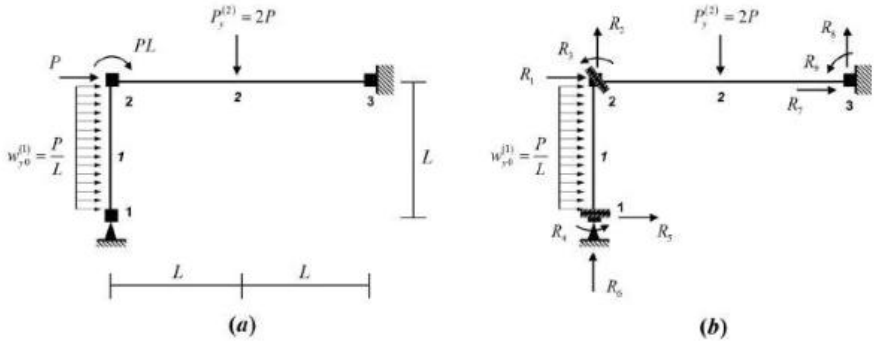
Prosedur umum untuk menghitung beban simpul ekuivalen yang bekerja pada struktur dapat diringkas sebagai berikut:

1. Hitung gaya-gaya jepit $\left(\overline{\mathbf{P}}_F^{(i)}\right)$ pada setiap batang yang dikenai beban batang terhadap sumbu acuan lokalnya.
2. Transformasikan gaya-gaya jepit tersebut dari sumbu acuan lokal ke sumbu acuan global menggunakan matriks rotasi (3/3.24).

$$\mathbf{P}_F^{(i)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(i)\ T} \overline{\mathbf{P}}_F^{(i)} \tag{6.79}$$

3. Tentukan beban simpul penahan yang diperlukan untuk mencegah pergerakan pada semua simpul. Beban-beban ini dihitung dengan mempertimbangkan kesetimbangan simpul akibat gaya ujung jepit. Perlu dicatat bahwa beban simpul penahan tersebut disimpan dalam vektor $\mathbf{R}$ dan dipartisi berdasarkan derajat kebebasan bebas dan terkekang sebagai berikut:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_{free} \quad \mathbf{R}_{constr}]^T \tag{6.80}$$



Gambar 6.31 Contoh 6.3.

4. Definisikan vektor beban nodal ekuivalen sebagai:

$$\mathbf{F}^E = \mathbf{F} - \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{free}^E \\ \mathbf{F}_{constr}^E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{free} \\ \mathbf{F}_{constr} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_{free} \\ \mathbf{R}_{constr} \end{Bmatrix} \tag{6.81}$$

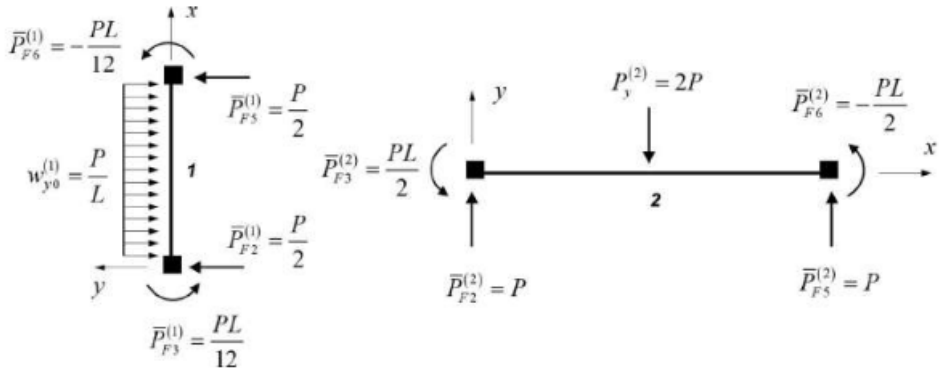
Contoh 6.3

Susun vektor beban titik kumpul ekuivalen $\mathbf{F}^E$ untuk struktur portal yang ditunjukkan pada Gambar 6.31a.

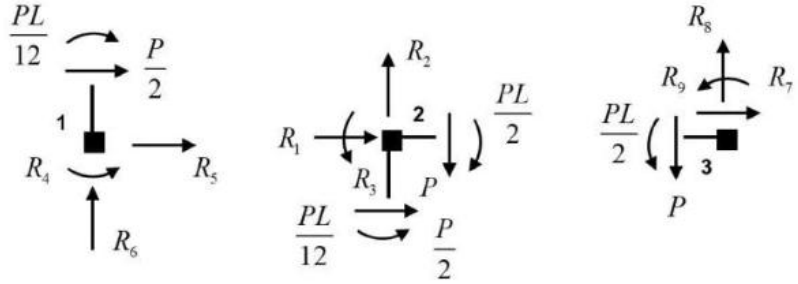
- **Penyelesaian:** Struktur terlebih dahulu dibuat tentu secara kinematik dengan mengunci seluruh titik kumpul terhadap perpindahan (Gambar 6.31b). Vektor gaya jepit untuk setiap batang yang ditunjukkan pada Gambar 6.32 terhadap sumbu acuan lokalnya adalah:

$$\overline{\mathbf{P}}_F^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{P}{2} & \frac{PL}{12} & 0 & \frac{P}{2} & -\frac{PL}{12} \end{bmatrix}^T; \quad \overline{\mathbf{P}}_F^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & P & \frac{PL}{2} & 0 & P & -\frac{PL}{2} \end{bmatrix}^T;$$

Matriks transformasi rotasi setiap elemen digunakan untuk mentransformasikan gaya ujung jepit dari sumbu acuan lokal ke sumbu acuan global.



Gambar 6.32 Contoh 6.3 (Lanjutan).



Gambar 6.33 Contoh 6.3 (Lanjutan).

$$\mathbf{P}_F^{(1)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(1)\,T} \overline{\mathbf{P}}_F^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{P}{2} & 0 & \frac{PL}{12} & -\frac{P}{2} & 0 & -\frac{PL}{12} \end{bmatrix}^T \quad \text{dan}$$

$$\mathbf{P}_F^{(2)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(2)\,T} \overline{\mathbf{P}}_F^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & P & \frac{PL}{2} & 0 & P & -\frac{PL}{2} \end{bmatrix}^T$$

Vektor beban terkekang $\mathbf{R}$ disusun dengan mempertimbangkan kesetimbangan simpul akibat gaya-gaya ujung jepit (Gambar 6.33).

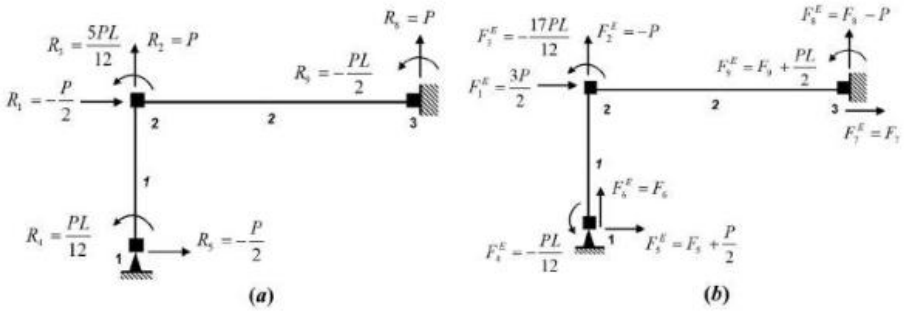
$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_{free} \quad \mathbf{R}_{constr}]^T$$

Dimana

$$\mathbf{R}_{free} = \left[-\frac{P}{2} \quad P \quad \frac{5PL}{12} \quad \frac{PL}{12}\right]^T \quad \text{dan} \quad \mathbf{R}_{constr} = \left[-\frac{P}{2} \quad 0 \quad 0 \quad P \quad -\frac{PL}{2}\right]^T$$

Perlu dicatat bahwa ini adalah kumpulan gaya nodal yang diperlukan untuk mencegah semua titik simpul bergerak. Gaya-gaya tersebut dapat dilihat pada Gambar 6.34a. Vektor beban nodal didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_{free} \quad \mathbf{F}_{constr}]^T$$



Gambar 6.34 Contoh 6.3 (Lanjutan).

di mana

$$\mathbf{F}_{free} = [P \quad 0 \quad -PL \quad 0]^T \quad \text{dan} \quad \mathbf{F}_{constr} = [F_5 \quad F_6 \quad F_7 \quad F_8 \quad F_9]^T$$

Vektor beban nodal ekuivalen (Gambar 6.34 b) didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{F}^E = \mathbf{F} - \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^E_{free} \\ \mathbf{F}^E_{constr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{free} \\ \mathbf{F}_{constr} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_{free} \\ \mathbf{R}_{constr} \end{Bmatrix}$$

Dimana

$$\mathbf{F}^E_{free} = \left[\frac{3P}{2} \quad -P \quad \frac{-17PL}{12} \quad -\frac{PL}{12}\right]^T \quad \text{dan} \quad \mathbf{F}^E_{constr} = \left[F_5 + \frac{P}{2} \quad F_6 \quad F_7 \quad F_8 - P \quad F_9 + \frac{P}{2}\right]^T$$

Contoh 6.4

Struktur rangka pada Contoh 6.2 dikenai beban pada batang dan beban pada titik simpul sebagaimana ditunjukkan dalam Gambar 6.35. Gunakan metode kekakuan untuk menentukan perpindahan titik simpul dan gaya-gaya pada ujung batang.

- **Penyelesaian:** Struktur dibuat menjadi tentu secara kinematik dengan mengunci semua titik simpul agar tidak mengalami perpindahan. Akibatnya, beban titik simpul yang diperlukan untuk mencegah pergerakan setiap titik simpul ditentukan dengan

meninjau kondisi keseimbangan titik simpul. Gaya-gaya ujung jepit untuk setiap batang ditentukan terlebih dahulu sebagaimana ditunjukkan dalam Gambar 6.36.

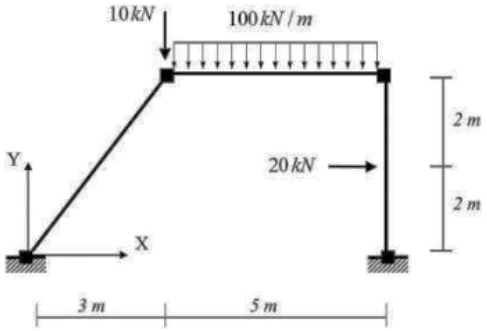
Anggota 1:

$$\mathbf{P}_F^{(1)} = \overline{\mathbf{P}}_F^{(1)} = \mathbf{0}$$

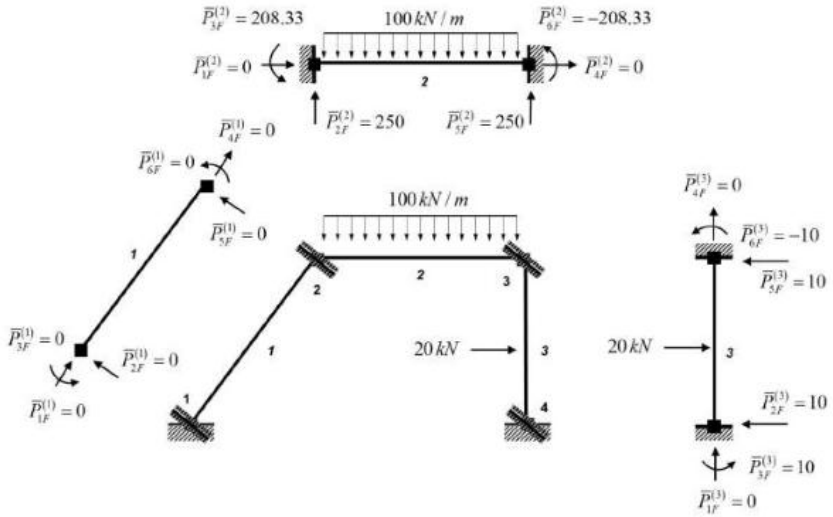
Anggota 2:

$$\overline{\mathbf{P}}_F^{(2)} = [0 \quad 250 \quad 208.33 \quad 0 \quad 250 \quad -208.33]^T$$

$$\mathbf{P}_F^{(2)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(2)\,T} \overline{\mathbf{P}}_F^{(2)} = [0 \quad 250 \quad 208.33 \quad 0 \quad 250 \quad -208.33]^T$$



Gambar 6.35 Contoh 6.4.



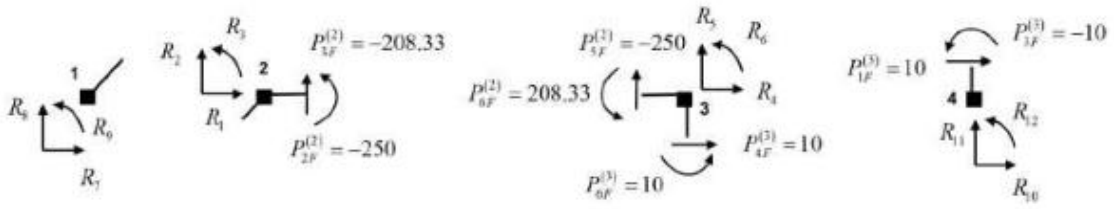
Gambar 6.36 Contoh 6.4 (Lanjutan).

Anggota 3:

$$\overline{\mathbf{P}}_F^{(3)} = [0 \quad 10 \quad 10 \quad 0 \quad 10 \quad -10]^T$$

$$\mathbf{P}_F^{(3)} = \boldsymbol{\Gamma}_{ROT}^{(3)\,T}\overline{\mathbf{P}}_F^{(3)} = [-10 \quad 0 \quad 10 \quad -10 \quad 0 \quad -10]^T$$

Gaya-gaya simpul tertahan yang diperlukan untuk mencegah pergerakan semua simpul ditentukan dengan mempertimbangkan kondisi kesetimbangan simpul sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 6.37.



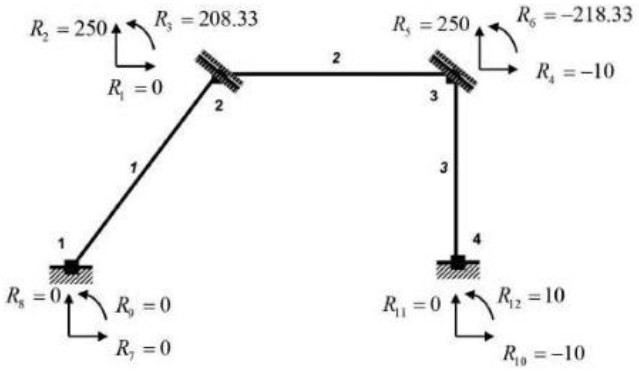
Gambar 6.37 Contoh 6.4 (Lanjutan).

Gaya-gaya simpul tertahan (Gambar 6.38) disusun dalam bentuk vektor sebagai berikut:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_{free} \quad \mathbf{R}_{constr}]^T$$

Dimana

$$\mathbf{R}_{free} = [0 \quad 250 \quad 208.33 \quad -10 \quad 250 \quad -218.33]^T \quad \text{dan} \quad \mathbf{R}_{constr} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -10 \quad 0 \quad 10]^T$$



Gambar 6.38 Contoh 6.4 (Lanjutan).

Persamaan kekakuan struktur yang berhubungan dengan derajat kebebasan bebas $\left(\mathbf{F}_{free}^E = \mathbf{F}_{free} - \mathbf{R}_{free} = \mathbf{K}_{ff}\mathbf{U}_{free}\right)$ adalah:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -260 \\ -208.33 \\ 10 \\ -250 \\ 218.33 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2781.44 & 913.92 & 192 & -2000 & 0 & 0 \\ 913.92 & 1410.56 & 96 & 0 & -96 & 240 \\ 192 & 96 & 1600 & 0 & -240 & 400 \\ -2000 & 0 & 0 & 2187.5 & 0 & 375 \\ 0 & -96 & -240 & 0 & 2596 & -240 \\ 0 & 240 & 400 & 375 & -240 & 1800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{free} = \left[\mathbf{K}_{ff}\right]^{-1}\left(\mathbf{F}_{free} - \mathbf{R}_{free}\right) = \left[\mathbf{K}_{ff}\right]^{-1}\mathbf{F}_{free}^{E}$$

$$\mathbf{U}_{free} = [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \quad U_6]^T = [0.523 \quad -0.539 \quad -0.211 \quad 0.461 \quad -0.124 \quad 0.127]^T$$

Deformasi dasar elemen diperoleh dengan menyubstitusikan kumpulan perpindahan nodal ini ke dalam hubungan kompatibilitas struktur.

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.16 & -0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.16 & -0.12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.523 \\ -0.539 \\ -0.211 \\ 0.461 \\ -0.124 \\ 0.127 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.117 \text{ m} \\ 0.148 \text{ rad} \\ -0.06267 \text{ rad} \\ -0.06215 \text{ m} \\ -0.2942 \text{ rad} \\ 0.04442 \text{ rad} \\ -0.124 \text{ m} \\ 0.1153 \text{ rad} \\ 0.2428 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Gaya-gaya lengkap pada setiap elemen ditentukan berdasarkan persamaan kesetimbangan elemen tersebut. Sebagai contoh, gaya-gaya lengkap pada elemen 1 adalah:

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{b}_B^{(1)}\mathbf{Q}_1 + \mathbf{P}_F^{(1)} = \mathbf{b}_B^{(1)}\overline{\mathbf{k}}_1\mathbf{V}_1 + \mathbf{P}_F^{(1)}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_3^{(1)} \\ P_4^{(1)} \\ P_5^{(1)} \\ P_6^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.16 & -0.16 \\ -0.8 & 0.12 & 0.12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0.16 & 0.16 \\ 0.8 & -0.12 & -0.12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 400 \\ 0 & 400 & 800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.117 \\ 0.148 \\ -0.06267 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 124.3 \text{ kN} \\ 200.1 \text{ kN} \\ 93.7 \text{ kN} - \text{m} \\ -124.3 \text{ kN} \\ -200.1 \text{ kN} \\ 9.3 \text{ kN} - \text{m} \end{Bmatrix}$$

6.7 METODE KEKAKUAN: PENDEKATAN SEMI-OTOMATIS

Pada bagian sebelumnya, matriks kekakuan struktural dibangun menggunakan pendekatan konseptual.Pendekatan ini untuk membangun matriks kekakuan struktural relatif mudah, tetapi bisa sangat melelahkan bahkan untuk struktur rangka kecil (misalnya, struktur rangka pada Contoh 6.2). Oleh karena itu, pendekatan yang lebih terkomputerisasi lebih disukai. Pendekatan tersebut dikenal sebagai pendekatan “semi-otomatis” dan dapat

diturunkan dari prinsip perpindahan virtual. Perlu diingat bahwa persamaan dasar metode kekakuan diturunkan dari tiga set persamaan pengatur, yaitu:

1. *Persamaan Kesetimbangan*: Persamaan kesetimbangan struktur telah dibahas pada Bab 3 dan dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{F} = \mathbf{BQ} + \mathbf{F}^0 \text{ atau } \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{free} \\ \mathbf{F}_{constr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{free} \\ \mathbf{B}_{constr} \end{bmatrix} \mathbf{Q} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^0_{free} \\ \mathbf{F}^0_{constr} \end{Bmatrix} \quad (3/3.43)$$

2. *Persamaan Kompatibilitas*: Persamaan kompatibilitas struktural telah dibahas pada Bab 4 dan dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{V} = \mathbf{AU} \text{ atau } \mathbf{V} = \mathbf{V}_{free} + \mathbf{V}_{constr} = \mathbf{A}_{free}\mathbf{U}_{free} + \mathbf{A}_{constr}\mathbf{U}_{constr} \quad (4/4.56)$$

3. *Persamaan Kekakuan Elemen Dasar*: Persamaan kekakuan elemen dasar telah dibahas sebelumnya dalam bab ini dan sebagian di Bab 2. Untuk satu elemen, persamaan tersebut dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{q}^{(i)} = \mathbf{k}^{(i)}\mathbf{v}^{(i)} + \mathbf{q}_0^{(i)} + \mathbf{q}_w^{(i)} \quad (6.82)$$

Untuk semua anggota, semuanya ditulis bersama sebagai:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{kV} + \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_w \quad (6.83)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}^{(2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{k}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_0^1 \\ \mathbf{Q}_0^2 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_0^m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_w^1 \\ \mathbf{Q}_w^2 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_w^m \end{Bmatrix} \quad (6.84)$$

di mana m adalah jumlah anggota; vektor $\mathbf{q}_0^{(i)}$ berisi gaya anggota dasar akibat deformasi awal; dan vektor $\mathbf{q}_w^{(i)}$ berisi gaya anggota dasar akibat beban anggota. Semua persamaan pengatur ini dapat ditulis bersama melalui prinsip perpindahan virtual. Dari sifat invarian kerja virtual eksternal (5/5.200), dapat disimpulkan bahwa:

$$\delta\mathbf{V}^T\mathbf{Q} = \delta\mathbf{U}^T(\mathbf{F} - \mathbf{F}^0) \quad (6.85)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4/4.56) ke dalam (6.85), diperoleh

$$\underbrace{\delta\mathbf{U}^T}_{Arbitrary} [(\mathbf{F} - \mathbf{F}^0) - \mathbf{A}^T\mathbf{Q}] = 0 \Rightarrow \mathbf{F} - \mathbf{F}^0 = \mathbf{A}^T\mathbf{Q} \quad (6.86)$$

Dengan menyubstitusikan Pers. (6.83) ke dalam (6.86), diperoleh

$$\mathbf{F} - \mathbf{F}^0 = \mathbf{A}^T\mathbf{k}\mathbf{V} + \mathbf{A}^T\mathbf{Q}_0 + \mathbf{A}^T\mathbf{Q}_w \tag{6.87}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4/4.56) ke dalam (6.87), diperoleh

$$\mathbf{F} - \mathbf{F}^0 = \mathbf{A}^T\mathbf{k}\mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{A}^T\mathbf{Q}_0 + \mathbf{A}^T\mathbf{Q}_w \tag{6.88}$$

Persamaan (6.88) merepresentasikan persamaan kekakuan struktural dan dapat dipartisi berdasarkan derajat kebebasan bebas dan terkendala sebagai berikut:

$$\mathbf{F}^E_{free} = \mathbf{F}_{free} - \left(\mathbf{F}^0_{free} + \mathbf{K}_{fc}\mathbf{U}_{constr} + \mathbf{A}^T_{free}\mathbf{Q}_0 + \mathbf{A}^T_{free}\mathbf{Q}_w\right) = \mathbf{K}_{ff}\mathbf{U}_{free} \tag{6.89}$$

$$\mathbf{F}^E_{constr} = \mathbf{F}_{constr} - (\mathbf{F}^0_{constr} + \mathbf{K}_{cc}\mathbf{U}_{constr} + \mathbf{A}^T_{constr}\mathbf{Q}_0 + \mathbf{A}^T_{constr}\mathbf{Q}_w) = \mathbf{K}_{cf}\mathbf{U}_{free} \tag{6.90}$$

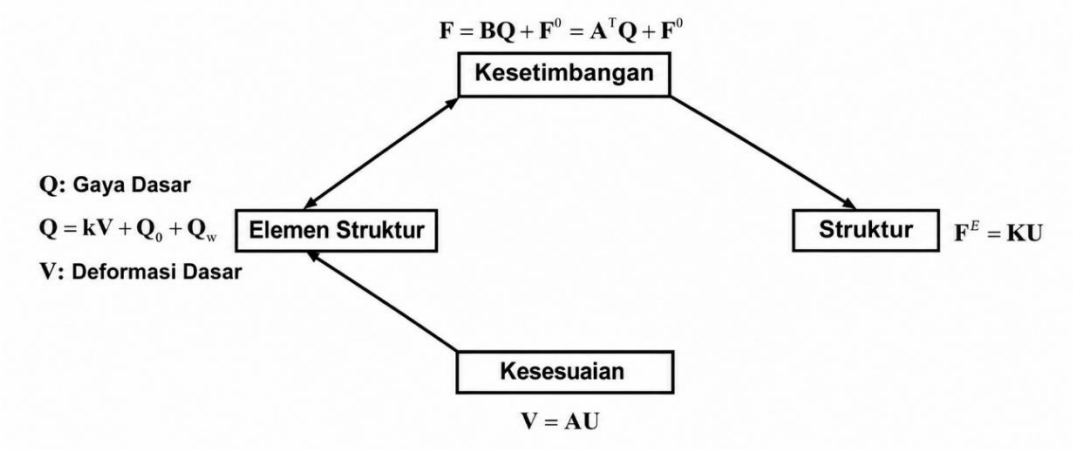
Dimana

$$\mathbf{K}_{ff} = \mathbf{A}^T_{free}\mathbf{k}\mathbf{A}_{free}\ \mathbf{K}_{fc} = \mathbf{A}^T_{free}\mathbf{k}\mathbf{A}_{constr};\ \mathbf{K}_{cf} = \mathbf{A}^T_{constr}\mathbf{k}\mathbf{A}_{free};\ \text{dan}\ \mathbf{K}_{cc} = \mathbf{A}^T_{constr}\mathbf{k}\mathbf{A}_{constr} \tag{6.91}$$

Suku-suku di dalam tanda kurung pada Persamaan (6.89) dan (6.90) masing-masing merepresentasikan gaya simpul tertahan yang terkait dengan derajat kebebasan bebas dan derajat kebebasan terkendala.

$$\mathbf{R}_{free} = \mathbf{F}^0_{free} + \mathbf{K}_{fc}\mathbf{U}_{constr} + \underbrace{\mathbf{A}^T_{free}}_{\mathbf{B}_{free}}\mathbf{Q}_0 + \underbrace{\mathbf{A}^T_{free}}_{\mathbf{B}_{free}}\mathbf{Q}_w$$

$$\mathbf{R}_{constr} = \mathbf{F}^0_{constr} + \mathbf{K}_{cc}\mathbf{U}_{constr} + \underbrace{\mathbf{A}^T_{constr}}_{\mathbf{B}_{constr}}\mathbf{Q}_0 + \underbrace{\mathbf{A}^T_{constr}}_{\mathbf{B}_{constr}}\mathbf{Q}_w \tag{6.92}$$



Gambar 6.39 Representasi skematis metode kekakuan.

Sekumpulan perpindahan titik simpul yang tidak diketahui, U_free, ditentukan dengan menyelesaikan Persamaan (6.89). Kemudian, gaya reaksi tumpuan F_constr ditentukan dari Persamaan (6.90). Representasi skematis metode kekakuan disajikan pada Gambar 6.39. Langkah-langkah prosedural dalam pendekatan kekakuan semi-otomatis dirangkum sebagai berikut:
Langkah 1: Menyusun matriks kompatibilitas:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{free} \quad \mathbf{A}_{constr}]$$

Langkah 2: Susun persamaan kesetimbangan menggunakan prinsip perpindahan maya:

$$\mathbf{F}_{free} = \mathbf{A}_{free}^{T}\mathbf{Q} + \mathbf{F}_{free}^{0}$$

Langkah 3: Susun matriks kekakuan struktur dan vektor beban ekuivalen:

$$\mathbf{K}_{ff} = \mathbf{A}_{free}^{T}\mathbf{k}\mathbf{A}_{free} \text{ dan } \mathbf{F}_{free}^{E} = \mathbf{F}_{free} - \mathbf{R}_{free}$$

Langkah 4: Selesaikan persamaan kekakuan struktural untuk perpindahan titik simpul yang belum diketahui pada derajat kebebasan bebas:

$$\mathbf{F}_{free}^{E} = \mathbf{K}_{ff}\mathbf{U}_{free} \rightarrow \mathbf{U}_{free} = \left[\mathbf{K}_{ff}\right]^{-1}\mathbf{F}_{free}^{E}$$

Langkah 5: Hitung deformasi elemen:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}_{free}\mathbf{U}_{free} + \mathbf{A}_{constr}\mathbf{U}_{constr}$$

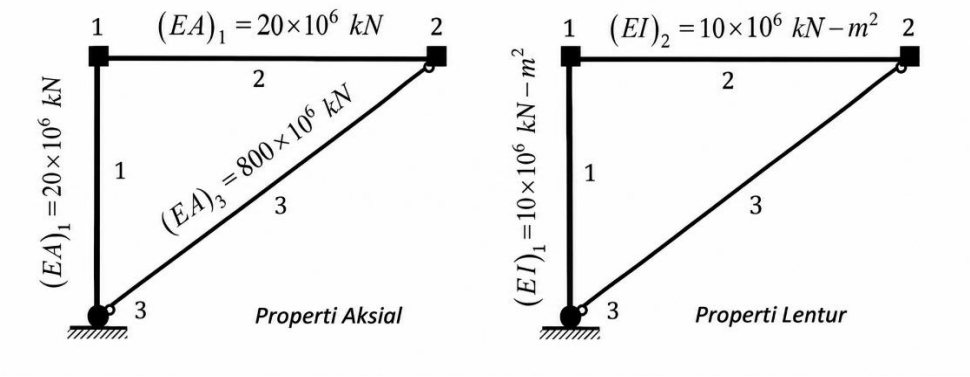
Langkah 6: Hitung gaya-gaya dasar elemen:

Secara struktural: $\mathbf{Q} = \mathbf{k}\mathbf{V} + \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_w$

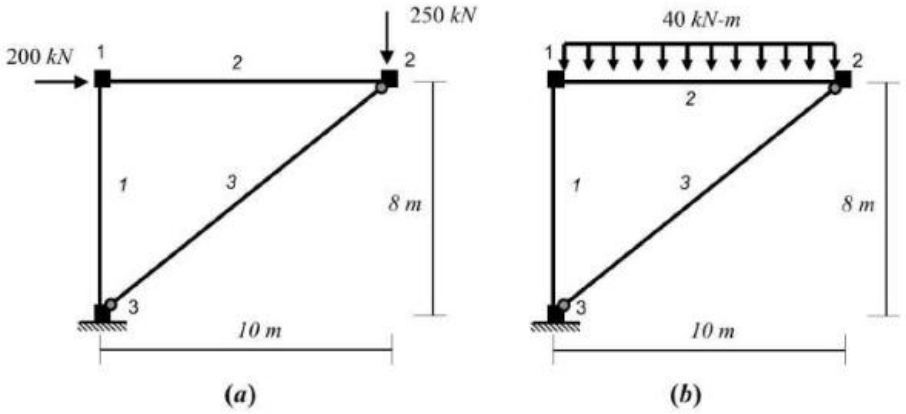
Secara elemen: $\mathbf{q}^{(i)} = \mathbf{k}^{(i)}\mathbf{v}^{(i)} + \mathbf{q}_0^{(i)} + \mathbf{q}_w^{(i)}$

Langkah 7: Tentukan gaya-gaya lainnya dengan mempertimbangkan keseimbangan elemen dan titik simpul (misalnya, gaya geser atau gaya aksial jika terdapat kendala yang tidak dapat memanjang dan/atau tidak fleksibel).
Langkah 8: Tentukan reaksi tumpuan dan verifikasi keseimbangan global.

$$\mathbf{F}_{constr} = \mathbf{A}_{constr}^{T}\mathbf{Q} + \mathbf{F}_{constr}^{0}$$



Gambar 6.40 Contoh 6.5.



Gambar 6.41 Contoh 6.5 (Lanjutan).

Contoh 6.5

Analisis rangka berpengaku yang diperlihatkan pada Gambar 6.40 dengan kondisi pembebanan berikut:

(i) Gaya nodal yang diterapkan sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 6.41a.

(ii) Elemen 2 dikenai beban terbagi rata wy = -40 kN/m seperti yang ditunjukkan pada Gambar 6.41 b.

Solusi

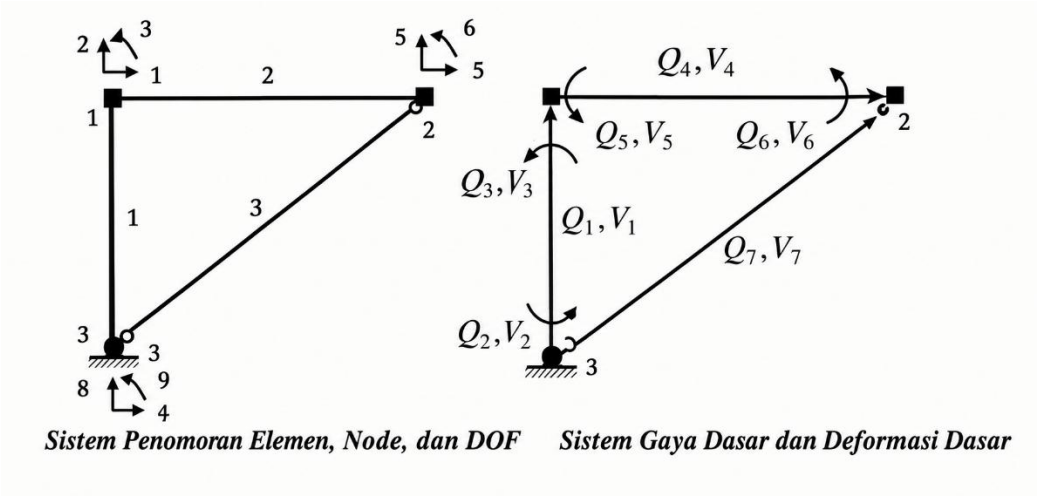
Kondisi (*i*): Persamaan kesetimbangan struktur ditetapkan terlebih dahulu. Sistem penomoran derajat kebebasan (DOF), sistem gaya dasar, dan sistem deformasi dasar ditunjukkan pada Gambar 6.42. Mengikuti pendekatan yang dijelaskan dalam Bab 3, persamaan kesetimbangan strukturnya adalah:

$$\begin{Bmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -250 \\ 0 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.125 & 0.125 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.781 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & -0.1 & 0.625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.125 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & -0.781 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.625 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{Bmatrix} \text{ or}$$

$$\mathbf{F} = \left\{\frac{\mathbf{F}_{free}}{\mathbf{F}_{constr}}\right\} = \left[\frac{\mathbf{B}_{free}}{\mathbf{B}_{constr}}\right] \mathbf{Q}$$

Mengikuti pendekatan yang dijelaskan dalam Bab 4, persamaan kompatibilitas strukturalnya adalah:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 1 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & -0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.781 & 0.625 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} \text{ atau } \mathbf{V} = \left[\mathbf{A}_{free} \mid \mathbf{A}_{constr}\right] \left\{\frac{\mathbf{U}_{free}}{\mathbf{U}_{constr}}\right\}$$



Gambar 6.42 Contoh 6.5 (Lanjutan).

Akhirnya, persamaan kekakuan untuk sistem dasar setiap elemen rangka ditinjau dan dikelompokkan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{Bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.06247 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{Bmatrix} \text{ atau } \mathbf{Q} = \mathbf{kV}_{free}$$

Jelas bahwa persamaan-persamaan kekakuan ini tidak saling terkait (*uncoupled*) karena semua suku di luar diagonal pada matriks k bernilai nol. Secara fisik, hal ini dapat diartikan bahwa semua elemen struktur tersebut tidak saling terhubung. Berdasarkan hubungan kontragradien antara sistem statis dan sistem kinematik, persamaan kekakuan struktur yang bersesuaian dengan derajat kebebasan bebas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{F}_{free} = \mathbf{A}_{free}^T \mathbf{k} \mathbf{A}_{free} = \mathbf{K}_{ff} \mathbf{U}_{free}$$

Jenis transformasi ini dikenal sebagai transformasi "kongruen".
Persamaan kekakuan struktural pada derajat kebebasan bebas adalah:

$$\begin{Bmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -250 \\ 0 \end{Bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 2.234 & 0 & 0.9375 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.62 & 0.6 & 0 & -0.12 & 0.6 \\ 0.9375 & 0.6 & 9 & 0 & -0.6 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 2.0381 & 0.03049 & 0 \\ 0 & -0.12 & -0.6 & 0.03049 & 0.1444 & -0.6 \\ 0 & 0.6 & 2 & 0 & -0.6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

Perpindahan yang tidak diketahui ditentukan dari persamaan kekakuan struktur sebagai berikut:

$$\mathbf{U}_{free} = \left[\mathbf{K}_{ff}\right]^{-1} \mathbf{F}_{free}$$
$$= 10^{-3} \times [9.264\ m \quad -0.01946\ m \quad -1.834\ rad \quad 9.390\ m \quad -19.985\ m \quad -2.078\ rad]^T$$

Deformasi elemen diperoleh dari hubungan kompatibilitas sebagai berikut:

$$\mathbf{V}_{free} = \mathbf{A}_{free} \mathbf{U}_{free}$$
$$= 10^{-4} \times [-0.1946\ m \quad 11.58\ rad \quad -6.763\ rad \quad 1.258\ m \quad 1.622\ rad \quad -0.8109\ rad \quad -515.7\ m]^T$$

Gaya-gaya batang dasar ditentukan dari persamaan kekakuan batang:

$$\mathbf{Q}_{free} = \mathbf{kV}_{free} = [-48.7\ kN \quad 4100\ kN-m \quad -486.6\ kN-m \quad 251.6\ kN \quad 486.6\ kN-m \quad 0 \quad -322.2\ kN]^T$$

Gaya reaksi dihitung dari persamaan kesetimbangan yang terkait dengan derajat kebebasan yang terkekang:

$$\mathbf{F}_{constr} = \mathbf{B}_{constr}\mathbf{Q} = [F_7 \quad F_8 \quad F_9]^T = [-200\ kN \quad 250\ kN \quad 4100\ kN-m]^T$$

Kondisi (*ii*): Pada kasus pembebanan ini, tidak terdapat beban nodal, namun elemen 2 menerima beban terbagi rata. Berdasarkan Bab 3, vektor beban elemen akibat adanya beban elemen adalah:

$$\mathbf{P}_0^{(2)} = [0 \quad 200 \quad 0 \quad 0 \quad 200 \quad 0]^T$$

Akibatnya, vektor beban nodal ekuivalen yang disebabkan oleh adanya beban batang adalah:

$$\mathbf{F}_{free}^0 = [0 \quad 200 \quad 0 \quad 0 \quad 200 \quad 0]^T$$

Gaya-gaya dasar pada elemen 2 akibat adanya beban elemen adalah:

$$\mathbf{q}_w^{(2)} = \left[0 \quad -\frac{w_y L_2^2}{12} \quad \frac{w_y L_2^2}{12}\right]^T = [0 \quad 333.33 \quad -333.33]^T$$

Akibatnya, gaya-gaya struktural dasar yang timbul akibat beban pada elemen adalah:

$$\mathbf{Q}_w = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 333.33 \quad -333.33 \quad 0]^T$$

dan vektor beban simpul ekuivalen $\mathbf{F}_w$ adalah

$$\mathbf{F}_w = \mathbf{B}_{free}\mathbf{Q}_w = [0 \quad 0 \quad 333.33 \quad 0 \quad 0 \quad -333.33]^T$$

Vektor beban nodal ekivalen adalah

$$\mathbf{F}_{free}^0 + \mathbf{F}_w = [0 \quad 200 \quad 333.33 \quad 0 \quad 200 \quad -333.33]^T$$

Perpindahan yang tidak diketahui ditentukan dari persamaan kekakuan struktur sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{free} &= -\left[\mathbf{K}_{ff}\right]^{-1}\left(\mathbf{F}_{free}^0 + \mathbf{F}_w\right) \\ &= 10^{-3} \times [5.025\ m \quad -0.1085\ m \quad -1.085\ rad \quad 5.105\ m \quad -11.66\ m \quad -1.107\ rad]^T\end{aligned}$$

Deformasi elemen diperoleh dari hubungan kompatibilitas:

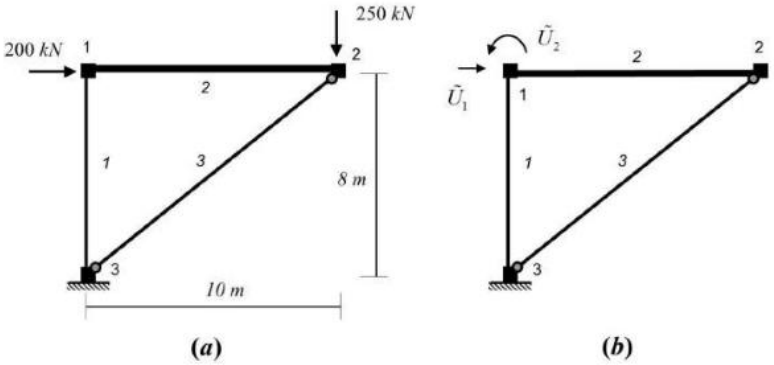
$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{free} &= \mathbf{A}_{free}\mathbf{U}_{free} \\ &= 10^{-4} \times [-1.085\ m \quad 6.281\ rad \quad -4.564\ rad \quad 0.8049\ m \quad 0.7056\ rad \quad 0.4805\ rad \quad -33\ m]^T\end{aligned}$$

Gaya-gaya batang dasar ditentukan dari persamaan kekakuan batang:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{kV}_{free} + \mathbf{Q}_w$$
$$= [-271.2\ kN \quad 2000\ kN-m \quad -711.7\ kN-m \quad 160.99\ kN \quad 711.7\ kN-m \quad 0 \quad -206.13\ kN]^T$$

Gaya reaksi dihitung dari persamaan kesetimbangan yang terkait dengan derajat kebebasan yang terkekang:

$$\mathbf{F}_{constr} = \mathbf{B}_{constr}\mathbf{Q} = [F_7 \quad F_8 \quad F_9]^T = [0 \quad 400\ kN \quad 2000\ kN-m]^T$$



Gambar 6.43 Contoh 6.6.

Contoh 6.6

Untuk rangka berpengaku pada Contoh 6.5, lakukan analisis dengan batasan-batasan berikut (Gambar 6.43 a):

- Anggota 1 dianggap tidak dapat memanjang (*inextensible*), sedangkan elemen 2 dianggap kaku (*rigid*).

Penyelesaian: Berdasarkan asumsi bahwa elemen 1 dianggap tidak dapat memanjang dan elemen 2 dianggap kaku, batasan derajat kebebasan jamak berikut dapat diterapkan:
Elemen 1: Tidak dapat memanjang

$$U_2 - \underbrace{U_8}_{0} = 0 \Longrightarrow U_2 = 0 \qquad (a)$$

Anggota 2: Kaku

$$U_4 - U_1 = 0 \Longrightarrow U_4 = U_1 \qquad (b)$$

$$U_5 - 10U_3 = 0 \Longrightarrow U_5 = 10U_3 \qquad (c)$$

$$U_6 - U_3 = 0 \Longrightarrow U_6 = U_3 \qquad (d)$$

Berdasarkan Persamaan $(a) - (d)$, U_1 dan U_3 dipilih sebagai *master*, sedangkan U_4, U_5, dan U_6 dipilih sebagai *slave*. Akibatnya, himpunan baru perpindahan simpul bebas independen $\tilde{\mathbf{U}}_{free}$ (Gambar 6.43 b) didefinisikan sebagai:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{free} = [U_1 \quad U_3]^T = \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 & \tilde{U}_2 \end{bmatrix}^T$$

Persamaan transformasi matriks yang menghubungkan $\mathbf{U}_{free}$ bebas dengan $\tilde{\mathbf{U}}_{free}$ bebas dituliskan sebagai:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{Bmatrix} \text{ atau } \mathbf{U}_{free} = \mathbf{A}_c \tilde{\mathbf{U}}_{free}$$

Berdasarkan hubungan kontragradien antara sistem statis dan sistem kinematis, persamaan transformasi matriks yang menghubungkan gaya nodal $\tilde{\mathbf{F}}_{free}$ dengan gaya nodal $\mathbf{F}_{free}$ adalah:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} \text{ atau } \tilde{\mathbf{F}}_{free} = \mathbf{A}_c^T \mathbf{F}_{free}$$

Hubungan ini dapat diturunkan dengan mudah melalui prinsip perpindahan maya. Substitusi hubungan kinematik ke dalam hubungan kompatibilitas menghasilkan:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{free} = \mathbf{A}_{free}\mathbf{U}_{free} = \mathbf{A}_{free}\mathbf{A}_c\tilde{\mathbf{U}}_{free} = \tilde{\mathbf{A}}_{free}\tilde{\mathbf{U}}_{free} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.125 & 0 \\ 0.125 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.781 & 6.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{Bmatrix}$$

Jelaslah bahwa deformasi dasar yang berkaitan dengan deformasi aksial elemen 1 bernilai nol. Demikian pula, deformasi dasar elemen kaku 2 bernilai nol. Berdasarkan hukum transformasi kongruen, persamaan kekakuan struktur terkendala yang bersesuaian dengan derajat kebebasan bebas dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{free} = \tilde{\mathbf{K}}_{ff}\tilde{\mathbf{U}}_{free}$$

Dimana

$$\tilde{\mathbf{K}}_{ff} = \tilde{\mathbf{A}}_{free}^{T}\mathbf{k}\tilde{\mathbf{A}}_{free} = \begin{bmatrix} 272479 & 1.242 \times 10^{6} \\ 1.242 \times 10^{6} & 7.4402 \times 10^{6} \end{bmatrix}$$

Vektor beban akibat kendala derajat kebebasan jamak adalah:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{free} = \mathbf{A}_{c}^{T}\mathbf{F}_{free} = \mathbf{B}_{c}\mathbf{F}_{free} = [200 \quad -2500]^{T}$$

Secara eksplisit, persamaan kekakuan struktural pada derajat kebebasan bebas adalah:

$$\begin{Bmatrix} 200 \\ -2500 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 272479 & 1.242 \times 10^{6} \\ 1.242 \times 10^{6} & 7.4402 \times 10^{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{Bmatrix}$$

Perpindahan yang tidak diketahui ditentukan dari persamaan kekakuan struktur sebagai berikut:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{free} = [\tilde{U}_1 \quad \tilde{U}_2]^{T} = [9.498 \times 10^{-3}\ \text{m} \quad -1.922 \times 10^{-3}\ \text{rad}]^{T}$$

Derajat kebebasan perpindahan U_{free} diperoleh kembali dari hubungan kendala kinematik sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 9.498 \times 10^{-3}\ \text{m} \\ -1.922 \times 10^{-3}\ \text{rad} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.498 \times 10^{-3}\ \text{m} \\ 0 \\ -1.922 \times 10^{-3}\ \text{rad} \\ 9.498 \times 10^{-3}\ \text{m} \\ -1.922 \times 10^{-2}\ \text{m} \\ -1.922 \times 10^{-3}\ \text{rad} \end{Bmatrix} \text{ atau } \mathbf{U}_{free} = \mathbf{A}_{c}\tilde{\mathbf{U}}_{free}$$

Deformasi elemen diperoleh dari hubungan kompatibilitas sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 1 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & -0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.781 & 0.625 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 9.498 \times 10^{-3}\ \text{m} \\ 0 \\ -1.922 \times 10^{-3}\ \text{rad} \\ 9.498 \times 10^{-3}\ \text{m} \\ -1.922 \times 10^{-2}\ \text{m} \\ -1.922 \times 10^{-3}\ \text{rad} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.1873 \times 10^{-3}\ \text{rad} \\ -7.348 \times 10^{-4}\ \text{rad} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4.595 \times 10^{-3}\ \text{m} \end{Bmatrix}$$

Gaya-gaya batang dasar ditentukan dari persamaan kekakuan batang:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k}\mathbf{V}_{free} = [N.A. \quad 4100\ \text{kN-m} \quad -705.91\ \text{kN-m} \quad N.A. \quad N.A. \quad N.A. \quad -287.05\ \text{kN}]^{T}$$

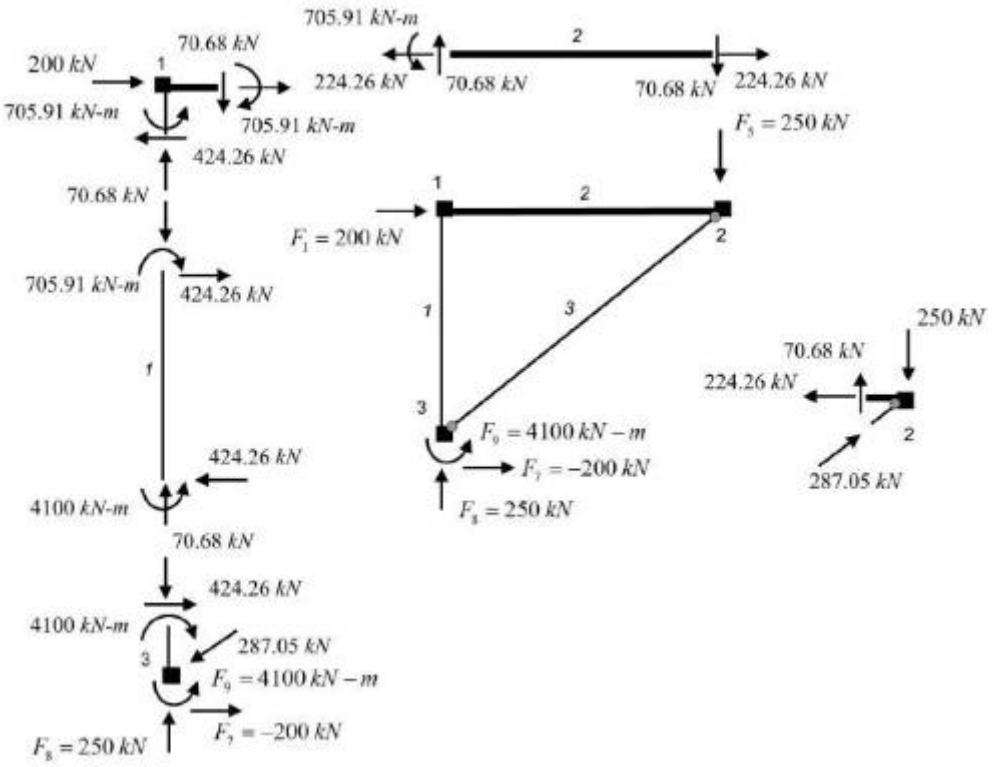
Perlu dicatat bahwa gaya reaksi tidak dapat diperoleh dari persamaan kesetimbangan pada derajat kebebasan yang terkendala ($F_{constr} = B_{constr}Q$)akibat adanya kendala derajat kebebasan jamak (*multi-freedom constraints*). Namun, gaya-gaya tersebut dapat dihitung

dengan meninjau kesetimbangan titik simpul dan elemen secara bertahap sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 6.44. Berdasarkan tinjauan kesetimbangan pada titik simpul dan elemen, gaya-gaya elemen dasar yang terkait dengan kendala derajat kebebasan jamak tersebut adalah:

$$Q_1 = -70.68 \text{ kN}; \quad Q_4 = 224.26 \text{ kN}; \quad Q_5 = 705.91 \text{ kN - m; dan } Q_6 = 0 \text{ kN - m}$$

dan reaksi tumpuannya adalah:

$$\mathbf{F}_{constr} = [F_7 \quad F_8 \quad F_9]^T = [-200 \text{ kN} \quad 250 \text{ kN} \quad 4100 \text{ kN - m}]^T$$



Gambar 6.44 Contoh 6.6 (Lanjutan).

Contoh 6.7

Perhatikan struktur garasi satu lantai sederhana yang ditunjukkan pada Gambar 6.45. Tiga dinding geser menopang atap garasi. Kekakuan dinding ditunjukkan pada Gambar 6.45. Dinding-dinding geser tersebut tidak memiliki kekakuan di luar bidang (*out-of-plane stiffness*).

a. Berapa derajat kebebasan yang dimiliki struktur tersebut?
b. Berapa besar perpindahan struktur akibat beban yang diterapkan seperti ditunjukkan pada Gambar 6.45?

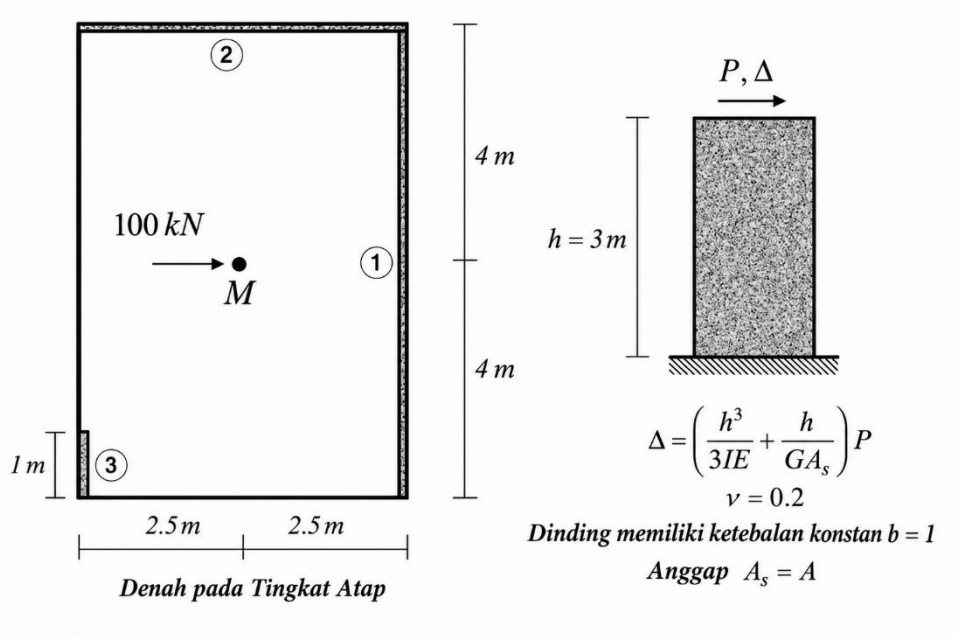
- **Penyelesaian**: Perpindahan pada titik M dipilih sebagai perpindahan tergeneralisasi. Transformasi *Rigid-End-Zone* dapat digunakan untuk memperoleh perpindahan setiap dinding relatif terhadap titik utama M, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 6.46a.

$$U_{1x} = \boldsymbol{\Gamma}_{REZ}^{(1)}\mathbf{U}_M = [0 \quad 1 \quad 2.5]\begin{Bmatrix} U_X \\ U_Y \\ U_Z \end{Bmatrix};\ U_{2x} = \boldsymbol{\Gamma}_{REZ}^{(2)}\mathbf{U}_M = [1 \quad 0 \quad -4]\begin{Bmatrix} U_X \\ U_Y \\ U_Z \end{Bmatrix};$$

$$U_{3x} = \boldsymbol{\Gamma}_{REZ}^{(3)}\mathbf{U}_M = [0 \quad 1 \quad -2.5]\begin{Bmatrix} U_X \\ U_Y \\ U_Z \end{Bmatrix}$$

Matriks kekakuan setiap dinding adalah

Dinding 1: $I_1 = \dfrac{1 \times 8^3}{12} = 42.67\ \text{m}^4; \quad G = \dfrac{E}{2(1+\upsilon)} = \dfrac{E}{2(1+0.2)} = 0.41667E$



Gambar 6.45 Contoh 6.7.

$$f_1 = \left(\frac{h^3}{3I_1E} + \frac{h}{GA_{s1}}\right) = \left(\frac{3^3}{3(42.67)E} + \frac{3}{(0.41667E)(8 \times 1)}\right) = \frac{1.11}{E} \Rightarrow k_1 = 0.9E$$

Dinding 2:

$$I_2 = \frac{1 \times 5^3}{12} = 10.42\ \text{m}^4; \quad G = \frac{E}{2(1+\upsilon)} = \frac{E}{2(1+0.2)} = 0.41667E$$

$$f_2 = \left(\frac{h^3}{3I_2E} + \frac{h}{GA_{s2}}\right) = \left(\frac{3^3}{3(10.42)E} + \frac{3}{(0.41667E)(5 \times 1)}\right) = \frac{2.304}{E} \Rightarrow k_2 = 0.4341E$$

Dinding 3:

$$I_3 = \frac{1 \times 1^3}{12} = 0.08333 \text{ m}^4; \quad G = \frac{E}{2(1+\upsilon)} = \frac{E}{2(1+0.2)} = 0.41667E$$

$$f_3 = \left(\frac{h^3}{3I_3E} + \frac{h}{GA_{s3}}\right) = \left(\frac{3^3}{3(0.08333)E} + \frac{3}{(0.41667E)(1 \times 1)}\right) = \frac{115.2}{E} \Rightarrow k_3 = 8.68 \times 10^{-3}E$$

Transformasi *Rigid-End-Zone* dapat digunakan untuk memperoleh matriks kekakuan setiap dinding terhadap titik induk M pada Gambar 6.46a.
Dinding 1:

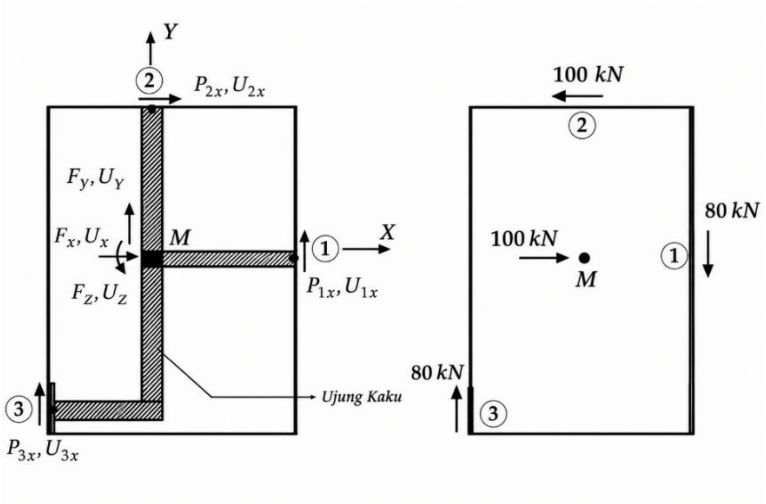
$$\mathbf{K}_{M1} = \mathbf{\Gamma}_{REZ}^{(1)\,T} k_1 \mathbf{\Gamma}_{REZ}^{(1)} = E \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 2.25 \\ 0 & 2.25 & 5.625 \end{bmatrix}$$

Dinding 2:

$$\mathbf{K}_{M2} = \mathbf{\Gamma}_{REZ}^{(2)\,T} k_2 \mathbf{\Gamma}_{REZ}^{(2)} = E \begin{bmatrix} 0.4341 & 0 & -1.7364 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1.7364 & 0 & 6.9456 \end{bmatrix}$$

Dinding 3:

$$\mathbf{K}_{M3} = \mathbf{\Gamma}_{REZ}^{(3)\,T} k_3 \mathbf{\Gamma}_{REZ}^{(3)} = E \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000868 & -0.00217 \\ 0 & -0.00217 & 0.005425 \end{bmatrix}$$



Gambar 6.46 Contoh 6.7 (Lanjutan).

Oleh karena itu, matriks kekakuan pelat atap ini adalah:

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{K}_{M1} + \mathbf{K}_{M2} + \mathbf{K}_{M3} = E\begin{bmatrix} 0.4341 & 0 & -1.7364 \\ 0 & 0.900868 & 2.24783 \\ -1.7364 & 2.24783 & 12.576 \end{bmatrix}$$

Vektor beban $\mathbf{F}_M$ is $\mathbf{F}_M = [100 \quad 0 \quad 0]^T$

Vektor perpindahan $\mathbf{U}_M$ is $\mathbf{U}_M = [\mathbf{K}_M]^{-1}\mathbf{F}_M = \left[\frac{74034.2}{E} \quad \frac{-46038.5}{E} \quad \frac{18457}{E}\right]^T$

Deformasi setiap dinding adalah

$$U_{1x} = \mathbf{\Gamma}_{REZ}^{(1)}\mathbf{U}_M = \frac{88.89}{E}; \quad U_{2x} = \mathbf{\Gamma}_{REZ}^{(2)}\mathbf{U}_M = \frac{230.362}{E}; \quad U_{3x} = \mathbf{\Gamma}_{REZ}^{(3)}\mathbf{U}_M = \frac{-92165.9}{E}$$

Gaya pada setiap dinding yang ditunjukkan pada Gambar 6.46b adalah

$$F_{1x} = k_1 U_{1x} = (0.9E)\left(\frac{88.89}{E}\right) = 80 \text{ kN}$$

$$F_{2x} = k_2 U_{2x} = (0.4341E)\left(\frac{230.362}{E}\right) = 100 \text{ kN}$$

$$F_{3x} = k_3 U_{3x} = (0.868 \times 10^{-3}E)\left(\frac{-92165.9}{E}\right) = -80 \text{ kN}$$

BAB 7
METODE KEKAKUAN II PENDEKATAN KEKAKUAN LANGSUNG

7.1 PERKEMBANGAN DAN KONSEP METODE KEKAKUAN LANGSUNG

Pada Bab 6, metode kekakuan pertama kali dirumuskan melalui prinsip superposisi. Metode ini disebut sebagai metode kekakuan yang bersifat "konseptual". Kemudian, metode tersebut diformalkan dan dikembangkan dengan bantuan prinsip perpindahan maya, yang menghasilkan apa yang disebut sebagai metode kekakuan "semi-otomatis". Dalam metode ini, matriks kekakuan struktur disusun secara tidak langsung dari matriks kekakuan elemen-elemen individu melalui transformasi kongruen.

Namun, baik pendekatan konseptual maupun semi-otomatis tidaklah praktis untuk pemrograman komputer. Pendekatan yang lebih sesuai muncul dari gagasan dasar kedua metode kekakuan tersebut dengan menambahkan beberapa konsep yang berorientasi pada komputer. Metode ini dikenal sebagai metode kekakuan "langsung" (*direct stiffness method*). Istilah "langsung" menyiratkan bahwa matriks kekakuan struktur dapat disusun secara langsung dari matriks kekakuan elemen. Prosedur penyusunan matriks kekakuan elemen yang digunakan dalam metode kekakuan langsung sangat sistematis dan lugas. Inilah alasan utama mengapa metode kekakuan langsung sangat cocok untuk pemrograman komputer. Perlu dicatat bahwa hampir semua perangkat lunak analisis struktur yang tersedia di pasaran (baik untuk kalangan akademis, penelitian, maupun praktik rekayasa) diimplementasikan berdasarkan pendekatan kekakuan langsung.

Tujuan utama bab ini adalah memperkenalkan konsep dasar metode kekakuan langsung dan memberikan pola pikir komputasi yang diperlukan untuk mengimplementasikan metode tersebut. Sebelum membahas lebih jauh mengenai metode kekakuan langsung dalam bab ini, ada baiknya kita meninjau secara singkat sejarah perkembangan metode kekakuan. Landasan teoretis metode kekakuan diletakkan oleh George A. Maney yang menciptakan metode *slope-deflection* (kemiringan-lendutan) dalam sebuah publikasi teknik Universitas Minnesota pada tahun 1915. Metode ini merupakan pengembangan dari karya-karya sebelumnya mengenai tegangan sekunder oleh Manderla dan Mohr. Hingga ditemukannya metode distribusi momen pada tahun 1930 oleh Hardy Cross, metode *slope-deflection* telah menjadi metode yang paling umum digunakan untuk menganalisis balok menerus dan rangka (*frame*) di Amerika Serikat selama hampir 15 tahun. Metode *slope-deflection* dapat dianggap sebagai cikal bakal dari metode kekakuan yang digunakan saat ini.

Pada era sebelum adanya komputer, kelemahan utama dari pendekatan matriks awal ini adalah perlunya memperoleh penyelesaian langsung untuk sistem persamaan aljabar simultan. Hal ini menjadi tugas yang sangat berat untuk struktur yang memiliki banyak variabel perpindahan yang tidak diketahui. Berkat penemuan komputer pada akhir tahun 1940-an, analisis struktur beralih dari perhitungan manual ke pendekatan berbasis komputer. Pada tahun 1953, R.K. Livesley mengembangkan metode kekakuan matriks. Pada tahun 1956, M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, dan J.L. Topp merumuskan matriks kekakuan untuk elemen

rangka batang (*truss*) dan rangka kaku (*frame*) melalui formulasi elemen hingga, serta memperkenalkan metode kekakuan langsung yang kini populer digunakan untuk menyusun matriks kekakuan struktur. Pada tahun 1960, J.H. Argyris dan S. Kelsey menyajikan formulasi metode matriks yang didasarkan pada prinsip energi. Sejak tahun 1950-an, metode kekakuan matriks telah berkembang dengan sangat pesat.

7.2 PERSAMAAN KEKAKUAN LENGKAP STRUKTUR RANGKA

Sebagaimana telah dibahas dalam Bab 6, persamaan kekakuan lengkap struktur rangka ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{F}^E = \mathbf{F} - \mathbf{R} = \mathbf{KU} \tag{7.1}$$

di mana vektor F memuat beban nodal yang diterapkan; vektor R memuat gaya nodal tertahan yang terkait dengan beban elemen sebagaimana didefinisikan dalam Bab 6 (6/6.80 atau 6/6.92); vektor FE memuat beban nodal ekuivalen struktur yang dibahas dalam Bab 6 (6/6.81 atau 6/6.89–90); vektor U menghimpun komponen perpindahan dari semua titik simpul (*node*) struktur, termasuk titik simpul yang pergerakannya dibatasi oleh kondisi tumpuan; dan matriks K adalah matriks kekakuan lengkap struktur tersebut. Parameter yang tidak diketahui dalam persamaan kekakuan struktur (7.1) terdiri dari gaya nodal yang bersesuaian dengan derajat kebebasan yang terkendala (gaya reaksi) dan perpindahan nodal yang bersesuaian dengan derajat kebebasan bebas. Untuk setiap komponen gaya nodal yang ditentukan (diketahui), terdapat komponen perpindahan nodal yang tidak diketahui yang bersesuaian dengannya.

Demikian pula, untuk setiap komponen perpindahan nodal yang ditentukan (diketahui), terdapat komponen gaya nodal yang tidak diketahui yang bersesuaian dengannya. Oleh karena itu, jumlah total parameter yang tidak diketahui dalam persamaan kekakuan lengkap suatu struktur tidak berubah terhadap perubahan kondisi tumpuan. Dengan kata lain, jumlah derajat ketidaktentuan statis dan kinematik merupakan besaran yang konstan untuk struktur apa pun. Oleh karena itu, jumlah total parameter yang tidak diketahui pada struktur mana pun sama dengan jumlah persamaan kekakuan lengkapnya.

Namun, parameter yang tidak diketahui tersebut tidak dapat diperoleh secara langsung dengan menyelesaikan Persamaan (7.1) karena matriks kekakuan lengkap K umumnya bersifat singular pada tahap awal. Hal ini dapat dijelaskan karena belum ada kondisi tumpuan yang diberikan pada struktur, sehingga struktur tersebut dianggap memiliki fleksibilitas tak hingga. Untuk menyelesaikan besaran-besaran yang tidak diketahui tersebut, persamaan kekakuan struktur lengkap (7.1) perlu dipartisi berdasarkan derajat kebebasan yang tidak terkendala dan yang terkendala sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}^E_{free} \\ \mathbf{F}^E_{constr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{free} \\ \mathbf{F}_{constr} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_{free} \\ \mathbf{R}_{constr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fc} \\ \mathbf{K}_{cf} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{free} \\ \mathbf{U}_{constr} \end{Bmatrix} \tag{7.2}$$

Langkah partisi ini telah dilakukan pada bab-bab sebelumnya dengan cara memberikan penomoran yang tepat pada sistem derajat kebebasan sejak tahap awal (misalnya, Contoh 6.2). Pada umumnya, dalam implementasi komputer, langkah ini tidak diperlukan dan dapat dilakukan setelah proses perakitan matriks kekakuan struktur selesai. Topik ini akan dibahas pada bab berikutnya. Persamaan (7.2) dapat dipecah menjadi dua hubungan kekakuan sebagai berikut:

$$\underbrace{\mathbf{F}^{E}_{free}}_{known} = \underbrace{\mathbf{F}_{free}}_{known} - \underbrace{\mathbf{R}_{free}}_{known} = \mathbf{K}_{ff} \underbrace{\mathbf{U}_{free}}_{unknown} + \mathbf{K}_{fc} \underbrace{\mathbf{U}_{constr}}_{known} \tag{7.3}$$

$$\underbrace{\mathbf{F}^{E}_{constr}}_{unknown} = \underbrace{\mathbf{F}_{constr}}_{unknown} - \underbrace{\mathbf{R}_{constr}}_{known} = \mathbf{K}_{cf} \underbrace{\mathbf{U}_{free}}_{unknown} + \mathbf{K}_{cc} \underbrace{\mathbf{U}_{constr}}_{known} \tag{7.4}$$

Pada umumnya, jika tidak terdapat pergerakan tumpuan, derajat kebebasan perpindahan terkendala $\mathbf{U}_{constr}$ bernilai nol. Namun, jika terdapat pergerakan tumpuan dan pengaruhnya belum diperhitungkan dalam gaya-gaya kendala R, maka derajat kebebasan perpindahan terkendala $\mathbf{U}_{constr}$ tidak bernilai nol. Perpindahan nodal yang belum diketahui, U_{free} dapat diselesaikan menggunakan Persamaan (7.3). Selanjutnya, nilai perpindahan nodal yang telah diketahui tersebut disubstitusikan ke dalam Persamaan (7.4) untuk memperoleh gaya nodal yang belum diketahui $\mathbf{F}_{constr}$.

7.3 PERAKITAN PERSAMAAN KEKAKUAN STRUKTUR RANGKA

Persamaan kekakuan lengkap suatu struktur rangka dapat diturunkan berdasarkan tiga komponen dasar:

1. *Keseimbangan*: Persamaan keseimbangan titik simpul struktur dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}^{(1)}\mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}\mathbf{p}^{(2)} + \cdots + \mathbf{H}^{(k)}\mathbf{p}^{(k)} + \cdots + \mathbf{H}^{(m)}\mathbf{p}^{(m)} = \mathbf{HP} \tag{7.5}$$

di mana H dikenal sebagai matriks pemetaan kesetimbangan struktural dan memuat submatriks pemetaan kesetimbangan $\mathbf{H}^{(k)}$ dari m elemen; P dikenal sebagai vektor gaya ujung struktural dan memuat subvektor gaya ujung $\mathbf{P}^{(k)}$ dari m elemen.

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}^{(1)} \quad \mathbf{H}^{(2)} \quad \ldots \quad \mathbf{H}^{(k)} \quad \ldots \quad \mathbf{H}^{(m)}] \tag{7.6}$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}^{(1)} \quad \mathbf{p}^{(2)} \quad \ldots \quad \mathbf{P}^{(k)} \quad \ldots \quad \mathbf{p}^{(m)}]^{T} \tag{7.7}$$

Pada Bab 3, pendekatan untuk membentuk matriks $\boldsymbol{H}^{(k)}$untuk elemen k berdasarkan vektor pemetaannya $\boldsymbol{L}_{mk}$ telah disajikan. Perlu diperhatikan bahwa jumlah baris pada Persamaan (7.5) sama dengan jumlah seluruh kemungkinan komponen gaya nodal, termasuk komponen yang secara langsung ditahan oleh tumpuan.

2. *Kompatibilitas*: Perpindahan ujung elemen harus kompatibel dengan perpindahan nodal struktur. Persyaratan ini menghasilkan hubungan kompatibilitas elemen yang dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{U}^{(k)} = \mathbf{G}^{(k)}\mathbf{U} \text{ untuk member } k \tag{7.8}$$

di mana $\boldsymbol{U}^{(k)}$ memuat perpindahan dari elemen k; $\boldsymbol{G}^{(k)}$ merupakan matriks pemetaan kompatibilitas dari elemen k; dan $\boldsymbol{U}$ memuat seluruh perpindahan nodal, termasuk perpindahan yang ditahan oleh tumpuan. Untuk keseluruhan struktur, semua matriks kompatibilitas elemen dikelompokkan menjadi:

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{GU} \tag{7.9}$$

di mana $\boldsymbol{\Delta}$ dikenal sebagai vektor perpindahan ujung struktur dan memuat subvektor perpindahan ujung $\boldsymbol{U}^{(k)}$ dari $m$elemen; $\boldsymbol{G}$ merupakan matriks pemetaan kompatibilitas struktur, dan matriks kompatibilitas $\boldsymbol{G}^{(k)}$ menjumlahkan $m$elemen.

$$\boldsymbol{\Delta} = [\mathbf{U}^{(1)} \quad \mathbf{U}^{(2)} \quad \ldots \quad \mathbf{U}^{(k)} \quad \ldots \quad \mathbf{U}^{(m)}]^T \tag{7.10}$$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}^{(1)} \quad \mathbf{G}^{(2)} \quad \ldots \quad \mathbf{G}^{(k)} \quad \ldots \quad \mathbf{G}^{(m)}]^T \tag{7.11}$$

Pada Bab 4, telah disajikan pendekatan untuk membentuk matriks $\boldsymbol{G}^{(k)}$ untuk elemen k berdasarkan vektor pemetaannya $\boldsymbol{L}_{Mk}$ telah disajikan. Perlu diperhatikan bahwa kondisi berikut berlaku:

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}^T \tag{7.12}$$

Persamaan (7.12) dapat dibuktikan dengan mudah menggunakan prinsip perpindahan maya.

3. *Hubungan Kekakuan Elemen*: Respons setiap elemen dinyatakan melalui matriks kekakuan dan vektor beban ujung jepitnya. Persamaan kekakuan untuk elemen k dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{K}^{(k)}\mathbf{U}^{(k)} + \mathbf{P}_F^{(k)} \tag{7.13}$$

di mana $\boldsymbol{P}^{(k)}$ merupakan vektor beban tetap dan $\boldsymbol{K}^{(k)}$ merupakan matriks kekakuan elemen global. Pada Bab 6, pendekatan untuk membentuk vektor beban nodal $\boldsymbol{P}^{(k)}$ telah disajikan. Untuk keseluruhan struktur, seluruh matriks kekakuan elemen dapat dituliskan berikut:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}^{(1)} \\ \mathbf{p}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{p}^{(k)} \\ \vdots \\ \mathbf{p}^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{(2)} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{K}^{(k)} & & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{K}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^{(1)} \\ \mathbf{U}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{U}^{(k)} \\ \vdots \\ \mathbf{U}^{(m)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_F^{(1)} \\ \mathbf{P}_F^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_F^{(k)} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_F^{(m)} \end{Bmatrix} \tag{7.14}$$

atau dalam bentuk ringkas sebagai:

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{K}}\boldsymbol{\Delta} + \hat{\mathbf{P}}_F \tag{7.15}$$

di mana $\hat{\mathbf{K}}$ disebut matriks kekakuan struktural "belum dirakit". Seperti yang ditunjukkan pada Bab 6, semua persamaan pengatur ini dapat ditulis bersama melalui prinsip perpindahan virtual. Dari sifat invarian kerja virtual eksternal (5/5.200), dapat disimpulkan bahwa:

$$\delta\boldsymbol{\Delta}^T\mathbf{P} = \delta\mathbf{U}^T\mathbf{F} \tag{7.16}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (7.9) ke dalam (7.16), diperoleh

$$\underbrace{\delta\mathbf{U}^T}_{Arbitrary}\ [\mathbf{F} - \mathbf{G}^T\mathbf{P}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \mathbf{G}^T\mathbf{P} \tag{7.17}$$

Dengan membandingkan Persamaan (7.17) dengan (7.5), menjadi jelas mengapa Persamaan (7.12) berlaku. Dengan mensubstitusikan Persamaan (7.15) ke dalam (7.17), diperoleh

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}^T\left(\hat{\mathbf{K}}\boldsymbol{\Delta} + \hat{\mathbf{P}}_F\right) \tag{7.18}$$

Dengan menyubstitusikan Pers. (7.9) ke dalam (7.18), diperoleh

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}^T\left(\hat{\mathbf{K}}\mathbf{G}\mathbf{U} + \hat{\mathbf{P}}_F\right) = \mathbf{G}^T\hat{\mathbf{K}}\mathbf{G}\mathbf{U} + \mathbf{G}^T\hat{\mathbf{P}}_F \tag{7.19}$$

Dengan membandingkan Persamaan (7.19) dan (7.1), matriks kekakuan struktur lengkap $\mathbf{K}$ didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}^T\hat{\mathbf{K}}\mathbf{G} \tag{7.20}$$

dan vektor gaya simpul terkekang $\mathbf{R}$ didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}^T\hat{\mathbf{P}}_F \tag{7.21}$$

Berdasarkan sifat diagonal matriks $\hat{\mathbf{K}}$, Persamaan (7.20) dapat dinyatakan secara alternatif sebagai berikut:

$$\mathbf{K} = \sum_{k=1}^{m} \tilde{\mathbf{K}}^{(k)} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{G}^{(k)^T} \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{G}^{(k)} \tag{7.22}$$

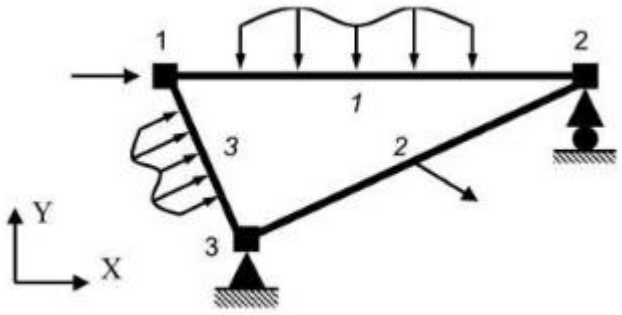
Demikian pula, bentuk alternatif dari Persamaan (7.21) ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{m} \tilde{\mathbf{R}}^{(k)} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{G}^{(k)^T} \mathbf{P}_F^{(k)} \tag{7.23}$$

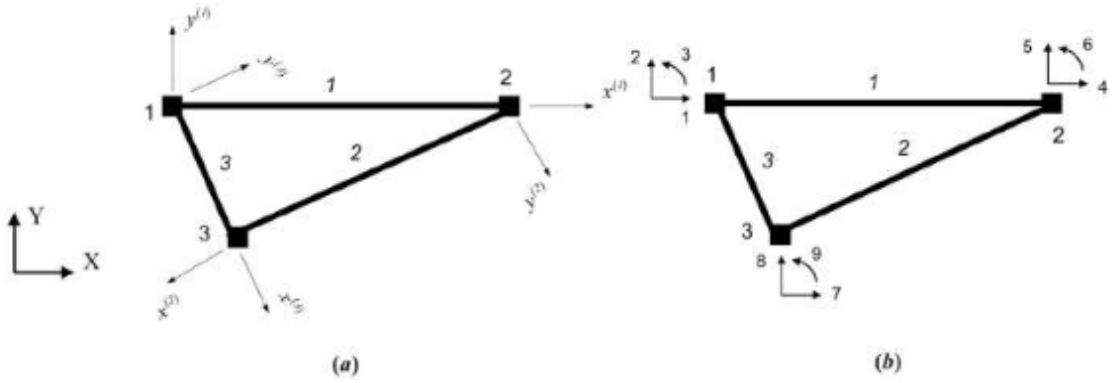
Persamaan (7.22) dan (7.23) merupakan hubungan dasar dalam metode kekakuan langsung serta memperlihatkan dengan jelas aspek fisik maupun proses perakitan dari metode analisis ini. Persamaan (7.22) menunjukkan bahwa matriks kekakuan struktur pada dasarnya hanyalah penjumlahan dari matriks-matriks kekakuan elemen. Sifat penjumlahan kekakuan yang langsung ini sangat menguntungkan untuk implementasi komputer, karena proses perakitan matriks kekakuan struktur hanyalah berupa proses penjumlahan matriks-matriks kekakuan elemen.

Matriks kekakuan elemen yang diperluas, $\tilde{\mathbf{K}}^{(k)}$ pada Persamaan (7.22) memiliki ukuran yang sama dengan matriks kekakuan struktur K. Secara fisis, matriks ini dapat diartikan sebagai matriks kekakuan struktur ketika hanya kontribusi elemen k yang diperhitungkan. Oleh karena itu, penjumlahan seluruh kontribusi elemen terhadap matriks kekakuan struktur setara dengan memperbarui matriks kekakuan struktur secara terus-menerus untuk setiap elemen (perakitan berbasis elemen).

Demikian pula, Persamaan (7.23) menyiratkan bahwa vektor gaya simpul terkekang hanyalah penjumlahan dari vektor beban ujung tetap elemen. Vektor gaya simpul yang diperluas $\tilde{\mathbf{R}}^{(k)}$ dalam Persamaan (7.23) memiliki ukuran yang sama dengan vektor beban simpul struktur F. Secara fisik, vektor ini dapat ditafsirkan sebagai vektor gaya simpul terkekang ketika hanya kontribusi dari elemen k yang diperhitungkan.



Gambar 7.1 Contoh Struktur Rangka: Beban Titik Simpul, Beban Elemen, dan Kondisi Tumpuan.



Gambar 7.2 Contoh Struktur Rangka: (a) Sumbu Referensi Lokal; (b) Sistem Penomoran Titik Simpul, Elemen, dan Derajat Kebebasan (DOF).

Algoritma untuk menyusun matriks $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{G}$, dan $\hat{\mathbf{K}}$ cukup sederhana dan dapat diimplementasikan menggunakan bahasa pemrograman komputer apa pun (misalnya MATLAB, C++, Fortran). Matriks kekakuan struktur dan vektor gaya simpul terkekang diperoleh dengan melakukan perkalian matriks pada Persamaan (7.22) dan (7.23). Namun, metode penyusunan matriks kekakuan dan vektor gaya seperti ini jarang digunakan dalam praktik. Hal ini disebabkan oleh fakta bahwa matriks $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{G}$, dan $\hat{\mathbf{K}}$ bersifat jarang (memiliki banyak elemen bernilai nol) dan berukuran sangat besar untuk sistem struktur yang kompleks. Struktur rangka yang diperlihatkan pada Gambar 7.1 akan digunakan untuk mengilustrasikan bahwa proses penyusunan matriks kekakuan elemen dan vektor gaya elemen jauh lebih sederhana dibandingkan dengan proses yang telah dibahas sebelumnya.

Berdasarkan Gambar 7.2, vektor pemetaan untuk setiap elemen adalah:

$$LM_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}_1 \quad ; \quad LM_2 = \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{Bmatrix}_2 \quad ; \quad LM_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{Bmatrix}_3 \tag{7.24}$$

Dengan mengikuti aturan yang dijelaskan dalam Bab 3, persamaan kesetimbangan nodal struktur tersebut dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1^{(1)} \\ \mathbf{P}_2^{(1)} \\ \mathbf{P}_1^{(2)} \\ \mathbf{P}_2^{(2)} \\ \mathbf{P}_1^{(3)} \\ \mathbf{P}_2^{(3)} \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{F} = \mathbf{HP} \tag{7.25}$$

Matriks pemetaan kesetimbangan untuk setiap elemen adalah:

$$\mathbf{H}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}; \tag{7.26}$$

Mengikuti aturan yang dijelaskan dalam Bab 4, semua persamaan kompatibilitas elemen dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1^{(1)} \\ \mathbf{U}_2^{(1)} \\ \mathbf{U}_1^{(2)} \\ \mathbf{U}_2^{(2)} \\ \mathbf{U}_1^{(3)} \\ \mathbf{U}_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{\Delta} = \mathbf{G}\mathbf{U} \tag{7.27}$$

Matriks pemetaan kompatibilitas untuk setiap anggota adalah:

$$\mathbf{G}^{(1)} = \mathbf{H}^{(1)^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}^{(2)} = \mathbf{H}^{(2)^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}^{(3)} = \mathbf{H}^{(3)^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}; \tag{7.28}$$

Persamaan kekakuan struktur yang belum dirakit dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1^{(1)} \\ \mathbf{P}_2^{(1)} \\ \mathbf{P}_1^{(2)} \\ \mathbf{P}_2^{(2)} \\ \mathbf{P}_1^{(3)} \\ \mathbf{P}_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(1)} & \mathbf{K}_{12}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21}^{(1)} & \mathbf{K}_{22}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{11}^{(2)} & \mathbf{K}_{12}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^{(2)} & \mathbf{K}_{22}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{11}^{(3)} & \mathbf{K}_{12}^{(3)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^{(3)} & \mathbf{K}_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1^{(1)} \\ \mathbf{U}_2^{(1)} \\ \mathbf{U}_1^{(2)} \\ \mathbf{U}_2^{(2)} \\ \mathbf{U}_1^{(3)} \\ \mathbf{U}_2^{(3)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{F1}^{(1)} \\ \mathbf{P}_{F2}^{(1)} \\ \mathbf{P}_{F1}^{(2)} \\ \mathbf{P}_{F2}^{(2)} \\ \mathbf{P}_{F1}^{(3)} \\ \mathbf{P}_{F2}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{P} = \hat{\mathbf{K}}\mathbf{\Delta} + \hat{\mathbf{P}}_F \tag{7.29}$$

Persamaan kekakuan untuk setiap elemen adalah:
Elemen 1:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1^{(1)} \\ \mathbf{P}_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(1)} & \mathbf{K}_{12}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(1)} & \mathbf{K}_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1^{(1)} \\ \mathbf{U}_2^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{F1}^{(1)} \\ \mathbf{P}_{F2}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{K}^{(1)}\mathbf{U}^{(1)} + \mathbf{P}_F^{(1)} \tag{7.30}$$

Elemen 2:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1^{(2)} \\ \mathbf{P}_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(2)} & \mathbf{K}_{12}^{(2)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(2)} & \mathbf{K}_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1^{(2)} \\ \mathbf{U}_2^{(2)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{F1}^{(2)} \\ \mathbf{P}_{F2}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{K}^{(2)}\mathbf{U}^{(2)} + \mathbf{P}_F^{(2)} \tag{7.31}$$

Elemen 3:

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{P}_1^{(3)}\\ \mathbf{P}_2^{(3)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11}^{(3)} & \mathbf{K}_{12}^{(3)}\\ \mathbf{K}_{21}^{(3)} & \mathbf{K}_{22}^{(3)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{U}_1^{(3)}\\ \mathbf{U}_2^{(3)}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\mathbf{P}_{F1}^{(3)}\\ \mathbf{P}_{F2}^{(3)}\end{Bmatrix}\quad \text{atau}\quad \mathbf{P}^{(3)}=\mathbf{K}^{(3)}\mathbf{U}^{(3)}+\mathbf{P}_F^{(3)} \qquad (7.32)$$

Berdasarkan Persamaan (7.22), matriks kekakuan yang diperluas untuk setiap elemen adalah:
Elemen 1:

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}=\mathbf{G}^{(1)^T}\mathbf{K}^{(1)}\mathbf{G}^{(1)}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11}^{(1)} & \mathbf{K}_{12}^{(1)}\\ \mathbf{K}_{21}^{(1)} & \mathbf{K}_{22}^{(1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11}^{(1)} & \mathbf{K}_{12}^{(1)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{K}_{21}^{(1)} & \mathbf{K}_{22}^{(1)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix} \qquad (7.33)$$

Elemen 2:

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(2)}=\mathbf{G}^{(2)^T}\mathbf{K}^{(2)}\mathbf{G}^{(2)}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11}^{(2)} & \mathbf{K}_{12}^{(2)}\\ \mathbf{K}_{21}^{(2)} & \mathbf{K}_{22}^{(2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{11}^{(2)} & \mathbf{K}_{12}^{(2)}\\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^{(2)} & \mathbf{K}_{22}^{(2)}\end{bmatrix} \qquad (7.34)$$

Elemen 3:

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(3)}=\mathbf{G}^{(3)^T}\mathbf{K}^{(3)}\mathbf{G}^{(3)}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11}^{(3)} & \mathbf{K}_{12}^{(3)}\\ \mathbf{K}_{21}^{(3)} & \mathbf{K}_{22}^{(3)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11}^{(3)} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{12}^{(3)}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{K}_{21}^{(3)} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}^{(3)}\end{bmatrix} \qquad (7.35)$$

Berdasarkan Persamaan (7.22), matriks kekakuan yang diperluas untuk setiap elemen adalah:
Elemen 1:

$$\tilde{\mathbf{R}}^{(1)}=\mathbf{G}^{(1)^T}\mathbf{P}_F^{(1)}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{P}_{F1}^{(1)}\\ \mathbf{P}_{F2}^{(1)}\end{Bmatrix}\rightarrow\tilde{\mathbf{R}}^{(1)}=\begin{Bmatrix}\mathbf{P}_{F1}^{(1)}\\ \mathbf{P}_{F2}^{(1)}\\ \mathbf{0}\end{Bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \qquad (7.36)$$

Elemen 2:

$$\tilde{\mathbf{R}}^{(2)}=\mathbf{G}^{(2)^T}\mathbf{P}_F^{(2)}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{P}_{F1}^{(2)}\\ \mathbf{P}_{F2}^{(2)}\end{Bmatrix}\rightarrow\tilde{\mathbf{R}}^{(2)}=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{P}_{F1}^{(2)}\\ \mathbf{P}_{F2}^{(2)}\end{Bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \qquad (7.37)$$

Elemen 3:

$$\tilde{\mathbf{R}}^{(3)} = \mathbf{G}^{(3)^T}\mathbf{P}_F^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{F1}^{(3)} \\ \mathbf{P}_{F2}^{(3)} \end{Bmatrix} \rightarrow \tilde{\mathbf{R}}^{(3)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{F1}^{(3)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{F2}^{(3)} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \tag{7.38}$$

Ditinjau sebuah elemen 1 yang ujung-ujungnya, yaitu i dan j, masing-masing terhubung ke titik simpul struktur 1 dan 2. Berdasarkan Persamaan (7.33), terlihat bahwa submatriks $\mathbf{K}_{11}^{(1)}$, $\mathbf{K}_{12}^{(1)}$, $\mathbf{K}_{21}^{(1)}$, dan $\mathbf{K}_{22}^{(1)}$ muncul pada posisi yang berkaitan dengan titik simpul 1 dan 2 dalam matriks kekakuan struktur. Kesimpulan serupa dapat ditarik untuk elemen 2 dan 3.
Secara umum:

Untuk elemen k yang memiliki ujung i dan j yang masing-masing terhubung dengan simpul struktur M dan N, matriks kekakuan struktur $\boldsymbol{K}^{(k)}$, $\boldsymbol{K}_{11}^{(k)}$, dan $\boldsymbol{K}_{12}^{(k)}$pada lokasi yang terkait dengan simpul M dan N membentuk matriks kekakuan struktur, seperti yang ditunjukkan pada Persamaan (7.39).

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(k)} = \mathbf{G}^{(k)^T}\mathbf{K}^{(k)}\mathbf{G}^{(k)} = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} M & & N \\ \downarrow & & \downarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{K}_{11}^{(k)} & \cdots & \mathbf{K}_{12}^{(k)} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ & \vdots & & \vdots & \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \mathbf{K}_{21}^{(k)} & \cdots & \mathbf{K}_{22}^{(2)} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ M \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ N \end{matrix} \tag{7.39}$$

Berdasarkan Persamaan (7.22), matriks kekakuan lengkap untuk rangka pada Gambar 7.1 adalah:

$$\mathbf{K} = \sum_{k=1}^{3} \tilde{\mathbf{K}}^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{G}^{(k)^T}\mathbf{K}^{(k)}\mathbf{G}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(1)} + \mathbf{K}_{11}^{(3)} & \mathbf{K}_{12}^{(1)} & \mathbf{K}_{12}^{(3)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(1)} & \mathbf{K}_{22}^{(1)} + \mathbf{K}_{11}^{(2)} & \mathbf{K}_{12}^{(2)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(3)} & \mathbf{K}_{21}^{(2)} & \mathbf{K}_{22}^{(2)} + \mathbf{K}_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{7.40}$$

Demikian pula, dapat diamati dari Persamaan (7.36) bahwa subvektor $\boldsymbol{P}_1^{(k)}$dan $\boldsymbol{P}_2^{(k)}$muncul pada posisi yang berkaitan dengan simpul 1 dan 2 dari vektor gaya simpul tertahan. Kesimpulan serupa dapat ditarik untuk elemen 2 dan 3.
Secara umum:

Untuk elemen k yang memiliki ujung i dan j yang masing-masing terhubung dengan simpul struktur Mdan N, subvektor $\boldsymbol{P}_1^{(k)}$dan $\boldsymbol{P}_2^{(k)}$muncul pada posisi yang berkaitan dengan simpul M dan N dari vektor gaya nodal yang ditahan, seperti yang ditunjukkan pada Persamaan (7.41).

$$\tilde{\tilde{\mathbf{R}}}^{(k)} = \mathbf{G}^{(k)^T}\mathbf{P}_F^{(k)} = \begin{matrix} \\ \end{matrix} \begin{matrix} M & & & & N \\ \downarrow & & & & \downarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{P}_{F1}^{(k)} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{P}_{F2}^{(k)} & \cdots \end{bmatrix}^T \tag{7.41}$$

Berdasarkan Persamaan (7.23), vektor gaya nodal terkekang pada rangka di Gambar 7.1 adalah:

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{3} \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{G}^{(k)^T} \mathbf{P}_F^{(k)} = \left[\mathbf{P}_{F1}^{(1)} + \mathbf{P}_{F1}^{(3)} \quad \mathbf{P}_{F2}^{(1)} + \mathbf{P}_{F1}^{(2)} \quad \mathbf{P}_{F2}^{(2)} + \mathbf{P}_{F2}^{(3)}\right]^T \quad (7.42)$$

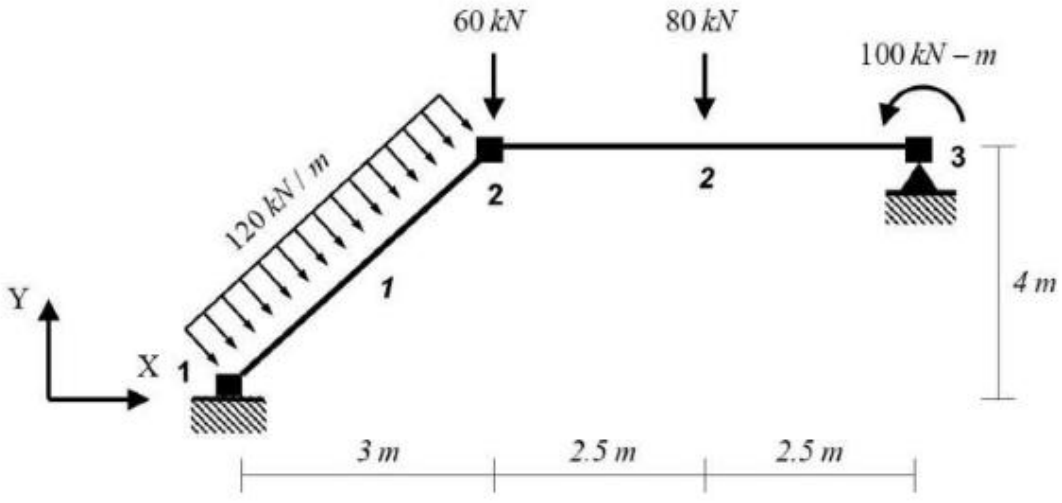
Contoh 7.1

Untuk struktur rangka yang diperlihatkan pada Gambar 7.3, tentukan matriks kekakuan lengkap dan vektor beban ekuivalennya.

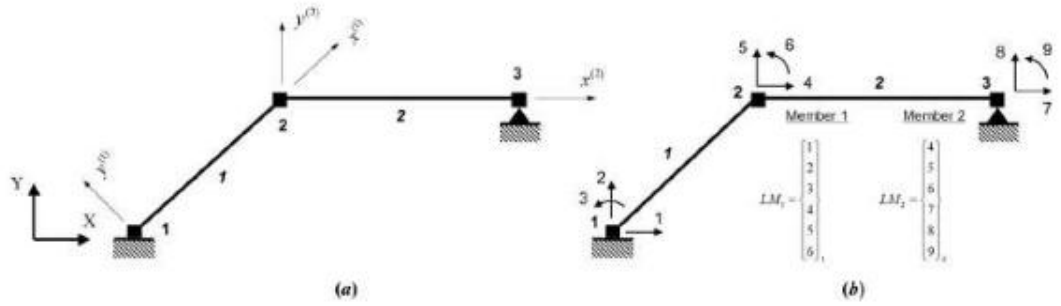
Diketahui bahwa matriks kekakuan lokal untuk elemen 1 dan 2 adalah:

$$\overline{\mathbf{K}}^{(1)} = \overline{\mathbf{K}}^{(2)} = \frac{IE}{125}\begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & -1000 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 0 & -12 & 30 \\ 0 & 30 & 100 & 0 & -30 & 50 \\ -1000 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 & 0 & 12 & -30 \\ 0 & 30 & 50 & 0 & -30 & 100 \end{bmatrix}$$

- **Solusi**: Sumbu referensi lokal untuk elemen 1 dan 2 ditunjukkan pada Gambar 7.4a, sedangkan sistem penomoran derajat kebebasan (DOF), elemen, dan titik simpul serta vektor pemetaan elemen ditunjukkan pada Gambar 7.4b:



Gambar 7.3 Contoh 7.1.



Gambar 7.4 Contoh 7.1 (Lanjutan).

Berdasarkan vektor pemetaan, matriks pemetaan kesetimbangan struktural H adalah:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan vektor pemetaan, matriks pemetaan kompatibilitas struktural G adalah:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LANGKAH I

Persamaan kesetimbangan simpul pada rangka dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 0 \\ -60 \\ 0 \\ F_7 \\ F_8 \\ 100 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_3^{(1)} \\ P_4^{(1)} \\ P_5^{(1)} \\ P_6^{(1)} \\ P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} \\ P_3^{(2)} \\ P_4^{(2)} \\ P_5^{(2)} \\ P_6^{(2)} \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{F = HP}$$

LANGKAH II

Persamaan kompatibilitas nodal rangka ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ U_4^{(1)} \\ U_5^{(1)} \\ U_6^{(1)} \\ U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \\ U_4^{(2)} \\ U_5^{(2)} \\ U_6^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \mathbf{\Delta = GU}$$

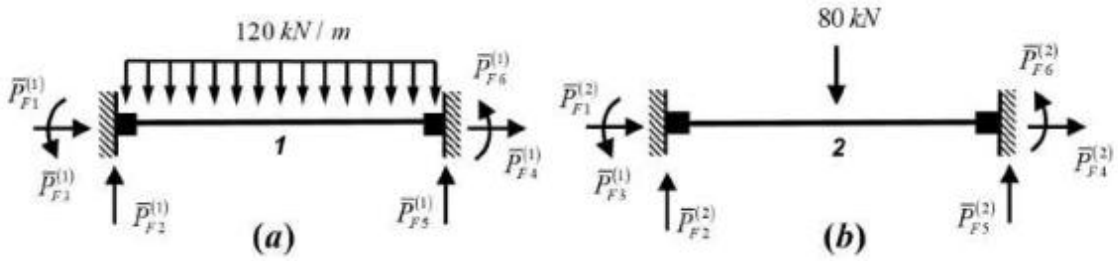
LANGKAH III

Vektor gaya ujung jepit dan matriks kekakuan lokal untuk setiap elemen disusun.

Elemen 1 (Gambar 7.5a):

$$\overline{\mathbf{P}}_F^{(1)} = [0 \quad 300 \quad 250 \quad 0 \quad 300 \quad -250]^T$$

$$\overline{\mathbf{K}}^{(1)} = \frac{IE}{125}\begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & -1000 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 0 & -12 & 30 \\ 0 & 30 & 100 & 0 & -30 & 50 \\ -1000 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 & 0 & 12 & -30 \\ 0 & 30 & 50 & 0 & -30 & 100 \end{bmatrix}$$



Gambar 7.5 Contoh 7.1 (Lanjutan).

Elemen 2 (Gambar 7.5b):

$$\overline{\mathbf{P}}_F^{(2)} = [0 \quad 40 \quad 50 \quad 0 \quad 40 \quad -50]^T$$

$$\overline{\mathbf{K}}^{(2)} = \frac{IE}{125}\begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & -1000 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 0 & -12 & 30 \\ 0 & 30 & 100 & 0 & -30 & 50 \\ -1000 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 & 0 & 12 & -30 \\ 0 & 30 & 50 & 0 & -30 & 100 \end{bmatrix}$$

LANGKAH IV

Matriks kekakuan dan vektor gaya ujung tetap untuk setiap anggota ditransformasikan dari sistem referensi lokal ke sistem referensi global.

Elemen 1:

$$\mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(1)\,T}\overline{\mathbf{K}}^{(1)}\mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(1)} = \frac{IE}{125}\begin{bmatrix} 367.68 & 474.24 & -24 & -367.68 & 474.24 & -24 \\ 474.24 & 644.32 & 18 & -474.24 & -644.32 & 18 \\ -24 & 18 & 100 & 24 & -18 & 50 \\ -367.68 & -474.24 & 24 & 367.68 & 474.24 & 24 \\ 474.24 & -644.32 & -18 & 474.24 & 644.32 & -18 \\ -24 & 18 & 50 & 24 & -18 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_F^{(1)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(1)\,T}\overline{\mathbf{P}}_F^{(1)} = [-240 \quad 180 \quad 250 \quad -240 \quad 180 \quad -250]^T$$

Elemen 2:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{ROT}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \boldsymbol{\Gamma}_{ROT}^{(2)\ T} \overline{\mathbf{K}}^{(2)} \boldsymbol{\Gamma}_{ROT}^{(2)} = \frac{IE}{125} \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & -1000 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 0 & -12 & 30 \\ 0 & 30 & 100 & 0 & -30 & 50 \\ -1000 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 & 0 & 12 & -30 \\ 0 & 30 & 50 & 0 & -30 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_F^{(2)} = \boldsymbol{\Gamma}_{ROT}^{(2)\ T} \overline{\mathbf{P}}_F^{(2)} = [0 \quad 40 \quad 50 \quad 0 \quad 40 \quad -50]^T$$

Oleh karena itu, vektor gaya ujung tetap yang belum dirakit adalah:

$$\hat{\mathbf{P}}_F = [-240 \quad 180 \quad 250 \quad -240 \quad 180 \quad -250 \quad 0 \quad 40 \quad 50 \quad 0 \quad 40 \quad -50]^T$$

Matriks kekakuan struktural yang belum dirakit adalah:

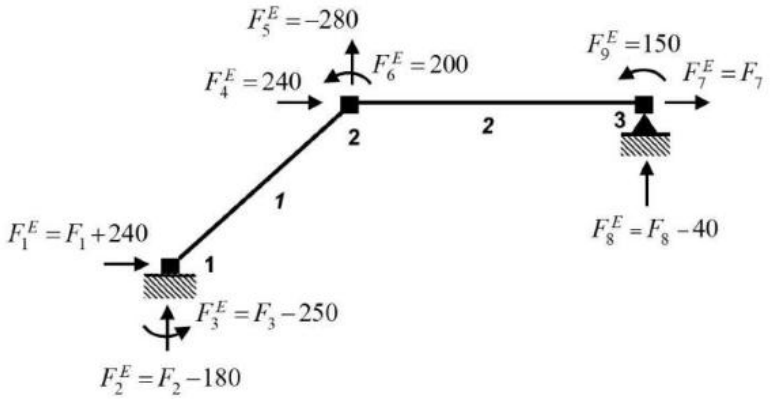
$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{(2)} \end{bmatrix}$$

LANGKAH V

Vektor beban nodal yang diterapkan adalah:

$$\mathbf{F} = [F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad 0 \quad -60 \quad 0 \quad F_7 \quad F_8 \quad 100]^T$$

Vektor beban nodal ekuivalen (Gambar 7.6) adalah:



Gambar 7.6 Contoh 7.1 (Lanjutan).

$$\mathbf{F}^E = \mathbf{F} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{P}}_F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 0 \\ -60 \\ 0 \\ F_7 \\ F_8 \\ 100 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -240 \\ 180 \\ 250 \\ -240 \\ 180 \\ -250 \\ 0 \\ 40 \\ 50 \\ 0 \\ 40 \\ -50 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 + 240 \\ F_2 - 180 \\ F_3 - 250 \\ 240 \\ -280 \\ 200 \\ F_7 \\ F_8 - 40 \\ 150 \end{Bmatrix}$$

LANGKAH VI

Matriks kekakuan lengkap rangka disusun sebagai berikut:

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}^T\hat{\mathbf{K}}\mathbf{G} = \frac{IE}{125}\begin{bmatrix} 367.68 & 474.24 & -24 & -367.68 & -474.24 & -24 & 0 & 0 & 0 \\ 474.24 & 644.32 & 18 & -474.24 & -644.32 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & 18 & 100 & 24 & -18 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ -367.68 & -474.24 & 24 & 1367.68 & 474.24 & 24 & -1000 & 0 & 0 \\ -474.24 & -644.32 & -18 & 474.24 & 656.32 & 12 & 0 & -12 & 30 \\ -24 & 18 & 50 & 24 & 12 & 200 & 0 & -30 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & -1000 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -30 & 0 & 12 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 50 & 0 & -30 & 100 \end{bmatrix}$$

Persamaan kekakuan lengkap untuk rangka tersebut dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}^T\hat{\mathbf{K}}\mathbf{G} = \frac{IE}{125}\begin{bmatrix} 367.68 & 474.24 & -24 & -367.68 & -474.24 & -24 & 0 & 0 & 0 \\ 474.24 & 644.32 & 18 & -474.24 & -644.32 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & 18 & 100 & 24 & -18 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ -367.68 & -474.24 & 24 & 1367.68 & 474.24 & 24 & -1000 & 0 & 0 \\ -474.24 & -644.32 & -18 & 474.24 & 656.32 & 12 & 0 & -12 & 30 \\ -24 & 18 & 50 & 24 & 12 & 200 & 0 & -30 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & -1000 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -30 & 0 & 12 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 50 & 0 & -30 & 100 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan ini memuat 9 variabel yang tidak diketahui (4 perpindahan titik simpul ditambah 5 gaya reaksi) dengan 9 persamaan independen. Namun, matriks kekakuan K bersifat singular karena tidak ada kondisi tumpuan yang diterapkan. Setelah mengatur ulang baris dan kolom, sistem persamaan ini dapat dipartisi berdasarkan derajat kebebasan bebas dan terkekang untuk menyelesaikan besaran-besaran yang tidak diketahui.

Menarik untuk dicermati bahwa gaya yang tidak diketahui di ruas kiri berkorespondensi dengan perpindahan yang diketahui di ruas kanan, dan sebaliknya, gaya yang diketahui di ruas kiri berkorespondensi dengan perpindahan yang tidak diketahui di ruas kanan. Hal ini secara sederhana menyiratkan bahwa pada setiap derajat kebebasan, salah satu dari gaya atau perpindahan harus ditentukan nilainya.

CONTOH 7.2

Untuk struktur rangka batang (truss) yang ditunjukkan pada Gambar 7.7,

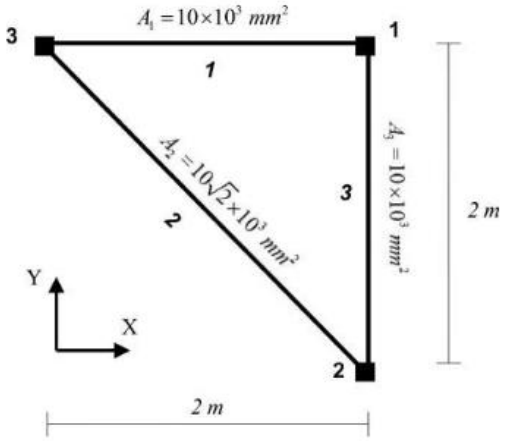
- Susunlah matriks kekakuan lengkapnya.
- Susunlah vektor beban titik simpul ekuivalennya dengan memperhitungkan kenaikan suhu ΔT = 10°C pada batang 2.

Asumsikan modulus *young* material adalah 200 GPa dan koefisien muai termal adalah 6,5 × 10^{-6}/°C. Penyelesaian: Sistem penomoran acuan lokal, derajat kebebasan (DOF), batang, dan titik simpul, serta vektor pemetaan batang ditunjukkan pada Gambar 7.8.

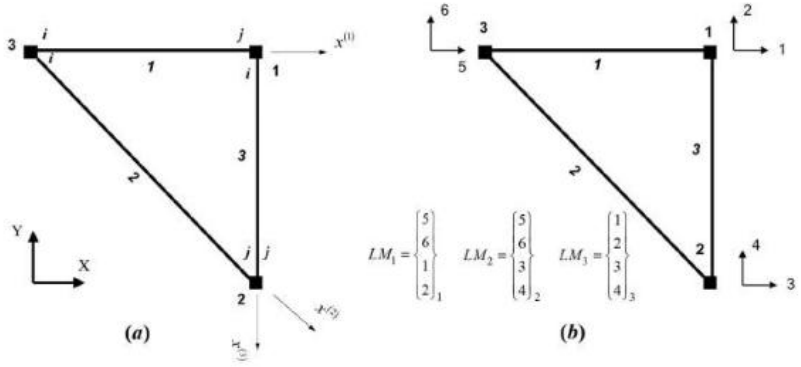
LANGKAH I

Berdasarkan vektor pemetaan masing-masing batang, matriks pemetaan kesetimbangan untuk setiap batang adalah:

$$\mathbf{H}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$



Gambar 7.7 Contoh 7.2.



Gambar 7.8 Contoh 7.2 (Lanjutan).

Matriks pemetaan kesetimbangan struktural H adalah:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}^{(1)} \quad \mathbf{H}^{(2)} \quad \mathbf{H}^{(3)}]$$

LANGKAH II

Berdasarkan vektor pemetaan setiap anggota, matriks pemetaan kompatibilitas untuk setiap anggota adalah:

$$\mathbf{G}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

LANGKAH III

Matriks kekakuan untuk setiap elemen ditransformasikan dari sistem acuan lokal ke sistem acuan global.

Elemen 1:

$$\mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks kekakuan elemen lokal:

$$\overline{\mathbf{K}}^{(1)} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks kekakuan elemen global:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(1)\ T} \overline{\mathbf{K}}^{(1)} \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(1)} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elemen 2:

$$\mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Matriks kekakuan elemen lokal:

$$\overline{\mathbf{K}}^{(2)} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks kekakuan elemen global:

$$\mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(2)\,T}\overline{\mathbf{K}}^{(2)}\mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(2)} = 0.5 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemen 3:

$$\mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks kekakuan elemen lokal:

$$\overline{\mathbf{K}}^{(3)} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks kekakuan elemen global:

$$\mathbf{K}^{(3)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(3)\,T}\overline{\mathbf{K}}^{(3)}\mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(3)} = 10^6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LANGKAH IV

Matriks kekakuan teraugmentasi untuk setiap elemen adalah:

Elemen 1:

$$\tilde{\tilde{\mathbf{K}}}^{(1)} = \mathbf{G}^{(1)^T}\mathbf{K}^{(1)}\mathbf{G}^{(1)} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elemen 2:

$$\tilde{\tilde{\mathbf{K}}}^{(2)} = \mathbf{G}^{(2)^T}\mathbf{K}^{(2)}\mathbf{G}^{(2)} = 0.5 \times 10^6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemen 3:

$$\overline{\overline{\mathbf{K}}}^{(3)} = \mathbf{G}^{(3)^T}\mathbf{K}^{(3)}\mathbf{G}^{(3)} = 10^6\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

LANGKAH V

Vektor gaya ujung jepit untuk elemen 2 ditunjukkan pada Gambar 7.9. Vektor gaya ujung jepit lokal adalah:

$$\overline{\mathbf{P}}_F^{(2)} = [260 \quad -260]^T$$

Vektor gaya ujung-tetap global adalah:

$$\mathbf{P}_F^{(2)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(2)^T}\overline{\mathbf{P}}_F^{(2)} = [183.85 \quad -183.85 \quad -183.85 \quad 183.85]^T$$

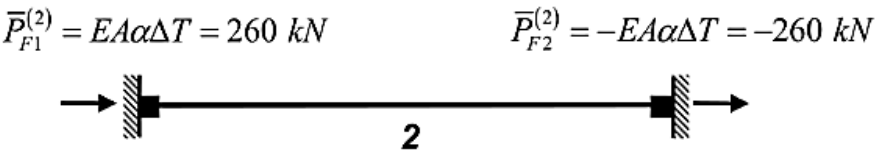
LANGKAH VI

Vektor gaya simpul tertahan yang diperluas untuk elemen 2 adalah:

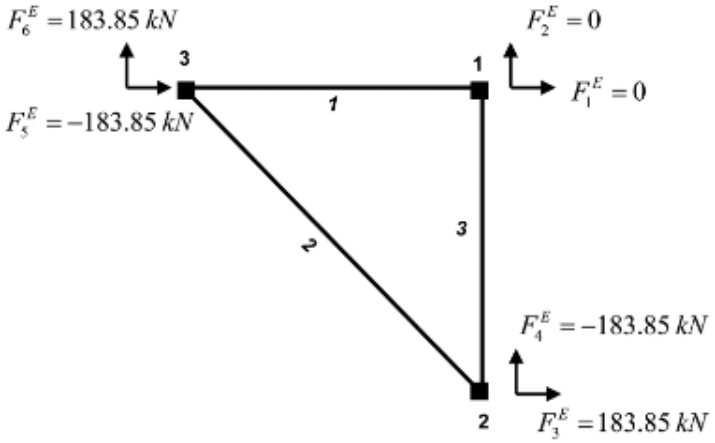
$$\overline{\overline{\mathbf{R}}}^{(2)} = \mathbf{G}^{(2)^T}\mathbf{P}_F^{(2)} = [0 \quad 0 \quad -183.85 \quad 183.85 \quad 183.85 \quad -183.85]^T$$

Oleh karena itu, matriks kekakuan lengkap rangka batang tersebut adalah:

$$\mathbf{K} = \sum_{k=1}^{3}\overline{\overline{\mathbf{K}}}^{(k)} = \sum_{k=1}^{3}\mathbf{G}^{(k)^T}\mathbf{K}^{(k)}\mathbf{G}^{(k)} = 0.5\times 10^6\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & -1 & 3 & 1 & -1\\ -2 & 0 & -1 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$



Gambar 7.9 Contoh 7.2 (Lanjutan).



Gambar 7.10 Contoh 7.2 (Lanjutan).

Vektor gaya nodal tertahan untuk struktur tersebut adalah:

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{3} \overline{\overline{\mathbf{R}}}^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{G}^{(k)^T} \mathbf{P}_F^{(k)} = [0 \quad 0 \quad -183.85 \quad 183.85 \quad 183.85 \quad -183.85]^T$$

Vektor gaya nodal ekuivalen ditunjukkan pada Gambar 7.10.

$$\mathbf{F}^E = \mathbf{F} - \mathbf{R} = [0 \quad 0 \quad 183.85 \quad -183.85 \quad -183.85 \quad 183.85]^T$$

Perlu dicatat bahwa kumpulan gaya ini membentuk sistem yang berada dalam kesetimbangan sendiri (*self-equilibrated system*).

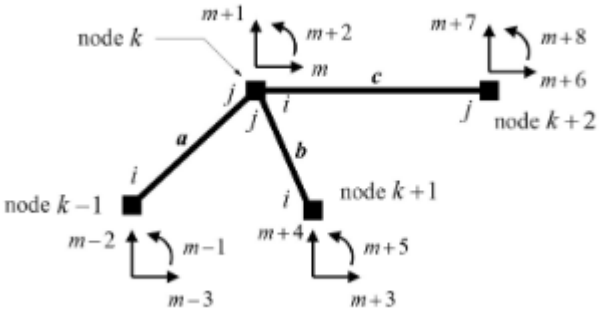
7.4 TEKNIK PERAKITAN BERDASARKAN KODE ELEMEN

Algoritma perakitan yang dibahas pada bagian sebelumnya sangat penting untuk memahami konsep dasar metode kekakuan langsung. Sayangnya, algoritma tersebut tidak dapat diterapkan secara efisien pada komputer serta memakan banyak ruang penyimpanan dan waktu komputasi untuk sistem struktur yang besar. Oleh karena itu, metode ini jarang digunakan dalam praktik. Dari Persamaan (7.40), terlihat bahwa setiap koefisien pengaruh pada matriks kekakuan struktur dapat ditentukan dari koefisien kekakuan global elemen-elemen penyusunnya, yang ditempatkan pada posisi yang tepat di dalam matriks kekakuan struktur tersebut. Metode penyusunan matriks kekakuan struktur serta vektor gaya nodal struktur ini dapat diterapkan secara efisien pada komputer, serta jauh lebih hemat dalam hal kebutuhan penyimpanan dan waktu komputasi untuk sistem struktur berskala besar. Teknik ini dikenal sebagai "teknik kode elemen" (*member code technique*) dan diperkenalkan oleh S.S. Tezcan pada tahun 1963.

Perhatikan titik simpul k pada struktur rangka yang ditunjukkan dalam Gambar 7.11. Diasumsikan terdapat tiga elemen (a, b, dan c) yang terhubung pada titik simpul tersebut.

Berdasarkan derajat kebebasan titik simpul dan konektivitas elemen yang diperlihatkan pada Gambar 7.11, vektor pemetaan untuk elemen a, b, dan c adalah:

$$LM_a = \begin{Bmatrix} m-3 \\ m-2 \\ m-1 \\ m \\ m+1 \\ m+2 \end{Bmatrix}_a \quad ; \quad LM_b = \begin{Bmatrix} m+3 \\ m+4 \\ m+5 \\ m \\ m+1 \\ m+2 \end{Bmatrix}_b \quad ; \quad LM_c = \begin{Bmatrix} m \\ m+1 \\ m+2 \\ m+6 \\ m+7 \\ m+8 \end{Bmatrix}_c \tag{7.43}$$



Gambar 7.11 Elemen-elemen yang terhubung ke titik simpul k pada struktur rangka dan komponen perpindahan titik-titik simpul yang terhubung tersebut.

Hubungan kekakuan global untuk setiap elemen dinyatakan dalam variabel elemen sebagai berikut:

Elemen a:

$$\begin{Bmatrix} P_1^{(a)} \\ P_2^{(a)} \\ P_3^{(a)} \\ P_4^{(a)} \\ P_5^{(a)} \\ P_6^{(a)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(a)} & K_{12}^{(a)} & K_{13}^{(a)} & K_{14}^{(a)} & K_{15}^{(a)} & K_{16}^{(a)} \\ K_{21}^{(a)} & K_{22}^{(a)} & K_{23}^{(a)} & K_{24}^{(a)} & K_{25}^{(a)} & K_{26}^{(a)} \\ K_{31}^{(a)} & K_{32}^{(a)} & K_{33}^{(a)} & K_{34}^{(a)} & K_{35}^{(a)} & K_{36}^{(a)} \\ K_{41}^{(a)} & K_{42}^{(a)} & K_{43}^{(a)} & K_{44}^{(a)} & K_{45}^{(a)} & K_{46}^{(a)} \\ K_{51}^{(a)} & K_{52}^{(a)} & K_{53}^{(a)} & K_{54}^{(a)} & K_{55}^{(a)} & K_{56}^{(a)} \\ K_{61}^{(a)} & K_{62}^{(a)} & K_{63}^{(a)} & K_{64}^{(a)} & K_{65}^{(a)} & K_{66}^{(a)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{(a)} \\ U_2^{(a)} \\ U_3^{(a)} \\ U_4^{(a)} \\ U_5^{(a)} \\ U_6^{(a)} \end{Bmatrix} \tag{7.44}$$

Elemen b:

$$\begin{Bmatrix} P_1^{(b)} \\ P_2^{(b)} \\ P_3^{(b)} \\ P_4^{(b)} \\ P_5^{(b)} \\ P_6^{(b)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(b)} & K_{12}^{(b)} & K_{13}^{(b)} & K_{14}^{(b)} & K_{15}^{(b)} & K_{16}^{(b)} \\ K_{21}^{(b)} & K_{22}^{(b)} & K_{23}^{(b)} & K_{24}^{(b)} & K_{25}^{(b)} & K_{26}^{(b)} \\ K_{31}^{(b)} & K_{32}^{(b)} & K_{33}^{(b)} & K_{34}^{(b)} & K_{35}^{(b)} & K_{36}^{(b)} \\ K_{41}^{(b)} & K_{42}^{(b)} & K_{43}^{(b)} & K_{44}^{(b)} & K_{45}^{(b)} & K_{46}^{(b)} \\ K_{51}^{(b)} & K_{52}^{(b)} & K_{53}^{(b)} & K_{54}^{(b)} & K_{55}^{(b)} & K_{56}^{(b)} \\ K_{61}^{(b)} & K_{62}^{(b)} & K_{63}^{(b)} & K_{64}^{(b)} & K_{65}^{(b)} & K_{66}^{(b)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{(b)} \\ U_2^{(b)} \\ U_3^{(b)} \\ U_4^{(b)} \\ U_5^{(b)} \\ U_6^{(b)} \end{Bmatrix} \tag{7.45}$$

Elemen c:

$$\begin{Bmatrix} P_1^{(c)} \\ P_2^{(c)} \\ P_3^{(c)} \\ P_4^{(c)} \\ P_5^{(c)} \\ P_6^{(c)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(c)} & K_{12}^{(c)} & K_{13}^{(c)} & K_{14}^{(c)} & K_{15}^{(c)} & K_{16}^{(c)} \\ K_{21}^{(c)} & K_{22}^{(c)} & K_{23}^{(c)} & K_{24}^{(c)} & K_{25}^{(c)} & K_{26}^{(c)} \\ K_{31}^{(c)} & K_{32}^{(c)} & K_{33}^{(c)} & K_{34}^{(c)} & K_{35}^{(c)} & K_{36}^{(c)} \\ K_{41}^{(c)} & K_{42}^{(c)} & K_{43}^{(c)} & K_{44}^{(c)} & K_{45}^{(c)} & K_{46}^{(c)} \\ K_{51}^{(c)} & K_{52}^{(c)} & K_{53}^{(c)} & K_{54}^{(c)} & K_{55}^{(c)} & K_{56}^{(c)} \\ K_{61}^{(c)} & K_{62}^{(c)} & K_{63}^{(c)} & K_{64}^{(c)} & K_{65}^{(c)} & K_{66}^{(c)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{(c)} \\ U_2^{(c)} \\ U_3^{(c)} \\ U_4^{(c)} \\ U_5^{(c)} \\ U_6^{(c)} \end{Bmatrix} \tag{7.46}$$

Berdasarkan vektor pemetaan (7.43) untuk setiap elemen, Persamaan (7.44), (7.45), dan (7.46) dinyatakan dalam variabel struktural sebagai berikut:
Elemen a:

$$LM_a = \begin{Bmatrix} m-3 \\ m-2 \\ m-1 \\ m \\ m+1 \\ m+2 \end{Bmatrix}_a ; \quad \begin{Bmatrix} P_1^{(a)} \\ P_2^{(a)} \\ P_3^{(a)} \\ P_4^{(a)} \\ P_5^{(a)} \\ P_6^{(a)} \end{Bmatrix} = \begin{matrix} m-3 \\ m-2 \\ m-1 \\ m \\ m+1 \\ m+2 \end{matrix} \begin{matrix} m-3 & m-2 & m-1 & m & m+1 & m+2 \end{matrix} \begin{bmatrix} K_{11}^{(a)} & K_{12}^{(a)} & K_{13}^{(a)} & K_{14}^{(a)} & K_{15}^{(a)} & K_{16}^{(a)} \\ K_{21}^{(a)} & K_{22}^{(a)} & K_{23}^{(a)} & K_{24}^{(a)} & K_{25}^{(a)} & K_{26}^{(a)} \\ K_{31}^{(a)} & K_{32}^{(a)} & K_{33}^{(a)} & K_{34}^{(a)} & K_{35}^{(a)} & K_{36}^{(a)} \\ K_{41}^{(a)} & K_{42}^{(a)} & K_{43}^{(a)} & K_{44}^{(a)} & K_{45}^{(a)} & K_{46}^{(a)} \\ K_{51}^{(a)} & K_{52}^{(a)} & K_{53}^{(a)} & K_{54}^{(a)} & K_{55}^{(a)} & K_{56}^{(a)} \\ K_{61}^{(a)} & K_{62}^{(a)} & K_{63}^{(a)} & K_{64}^{(a)} & K_{65}^{(a)} & K_{66}^{(a)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{m-3} \\ U_{m-2} \\ U_{m-1} \\ U_m \\ U_{m+1} \\ U_{m+2} \end{Bmatrix} \tag{7.47}$$

Elemen b:

$$LM_b = \begin{Bmatrix} m+3 \\ m+4 \\ m+5 \\ m \\ m+1 \\ m+2 \end{Bmatrix}_b ; \quad \begin{Bmatrix} P_1^{(b)} \\ P_2^{(b)} \\ P_3^{(b)} \\ P_4^{(b)} \\ P_5^{(b)} \\ P_6^{(b)} \end{Bmatrix} = \begin{matrix} m+3 \\ m+4 \\ m+5 \\ m \\ m+1 \\ m+2 \end{matrix} \begin{matrix} m+3 & m+4 & m+5 & m & m+1 & m+2 \end{matrix} \begin{bmatrix} K_{11}^{(b)} & K_{12}^{(b)} & K_{13}^{(b)} & K_{14}^{(b)} & K_{15}^{(b)} & K_{16}^{(b)} \\ K_{21}^{(b)} & K_{22}^{(b)} & K_{23}^{(b)} & K_{24}^{(b)} & K_{25}^{(b)} & K_{26}^{(b)} \\ K_{31}^{(b)} & K_{32}^{(b)} & K_{33}^{(b)} & K_{34}^{(b)} & K_{35}^{(b)} & K_{36}^{(b)} \\ K_{41}^{(b)} & K_{42}^{(b)} & K_{43}^{(b)} & K_{44}^{(b)} & K_{45}^{(b)} & K_{46}^{(b)} \\ K_{51}^{(b)} & K_{52}^{(b)} & K_{53}^{(b)} & K_{54}^{(b)} & K_{55}^{(b)} & K_{56}^{(b)} \\ K_{61}^{(b)} & K_{62}^{(b)} & K_{63}^{(b)} & K_{64}^{(b)} & K_{65}^{(b)} & K_{66}^{(b)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{m+3} \\ U_{m+4} \\ U_{m+5} \\ U_m \\ U_{m+1} \\ U_{m+2} \end{Bmatrix} \tag{7.48}$$

Elemen c:

$$LM_c = \begin{Bmatrix} m \\ m+1 \\ m+2 \\ m+6 \\ m+7 \\ m+8 \end{Bmatrix}_c ; \quad \begin{Bmatrix} P_1^{(c)} \\ P_2^{(c)} \\ P_3^{(c)} \\ P_4^{(c)} \\ P_5^{(c)} \\ P_6^{(c)} \end{Bmatrix} = \begin{matrix} m \\ m+1 \\ m+2 \\ m+6 \\ m+7 \\ m+8 \end{matrix} \begin{matrix} m & m+1 & m+2 & m+6 & m+7 & m+8 \end{matrix} \begin{bmatrix} K_{11}^{(c)} & K_{12}^{(c)} & K_{13}^{(c)} & K_{14}^{(c)} & K_{15}^{(c)} & K_{16}^{(c)} \\ K_{21}^{(c)} & K_{22}^{(c)} & K_{23}^{(c)} & K_{24}^{(c)} & K_{25}^{(c)} & K_{26}^{(c)} \\ K_{31}^{(c)} & K_{32}^{(c)} & K_{33}^{(c)} & K_{34}^{(c)} & K_{35}^{(c)} & K_{36}^{(c)} \\ K_{41}^{(c)} & K_{42}^{(c)} & K_{43}^{(c)} & K_{44}^{(c)} & K_{45}^{(c)} & K_{46}^{(c)} \\ K_{51}^{(c)} & K_{52}^{(c)} & K_{53}^{(c)} & K_{54}^{(c)} & K_{55}^{(c)} & K_{56}^{(c)} \\ K_{61}^{(c)} & K_{62}^{(c)} & K_{63}^{(c)} & K_{64}^{(c)} & K_{65}^{(c)} & K_{66}^{(c)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ U_{m+1} \\ U_{m+2} \\ U_{m+6} \\ U_{m+7} \\ U_{m+8} \end{Bmatrix} \tag{7.49}$$

Berdasarkan Gambar 7.12, kondisi kesetimbangan pada simpul k dituliskan sebagai berikut:

$$\sum F_X = 0; \quad \Rightarrow \quad F_m^E = P_4^{(a)} + P_4^{(b)} + P_1^{(c)} \tag{7.50}$$

$$\sum F_Y = 0; \quad \Rightarrow \quad F_{m+1}^E = P_5^{(a)} + P_5^{(b)} + P_2^{(c)} \tag{7.51}$$

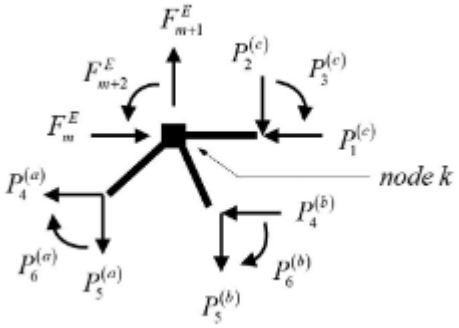
$$\sum M_Z = 0; \quad \Rightarrow \quad F_{m+2}^E = P_6^{(a)} + P_6^{(b)} + P_3^{(c)} \tag{7.52}$$

Persamaan (7.50), (7.51), dan (7.52) berturut-turut berkaitan dengan persamaan kekakuan ke-m, $(m+1)$, dan $(m+2)$ dari struktur. Dengan menggunakan hubungan kekakuan elemen dari Persamaan (7.47), (7.48), dan (7.49), ruas kanan dari Persamaan (7.50), (7.51), dan (7.52) dapat diekspresikan dalam bentuk perpindahan titik simpul (nodal) struktur sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F_m^E = {} & K_{41}^{(a)}U_{m-3} + K_{42}^{(a)}U_{m-2} + K_{43}^{(a)}U_{m-1} + \left(K_{44}^{(a)} + K_{44}^{(b)} + K_{11}^{(c)}\right) \\ & U_m + \left(K_{45}^{(a)} + K_{45}^{(b)} + K_{12}^{(c)}\right)U_{m+1} + \left(K_{46}^{(a)} + K_{46}^{(b)} + K_{13}^{(c)}\right) \\ & U_{m+2} + K_{41}^{(b)}U_{m+3} + K_{42}^{(b)}U_{m+4} + K_{43}^{(b)}U_{m+5} \\ & + K_{14}^{(c)}U_{m+6} + K_{15}^{(c)}U_{m+7} + K_{16}^{(c)}U_{m+8} \end{aligned} \tag{7.53}$$

$$\begin{aligned} F_{m+1}^E = {} & K_{51}^{(a)}U_{m-3} + K_{52}^{(a)}U_{m-2} + K_{53}^{(a)}U_{m-1} + \left(K_{54}^{(a)} + K_{54}^{(b)} + K_{21}^{(c)}\right)U_m + \\ & \left(K_{55}^{(a)} + K_{55}^{(b)} + K_{22}^{(c)}\right)U_{m+1} + \left(K_{56}^{(a)} + K_{56}^{(b)} + K_{23}^{(c)}\right)U_{m+2} + K_{51}^{(b)}U_{m+3} + \\ & K_{52}^{(b)}U_{m+4} + K_{53}^{(b)}U_{m+5} + K_{24}^{(c)}U_{m+6} + K_{25}^{(c)}U_{m+7} + K_{26}^{(c)}U_{m+8} \end{aligned} \tag{7.54}$$

$$\begin{aligned} F_{m+2}^E = {} & K_{61}^{(a)}U_{m-3} + K_{62}^{(a)}U_{m-2} + K_{63}^{(a)}U_{m-1} + \left(K_{64}^{(a)} + K_{64}^{(b)} + K_{31}^{(c)}\right)U_m \\ & + \left(K_{65}^{(a)} + K_{65}^{(b)} + K_{32}^{(c)}\right)U_{m+1} + \left(K_{66}^{(a)} + K_{66}^{(b)} + K_{33}^{(c)}\right)U_{m+2} + K_{61}^{(b)}U_{m+3} \\ & + K_{62}^{(b)}U_{m+4} + K_{63}^{(b)}U_{m+5} + K_{34}^{(c)}U_{m+6} + K_{35}^{(c)}U_{m+7} \\ & + K_{36}^{(c)}U_{m+8} \end{aligned} \tag{7.55}$$

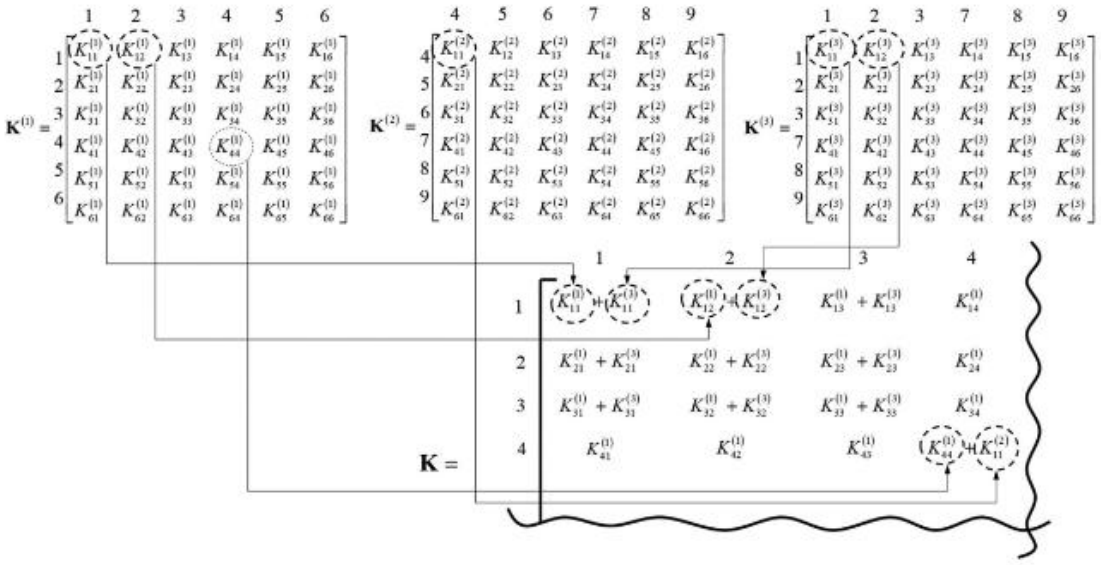


Gambar 7.12 Kondisi Kesetimbangan Simpul k.

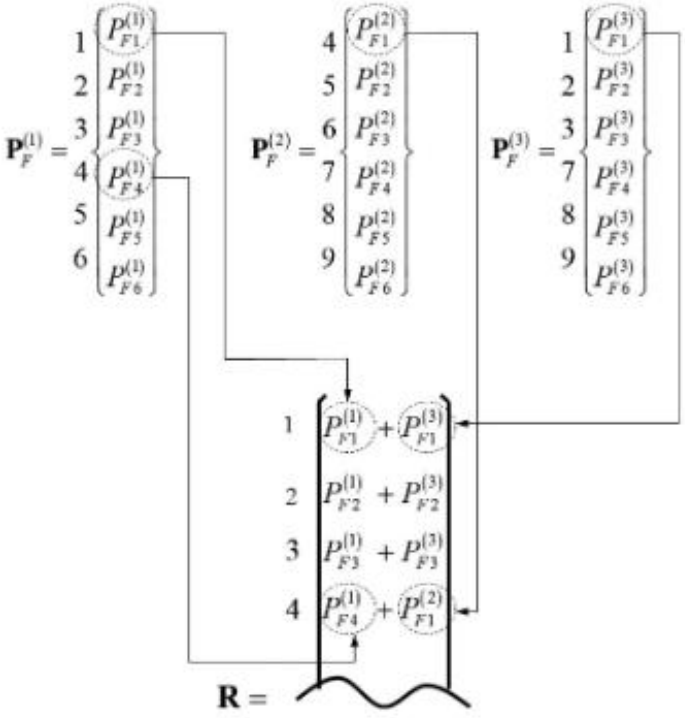
Dari Pers. (7.53), (7.54), dan (7.55), dapat disimpulkan bahwa:

$$
\begin{array}{lll}
K_{(m)(1)} = 0 & K_{(m+1)(1)} = 0 & K_{(m+2)(1)} = 0 \\
K_{(m)(2)} = 0 & K_{(m+1)(2)} = 0 & K_{(m+2)(2)} = 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
K_{(m)(m-3)} = K_{41}^{(a)} & K_{(m+1)(m-3)} = K_{51}^{(a)} & K_{(m+2)(m-3)} = K_{61}^{(a)} \\
K_{(m)(m-2)} = K_{42}^{(a)} & K_{(m+1)(m-2)} = K_{52}^{(a)} & K_{(m+2)(m-2)} = K_{62}^{(a)} \\
K_{(m)(m-1)} = K_{43}^{(a)} & K_{(m+1)(m-1)} = K_{53}^{(a)} & K_{(m+2)(m-1)} = K_{63}^{(a)} \\
K_{(m)(m)} = K_{44}^{(a)} + K_{44}^{(b)} + K_{11}^{(c)} & K_{(m+1)(m)} = K_{54}^{(a)} + K_{54}^{(b)} + K_{21}^{(c)} & K_{(m+2)(m)} = K_{64}^{(a)} + K_{64}^{(b)} + K_{31}^{(c)} \\
K_{(m)(m+1)} = K_{45}^{(a)} + K_{45}^{(b)} + K_{12}^{(c)} & K_{(m+1)(m+1)} = K_{55}^{(a)} + K_{55}^{(b)} + K_{22}^{(c)} & K_{(m+2)(m+1)} = K_{65}^{(a)} + K_{65}^{(b)} + K_{32}^{(c)} \\
K_{(m)(m+2)} = K_{46}^{(a)} + K_{46}^{(b)} + K_{13}^{(c)} & K_{(m+1)(m+2)} = K_{56}^{(a)} + K_{56}^{(b)} + K_{23}^{(c)} & K_{(m+2)(m+2)} = K_{66}^{(a)} + K_{66}^{(b)} + K_{33}^{(c)} \\
K_{(m)(m+3)} = K_{41}^{(b)} & K_{(m+1)(m+3)} = K_{51}^{(b)} & K_{(m+2)(m+3)} = K_{61}^{(b)} \\
K_{(m)(m+4)} = K_{42}^{(b)} & K_{(m+1)(m+4)} = K_{52}^{(b)} & K_{(m+2)(m+4)} = K_{62}^{(b)} \\
K_{(m)(m+5)} = K_{43}^{(b)} & K_{(m+1)(m+5)} = K_{53}^{(b)} & K_{(m+2)(m+5)} = K_{63}^{(b)} \\
K_{(m)(m+6)} = K_{14}^{(c)} & K_{(m+1)(m+6)} = K_{24}^{(c)} & K_{(m+2)(m+6)} = K_{34}^{(c)} \\
K_{(m)(m+7)} = K_{15}^{(c)} & K_{(m+1)(m+7)} = K_{25}^{(c)} & K_{(m+2)(m+7)} = K_{35}^{(c)} \\
K_{(m)(m+8)} = K_{16}^{(c)} & K_{(m+1)(m+8)} = K_{26}^{(c)} & K_{(m+2)(m+8)} = K_{36}^{(c)} \\
K_{(m)(n)} = 0 \quad [n = (m+9), (m+10), \dots] & K_{(m+1)(n)} = 0 \quad [n = (m+9), (m+10), \dots] & K_{(m+2)(n)} = 0 \quad [n = (m+9), (m+10), \dots]
\end{array}
$$

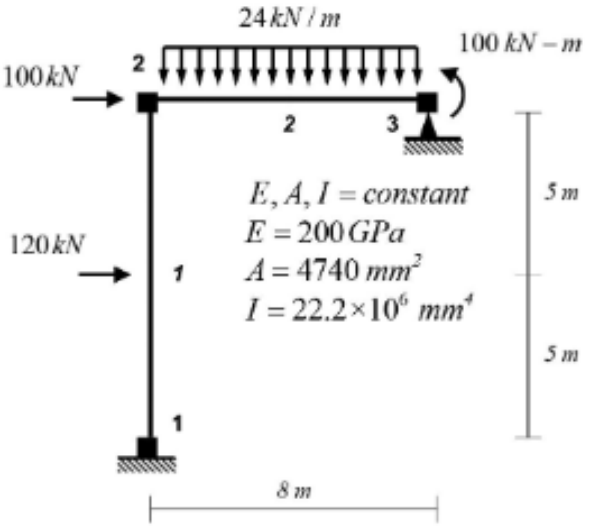
Jelas bahwa setiap koefisien kekakuan K_{ij} dari struktur sama dengan jumlah dari koefisien kekakuan dari elemen-elemen penyusunnya melalui vektor pemetaan elemen LM. Nanti akan ditunjukkan bahwa konsep perakitan ini dapat diterapkan secara efisien pada komputer. Sekarang, rangka prototipe pada Gambar 7.1 ditinjau kembali. Berdasarkan teknik nomor kode elemen (*member-code number*), representasi skematis dari proses perakitan matriks kekakuan struktur ditunjukkan pada Gambar 7.13. Demikian pula, representasi skematis dari proses perakitan vektor gaya simpul yang dikekang (*restrained nodal force vector*) ditunjukkan pada Gambar 7.14.



Gambar 7.13 Representasi skematis proses perakitan matriks kekakuan struktur berdasarkan nomor kode elemen.



Gambar 7.14 Representasi skematis proses perakitan vektor gaya simpul tertahan berdasarkan nomor kode elemen.

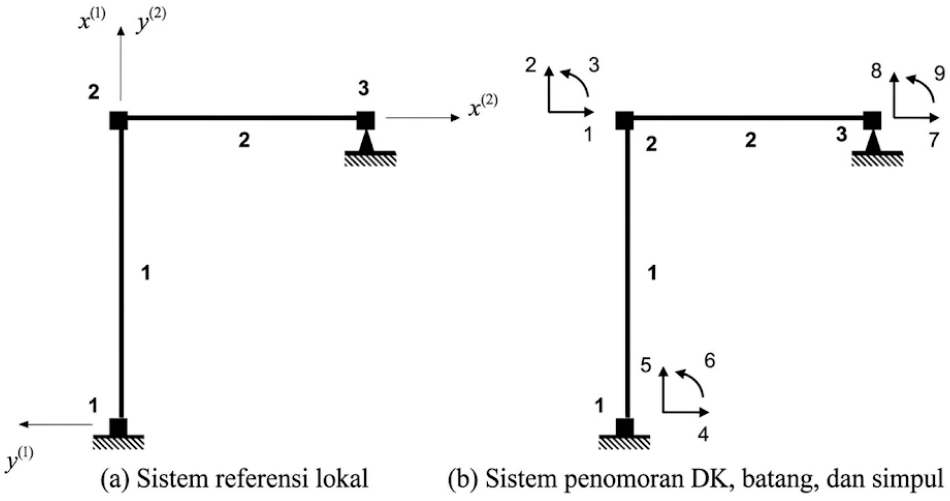


Gambar 7.15 Contoh 7.3

Contoh 7.3

Untuk rangka yang diperlihatkan pada Gambar 7.15, susunlah matriks kekakuan struktur dan vektor beban simpul ekuivalen menggunakan teknik kode elemen.

- **Penyelesaian**: Sistem acuan lokal serta sistem penomoran derajat kebebasan (DOF), elemen, dan simpul diperlihatkan pada Gambar 7.16. Matriks kekakuan global untuk setiap elemen adalah:



Gambar 7.16 Contoh 7.3 (Lanjutan).

Elemen 1:

Matriks kekakuan elemen global adalah:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 53.28 & 0 & -266.4 & -53.28 & 0 & -266.4 \\ 0 & 94800 & 0 & 0 & -94800 & 0 \\ -266.4 & 0 & 1776 & 266.4 & 0 & 888 \\ -53.28 & 0 & 266.4 & 53.28 & 0 & 266.4 \\ 0 & -94800 & 0 & 0 & 94800 & 0 \\ -266.4 & 0 & 888 & 266.4 & 0 & 1776 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Setelah memperhitungkan kontribusi elemen 1, matriks kekakuan strukturalnya adalah:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 53.28 & 0 & 266.4 & -53.28 & 0 & 266.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 94800 & 0 & 0 & -94800 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 266.4 & 0 & 1776 & -266.4 & 0 & 888 & 0 & 0 & 0 \\ -53.28 & 0 & -266.4 & 53.28 & 0 & -266.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -94800 & 0 & 0 & 94800 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 266.4 & 0 & 888 & -266.4 & 0 & 1776 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elemen 2:

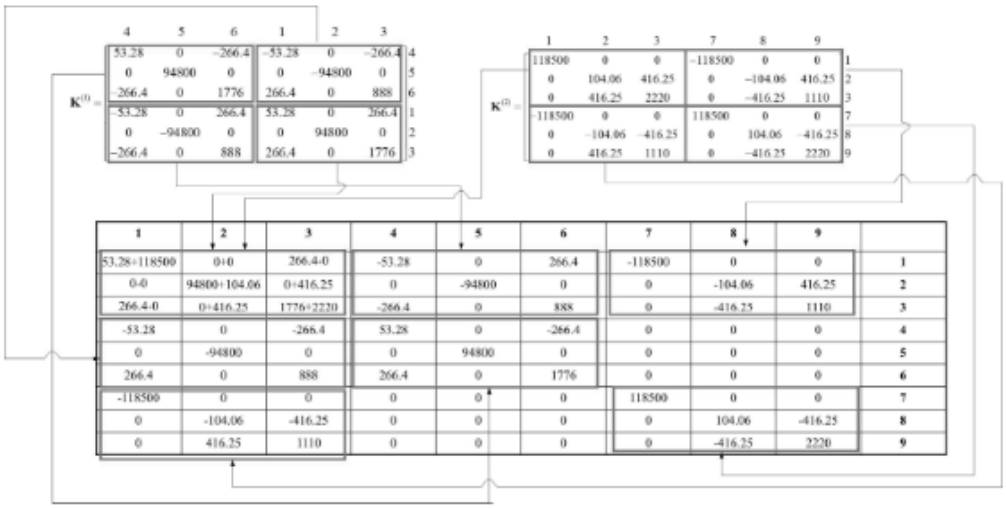
Matriks kekakuan elemen global adalah:

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 118500 & 0 & 0 & -118500 & 0 & 0 \\ 0 & 104.06 & 416.25 & 0 & -104.06 & 416.25 \\ 0 & 416.25 & 2220 & 266.4 & -416.25 & 1110 \\ -118500 & 0 & 0 & 118500 & 0 & 0 \\ 0 & -104.06 & -416.25 & 0 & 104.06 & -416.25 \\ 0 & 416.25 & 1110 & 0 & -416.25 & 2220 \end{bmatrix}$$

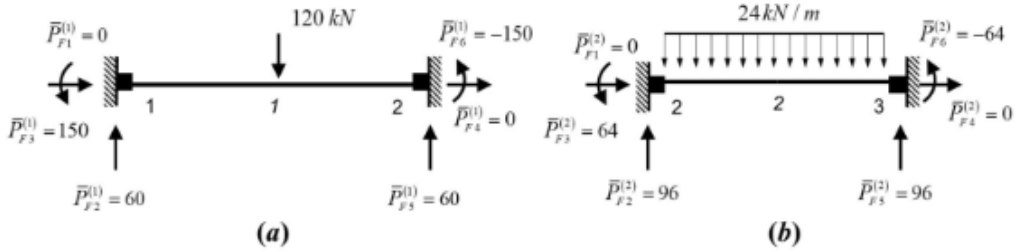
Setelah memperhitungkan kontribusi elemen 2, matriks kekakuan struktur adalah:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 118500 + 53.28 & 0 & 266.4 & -53.28 & 0 & 266.4 & -118500 & 0 & 0 \\ 0 & 94800 + 104.06 & 416.25 & 0 & -94800 & 0 & 0 & -104.06 & -416.25 \\ 266.4 & 416.25 & 1776 + 2220 & -266.4 & 0 & 888 & 0 & 416.25 & 1110 \\ -53.28 & 0 & -266.4 & 53.28 & 0 & -266.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -94800 & 0 & 0 & 94800 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 266.4 & 0 & 888 & -266.4 & 0 & 1776 & 0 & 0 & 0 \\ -118500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 118500 & 0 & 0 \\ 0 & -104.06 & 416.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 104.06 & -416.25 \\ 0 & -416.25 & 1110 & 0 & 0 & 0 & 0 & -416.25 & 2220 \end{bmatrix}$$

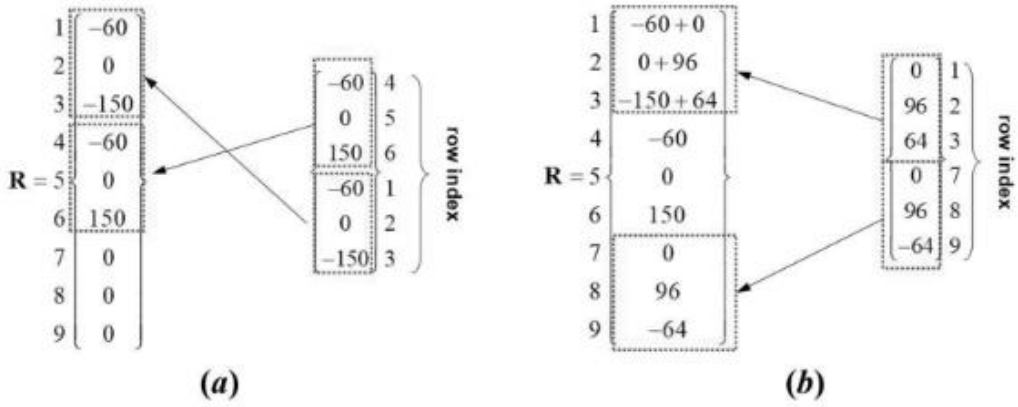
Representasi skematis dari teknik perakitan elemen-kode ditunjukkan pada Gambar 7.17. Vektor gaya ujung jepit untuk setiap elemen adalah: Elemen 1 (Gambar 7.18a):



Gambar 7.17 Contoh 7.3 (Lanjutan).



Gambar 7.18 Contoh 7.3 (Lanjutan).



Gambar 7.19 Contoh 7.3 (Lanjutan).

Vektor gaya ujung tetap lokal adalah:

$$\overline{\mathbf{P}}_F^{(1)} = [0 \quad 60 \quad 150 \quad 0 \quad 60 \quad -150]^T$$

Vektor gaya ujung jepit global adalah:

$$\mathbf{P}_F^{(1)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(1)\,T}\overline{\mathbf{P}}_F^{(1)} = \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ [-60 & 0 & 150 & -60 & 0 & -150]^T \end{matrix}$$

Setelah memperhitungkan kontribusi elemen 1, vektor gaya ujung jepit struktural ditunjukkan pada Gambar 7.19a.

Elemen 2 (Gambar 7.18b):

Vektor gaya ujung jepit lokal adalah:

$$\overline{\mathbf{P}}_F^{(2)} = [0 \quad 96 \quad 64 \quad 0 \quad 96 \quad -64]^T$$

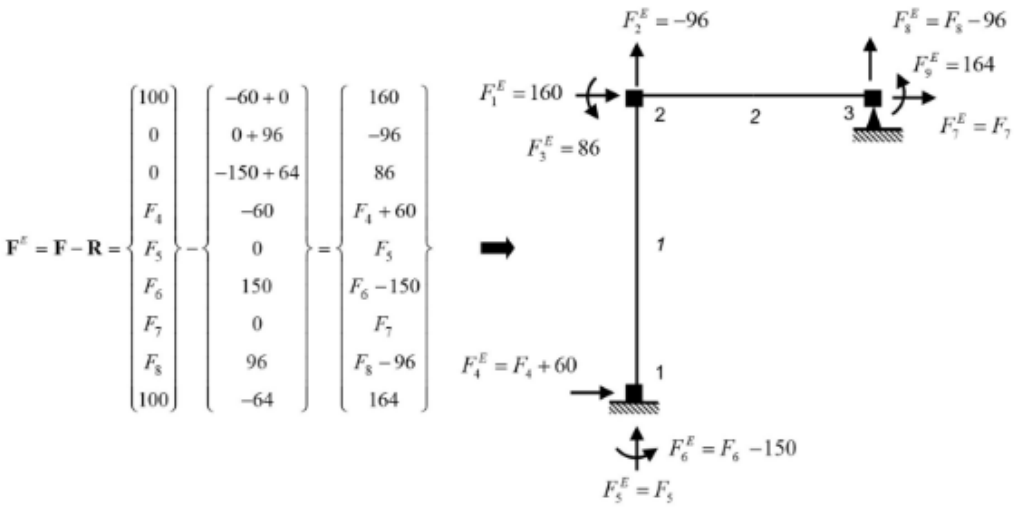
Vektor gaya ujung jepit global adalah:

$$\mathbf{P}_F^{(2)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(2)\,T}\overline{\mathbf{P}}_F^{(2)} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ [0 & 96 & 64 & 0 & 96 & -64]^T \end{matrix}$$

Setelah memperhitungkan kontribusi elemen 2, vektor gaya ujung jepit struktural ditunjukkan pada Gambar 7.19b. Vektor beban nodal adalah:

$$\mathbf{F} = [100 \quad 0 \quad 0 \quad F_4 \quad F_5 \quad F_6 \quad F_7 \quad F_8 \quad 100]^T$$

Vektor beban nodal ekuivalen ditunjukkan pada Gambar 7.20.



Gambar 7.20 Contoh 7.3 (Lanjutan).

7.5 PROSEDUR UMUM ANALISIS STRUKTUR DENGAN METODE KEKAKUAN LANGSUNG

Pada dua bagian sebelumnya, telah dipelajari dua skema perakitan untuk matriks kekakuan struktur dan vektor gaya nodal (*ekuivalen*). Hal-hal tersebut merupakan tugas utama dalam proses analisis. Dengan beberapa langkah tambahan, keseluruhan proses analisis

struktur rangka menggunakan metode kekakuan dapat diselesaikan. Prosedur umum analisis struktur dengan metode kekakuan langsung dapat diringkas sebagai berikut:

1. Siapkan model struktur dari struktur aktual. Biasanya, langkah ini mencakup:
   - Penomoran derajat kebebasan, titik simpul (*node*), dan elemen (*member*).
   - Penentuan sistem acuan lokal dan global.
   - Pendefinisian kondisi batas.
2. Hitung matriks kekakuan dan vektor beban ujung jepit (*fixed-end load*) baik dalam sistem koordinat global maupun lokal untuk setiap elemen.
3. Rakit matriks kekakuan elemen dan vektor beban ujung jepit elemen untuk memperoleh matriks kekakuan struktur dan vektor beban ujung jepit struktur.
4. Atur ulang baris dan kolom untuk mempartisi persamaan kekakuan struktur berdasarkan derajat kebebasan yang bebas dan yang terkekang.
5. Hitung perpindahan nodal bebas U_{free} menggunakan Persamaan (7.3).
6. Hitung perpindahan ujung elemen, gaya ujung elemen, dan reaksi tumpuan. Untuk setiap elemen, langkah-langkah berikut dilakukan.

I. Ambil perpindahan ujung elemen global $\mathbf{U}^{(k)}$ dari perpindahan nodal struktur $\mathbf{U}$ melalui vektor pemetaan elemen (nomor kode elemen). Langkah ini dapat dicapai dengan menggunakan hubungan pemetaan kompatibilitas elemen: $\mathbf{U}^{(k)} = \mathbf{G}^{(k)}\mathbf{U}$

II. Tentukan perpindahan ujung elemen lokal $\overline{\mathbf{U}}^{(k)}$ melalui hubungan transformasi koordinat: $\overline{\mathbf{U}}^{(k)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(k)}\mathbf{U}^{(k)}$

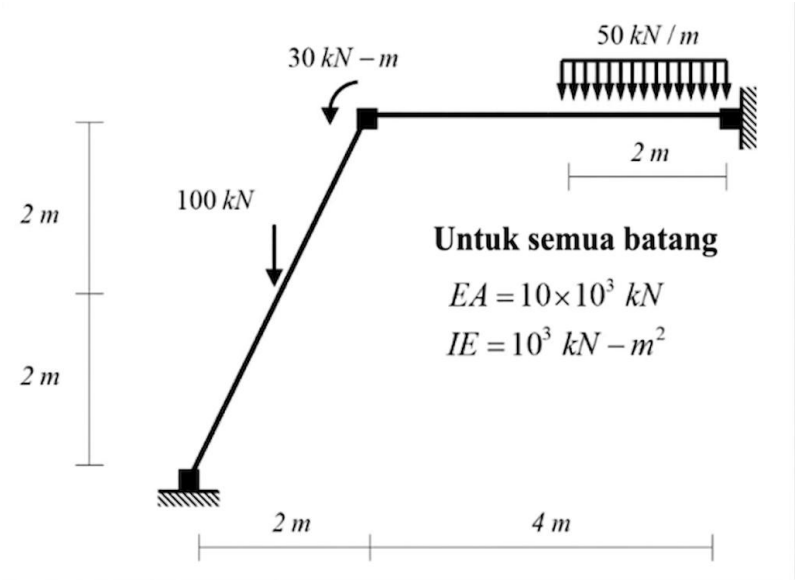
III. Dapatkan kembali gaya ujung elemen lokal $\overline{\mathbf{P}}^{(k)}$ dari persamaan kekakuan elemen: $\overline{\mathbf{P}}^{(k)} = \overline{\mathbf{K}}^{(k)}\overline{\mathbf{U}}^{(k)} + \overline{\mathbf{P}}_F^{(k)}$

IV. Tentukan gaya ujung elemen global $\mathbf{P}^{(k)}$ melalui hubungan transformasi koordinat: $\mathbf{P}^{(k)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(k)\,T}\overline{\mathbf{P}}^{(k)}$

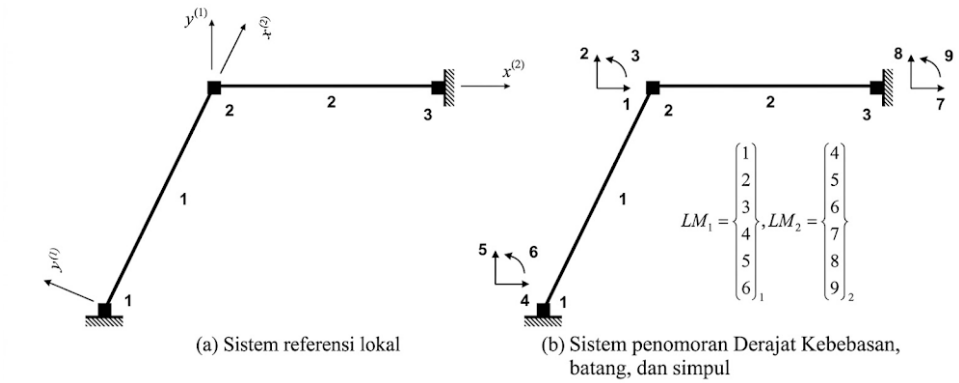
V. Jika elemen yang dipertimbangkan terikat pada tumpuan, gunakan vektor pemetaan untuk mengumpulkan komponen yang relevan dari $\mathbf{P}^{(k)}$ ke dalam vektor beban nodal ekuivalen $\mathbf{F}^E$.

Contoh 7.4

Tentukan perpindahan simpul, gaya ujung elemen, dan perpindahan ujung elemen pada rangka yang ditunjukkan dalam Gambar 7.21 akibat efek gabungan dari pembebanan dan penurunan (*settlement*) sebesar 0,05 m pada tumpuan sebelah kiri.



Gambar 7.21 Contoh 7.4.



Gambar 7.22 Contoh 7.4 (Lanjutan).

- **Penyelesaian**: Sistem acuan lokal serta sistem penomoran derajat kebebasan (DOF), elemen, dan titik simpul ditunjukkan pada Gambar 7.22. Matriks kekakuan lokal dan global untuk setiap elemen adalah:

Elemen 1:

$$\overline{\mathbf{K}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2236.1 & 0 & 0 & -2236.1 & 0 & 0 \\ 0 & 134.2 & 300 & 0 & -134.2 & 300 \\ 0 & 300 & 894.3 & 0 & -300 & 447.2 \\ -2236.1 & 0 & 0 & 2236.1 & 0 & 0 \\ 0 & -134.2 & -300 & 0 & 134.2 & -300 \\ 0 & 300 & 447.2 & 0 & -300 & 894.3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(1)\,T}\overline{\mathbf{K}}^{(1)}\mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(1)} = \begin{bmatrix} 554.5 & 840.8 & -268.3 & -554.5 & -840.8 & -268.3 \\ 840.8 & 1815.7 & 134.2 & -840.8 & -1815.7 & 134.2 \\ -268.3 & 134.2 & 894.4 & 268.3 & -134.2 & 447.2 \\ -554.5 & -840.8 & 268.3 & 554.5 & 840.8 & 268.3 \\ -840.8 & -1815.7 & -134.2 & 840.8 & 1815.7 & -134.2 \\ -268.3 & 134.2 & 447.2 & 268.3 & -134.2 & 894.4 \end{bmatrix}$$

Elemen 2:

$$\overline{\mathbf{K}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2500 & 0 & 0 & -2500 & 0 & 0 \\ 0 & 187.5 & 375 & 0 & -187.5 & 375 \\ 0 & 375 & 1000 & 0 & -375 & 500 \\ -2500 & 0 & 0 & 2500 & 0 & 0 \\ 0 & -187.5 & -375 & 0 & 187.5 & -375 \\ 0 & 375 & 500 & 0 & -375 & 1000 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}^{(2)} = \boldsymbol{\Gamma}_{ROT}^{(2)\,T}\overline{\boldsymbol{K}}^{(2)}\boldsymbol{\Gamma}_{ROT}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2500 & 0 & 0 & -2500 & 0 & 0 \\ 0 & 187.5 & 375 & 0 & -187.5 & 375 \\ 0 & 375 & 1000 & 0 & -375 & 500 \\ -2500 & 0 & 0 & 2500 & 0 & 0 \\ 0 & -187.5 & -375 & 0 & 187.5 & -375 \\ 0 & 375 & 500 & 0 & -375 & 1000 \end{bmatrix}$$

Vektor beban ujung jepit lokal dan global untuk setiap elemen adalah: Elemen 1 (Gambar 7.23a):
Vektor beban ujung jepit lokal:

$$\overline{\mathbf{P}}_F^{(1)} = [44.72 \quad 22.36 \quad 25 \quad 44.72 \quad 22.36 \quad -25]^T$$

Vektor beban ujung tetap global:

$$\mathbf{P}_F^{(1)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(1)\,T}\overline{\mathbf{P}}_F^{(1)} = [0 \quad 50 \quad 25 \quad 0 \quad 50 \quad -25]^T$$

Elemen 2 (Gambar 7.23b):
Vektor beban ujung jepit lokal:

$$\overline{\mathbf{P}}_F^{(2)} = [0 \quad 18.75 \quad 20.83 \quad 0 \quad 81.25 \quad -45.83]^T$$

Vektor beban ujung tetap global:

$$\mathbf{P}_F^{(2)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(2)\,T}\overline{\mathbf{P}}_F^{(2)} = [0 \quad 18.75 \quad 20.83 \quad 0 \quad 81.25 \quad -45.83]^T$$

Melalui teknik kode elemen, matriks kekakuan struktural disusun sebagai berikut:

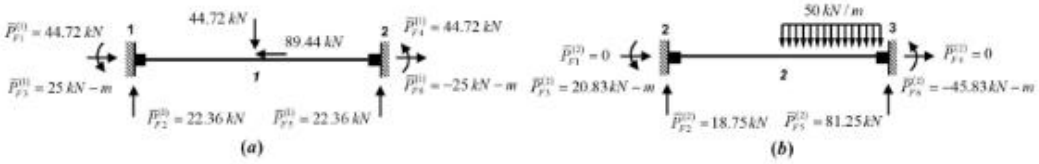
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fc} \\ \mathbf{K}_{cf} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix}$$

Dimana

$$\mathbf{K}_{ff} = \begin{bmatrix} 3054.5 & 840.8 & 268.3 \\ 840.8 & 2003.2 & 240.8 \\ 268.3 & 240.8 & 1894.4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{fc} = \mathbf{K}_{cf}^{T} = \begin{bmatrix} -554.5 & -840.8 & 268.3 & -2500 & 0 & 0 \\ -840.8 & -1815.7 & -134.2 & 0 & -187.5 & 375 \\ -268.3 & 134.2 & 447.2 & 0 & -375 & 500 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{cc} = \begin{bmatrix} 554.5 & 840.8 & -268.3 & 0 & 0 & 0 \\ 840.8 & 1815.7 & 134.2 & 0 & 0 & 0 \\ -268.3 & 134.2 & 894.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 187.5 & -375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -375 & 1000 \end{bmatrix}$$



Gambar 7.23 Contoh 7.4 (Lanjutan).

Vektor beban ujung jepit struktural adalah:

$$\mathbf{R} = [0 \quad 68.75 \quad -4.17 \quad 0 \quad 50 \quad 25 \quad 0 \quad 81.25 \quad -45.83]^{T}$$

Vektor beban nodal yang diterapkan adalah:

$$\mathbf{F} = [0 \quad 0 \quad 30 \quad F_4 \quad F_5 \quad F_6 \quad F_7 \quad F_8 \quad F_9]^{T}$$

Vektor beban nodal ekuivalen adalah:

$$\mathbf{F}^{E} = [0 \quad -68.75 \quad 34.17 \quad F_4 \quad F_5 - 50 \quad F_6 - 25 \quad F_7 \quad F_8 - 81.25 \quad F_9 + 45.83]^{T}$$

Pada contoh ini, tumpuan kiri mengalami penurunan sebesar 0,05 m. Oleh karena itu, derajat kebebasan perpindahan yang terkekang adalah:

$$\mathbf{U}_{constr} = [0 \quad -0.05 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{T}$$

Persamaan kekakuan yang terkait dengan derajat kebebasan bebas adalah:

$$\mathbf{F}_{free}^{E} - \mathbf{K}_{fc}\mathbf{U}_{constr} = \mathbf{K}_{ff}\mathbf{U}_{free}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -68.75 \\ 34.17 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 42.04 \\ 90.79 \\ -6.71 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -42.04 \\ -159.54 \\ 40.88 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3054.5 & 840.8 & 268.3 \\ 840.8 & 2003.2 & 240.8 \\ 268.3 & 240.8 & 1894.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{free} = [U_1 \quad U_2 \quad U_3]^T = [0.007272\ \text{m} \quad -0.08648\ \text{m} \quad 0.03154\ \text{rad}]^T$$

Gaya ujung anggota dan perpindahan ujung anggota untuk masing-masing anggota adalah:
Eemen 1:
Perpindahan ujung elemen global $\mathbf{U}^{(1)}$ adalah:

$$LM_1 = \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}_1 \Longrightarrow \begin{Bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ U_4^{(1)} \\ U_5^{(1)} \\ U_6^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.05\ \text{m} \\ 0 \\ 0.007272\ \text{m} \\ -0.08648\ \text{m} \\ 0.03154\ \text{rad} \end{bmatrix}$$

Perpindahan ujung elemen lokal $\mathbf{U}^{(1)}$ adalah:

$$\overline{\mathbf{U}}^{(1)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(1)}\mathbf{U}^{(1)} = [-0.04472\ \text{m} \quad -0.02236\ \text{m} \quad 0 \quad -0.07409\ \text{m} \quad -0.04518\ \text{m} \quad 0.03154\ \text{rad}]^T$$

Gaya-gaya ujung elemen lokal $\mathbf{P}^{(1)}$adalah:

$$\overline{\mathbf{P}}^{(1)} = \overline{\mathbf{K}}^{(1)}\overline{\mathbf{U}}^{(1)} + \overline{\mathbf{P}}_F^{(1)} = [110.41\ \text{kN} \quad 34.88\ \text{kN} \quad 45.95\ \text{kN-m} \quad -20.97\ \text{kN} \quad 9.81\ \text{kN} \quad 10.06\ \text{kN-m}]^T$$

Gaya ujung anggota global $\mathbf{P}^{(1)}$ adalah:

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(1)\,T}\overline{\mathbf{P}}^{(1)} = [18.18\ \text{kN} \quad 114.35\ \text{kN} \quad 45.95\ \text{kN-m} \quad -18.18\ \text{kN} \quad -14.36\ \text{kN} \quad 10.06\ \text{kN-m}]^T$$

Elemen 2:
Perpindahan ujung anggota global $\mathbf{U}^{(2)}$adalah:

$$LM_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{Bmatrix}_2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \\ U_4^{(2)} \\ U_5^{(2)} \\ U_6^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.007272 \text{ m} \\ -0.08648 \text{ m} \\ 0.03154 \text{ rad} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Perpindahan ujung elemen lokal $\mathbf{U}^{(2)}$adalah:

$$\overline{\mathbf{U}}^{(2)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(2)}\mathbf{U}^{(2)} = [0.007272 \text{ m} \quad -0.08648 \text{ m} \quad 0.03154 \text{ rad} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Gaya ujung anggota lokal $\mathbf{P}^{(2)}$ adalah:

$$\overline{\mathbf{P}}^{(2)} = \overline{\mathbf{K}}^{(2)}\overline{\mathbf{U}}^{(2)} + \overline{\mathbf{P}}_F^{(2)} = [18.18 \text{ kN} \quad 14.36 \text{ kN} \quad 19.94 \text{ kN-m} \quad -18.18 \text{ kN} \quad 85.64 \text{ kN} \quad -62.49 \text{ kN-m}]^T$$

Gaya ujung anggota global $\mathbf{P}^{(2)}$adalah:

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(2)\,T}\overline{\mathbf{P}}^{(2)} = [18.18 \text{ kN} \quad 14.36 \text{ kN} \quad 19.94 \text{ kN-m} \quad -18.18 \text{ kN} \quad 85.64 \text{ kN} \quad -62.49 \text{ kN-m}]^T$$

Dalam masalah ini, pengaruh penurunan tumpuan kiri dapat pula diperhitungkan ke dalam vektor gaya ujung jepit elemen sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 7.24. Vektor beban ujung jepit lokal akibat penurunan tumpuan kiri:

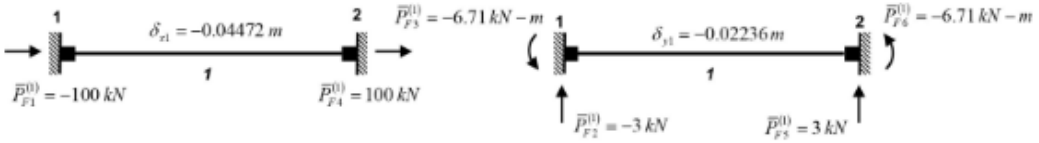
$$\overline{\mathbf{P}}_F^{(1)} = [-100 \quad -3 \quad -6.71 \quad 100 \quad 3 \quad -6.71]^T$$

Vektor beban ujung-tetap global akibat penurunan tumpuan kiri:

$$\mathbf{P}_F^{(1)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(1)\,T}\overline{\mathbf{P}}_F^{(1)} = [-42.04 \quad -90.78 \quad -6.71 \quad 42.04 \quad 90.78 \quad -6.71]^T$$

Vektor gaya jepit global akibat penurunan tumpuan kiri ini dijumlahkan dengan vektor gaya akibat beban titik yang diterapkan:

$$\mathbf{P}_F^{(1)} = [-42.04 \quad -40.78 \quad 18.29 \quad 42.04 \quad 140.78 \quad -31.71]^T$$



Gambar 7.24 Contoh 7.4 (Lanjutan).

Vektor beban ujung jepit struktural dimodifikasi sebagaimana mestinya:

$$\mathbf{R} = [42.04 \quad 159.54 \quad -10.88 \quad -42.04 \quad -40.78 \quad 18.29 \quad 0 \quad 81.25 \quad -45.83]^T$$

Vektor beban nodal ekivalennya adalah:

$$\mathbf{F}^E = [-42.04 \quad -159.54 \quad 40.88 \quad F_4 + 42.04 \quad F_5 + 40.78 \quad F_6 - 18.29 \quad F_7 \quad F_8 - 81.25 \quad F_9 + 45.83]^T$$

Karena efek penurunan tumpuan sebelah kiri telah dimasukkan ke dalam vektor gaya ujung jepit, derajat kebebasan perpindahan yang dikekang memiliki nilai nol ($\mathbf{U}_{constr} = \mathbf{0}$). Persamaan kekakuan yang berkaitan dengan derajat kebebasan bebas adalah:

$$\mathbf{F}^E_{free} = \mathbf{K}_{ff}\mathbf{U}_{free}$$

$$\begin{Bmatrix} -42.04 \\ -159.54 \\ 40.88 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3054.5 & 840.8 & 268.3 \\ 840.8 & 2003.2 & 240.8 \\ 268.3 & 240.8 & 1894.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{free} = [U_1 \quad U_2 \quad U_3]^T = [0.007272 \text{ m} \quad -0.08648 \text{ m} \quad 0.03154 \text{ rad}]^T$$

Gaya ujung anggota dan perpindahan ujung anggota untuk setiap anggota adalah:
Anggota 1:
Perpindahan ujung anggota global $\overline{\mathbf{U}}^{(1)}$ adalah:

$$LM_1 = \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}_1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ U_4^{(1)} \\ U_5^{(1)} \\ U_6^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.007272\, m \\ -0.08648\, m \\ 0.03154\, rad \end{Bmatrix}$$

Pergeseran ujung anggota lokal $\overline{\mathbf{U}}^{(1)}$ adalah:

$$\overline{\mathbf{U}}^{(1)} = \mathbf{\Gamma}^{(1)}_{ROT}\mathbf{U}^{(1)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -0.07409\, m \quad -0.04518\, m \quad 0.03154\, rad]^T$$

Gaya ujung anggota lokal $\overline{\overline{\mathbf{P}}}^{(1)}$ adalah:

$$\overline{\overline{\mathbf{P}}}^{(1)} = \overline{\overline{\mathbf{K}}}^{(1)}\overline{\mathbf{U}}^{(1)} + \overline{\overline{\mathbf{P}}}_F^{(1)} = [110.41\, kN \quad 34.88\, kN \quad 45.95\, kN - m \quad -20.97\, kN \quad 9.81\, kN \quad 10.06\, kN - m]^T$$

Perlu dicatat bahwa vektor beban ujung tetap $\bar{\bar{\mathbf{P}}}_F^{(1)}$ memperhitungkan aksi mekanis dan aksi penurunan tumpuan.
Gaya ujung anggota global $\mathbf{P}^{(1)}$ adalah:

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{\Gamma}_{ROT}^{(1)\ T}\bar{\bar{\mathbf{P}}}^{(1)} = [18.18\ kN \quad 114.35\ kN \quad 45.95\ kN-m \quad -18.18\ kN \quad -14.36\ kN \quad 10.06\ kN-m]^T$$

Anggota 2:
Sejak vektor beban ujung tetap $\bar{\bar{\mathbf{P}}}_F^{(2)}$ sama seperti sebelumnya, tidak ada perubahan perhitungan untuk perpindahan ujung anggota dan gaya ujung anggota.

7.6 ELEMEN RANGKA DENGAN PELEPASAN GAYA UJUNG

Sejauh ini, dua jenis elemen rangka bidang standar telah dibahas dalam buku teks ini: yaitu elemen batang (*bar*) dan elemen rangka (*frame*). Elemen batang digunakan dalam analisis struktur rangka batang (*truss*) dan hanya mampu menahan gaya aksial. Elemen rangka digunakan dalam analisis struktur rangka di mana semua titik buhul bersifat kaku, dan kedua ujung setiap elemen rangka terhubung secara kaku ke titik-titik buhul tersebut. Bagian ini membahas kasus di mana terdapat elemen rangka tertentu dengan pelepasan gaya (diskontinuitas perpindahan) dalam struktur rangka, sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 7.25. Jenis-jenis umum perangkat pelepasan gaya disimbolkan dan ditampilkan pada Gambar 7.26. Istilah "pelepasan gaya" menyiratkan bahwa aksi gaya tertentu tidak dapat diteruskan melalui perangkat pelepasan gaya tersebut. Artinya, perangkat pada Gambar 7.26a, b, dan c masing-masing tidak dapat meneruskan gaya aksial (*thrust*), gaya geser, dan momen. Ketidakmampuan meneruskan aksi gaya ini mengakibatkan diskontinuitas pada perpindahan yang bersesuaian (perpindahan aksial, perpindahan transversal, dan rotasi).

Bagian ini berfokus pada pengembangan matriks kekakuan elemen rangka dengan tiga jenis pelepasan gaya ujung, yaitu pelepasan gaya aksial, pelepasan gaya geser, dan pelepasan momen. Hal ini dapat dicapai dengan memodifikasi matriks kekakuan elemen yang telah dikembangkan sebelumnya.

Elemen Batang dengan Pelepasan Gaya Aksial Ujung

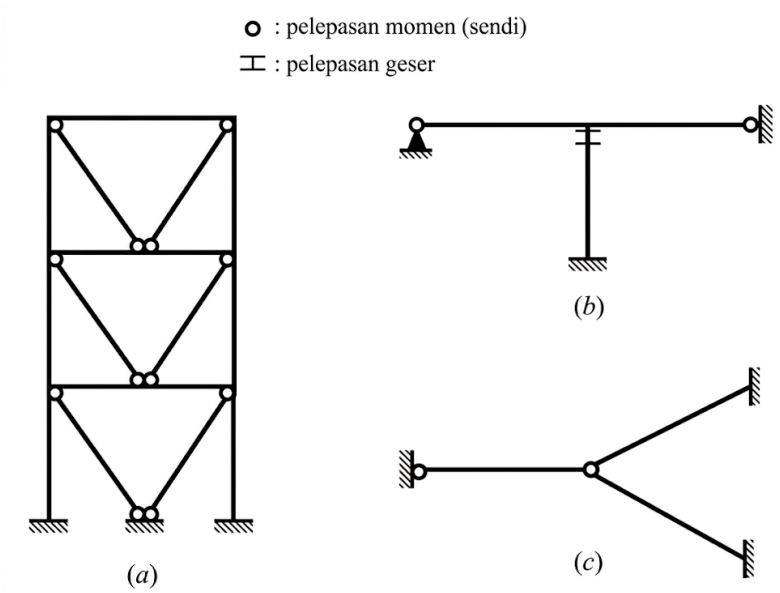
Pertama, elemen batang dengan pelepasan gaya aksial pada ujung kiri yang ditunjukkan pada Gambar 7.27a akan ditinjau. Tanpa adanya pelepasan gaya aksial ujung, persamaan kekakuan elemen batang dinyatakan secara eksplisit sebagai berikut:

$$\bar{P}_1 = \frac{EA}{L}\bar{U}_1 - \frac{EA}{L}\bar{U}_4 + \bar{P}_{F1} \tag{7.56}$$

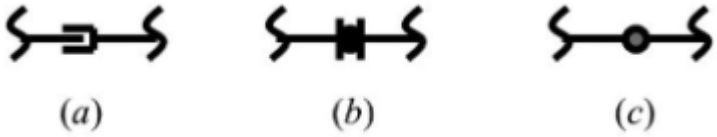
$$\bar{P}_4 = -\frac{EA}{L}\bar{U}_1 + \frac{EA}{L}\bar{U}_4 + \bar{P}_{F4} \tag{7.57}$$

Ketika ujung i dari elemen batang terhubung ke sambungan ujung kiri oleh perangkat pelepas dorong (*thrust-release device*), sangat jelas bahwa gaya ujungnya $\bar{P}_1$ harus bernilai nol. Dengan memasukkan kondisi gaya ujung kiri nol ($\bar{P}_1 = 0$) ke dalam Persamaan (7.56), didapatkan:

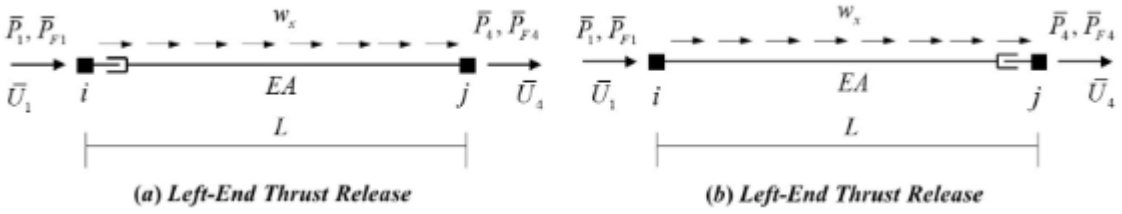
$$\bar{U}_1 = \bar{U}_4 - \frac{\bar{P}_{F1} L}{EA} \tag{7.58}$$



Gambar 7.25 Elemen rangka dengan pelepasan gaya ujung.



Gambar 7.26 Pelepasan gaya: (a) Pelepasan gaya aksial; (b) Pelepasan gaya geser; (c) Pelepasan momen.



Gambar 7.27 Elemen batang dengan pelepasan gaya aksial ujung.

Dengan menyubstitusikan Pers. (7.58) ke dalam Pers. (7.57), diperoleh:

$$\bar{P}_4 = \bar{P}_{F1} + \bar{P}_{F4} \tag{7.59}$$

Persamaan (7.59) mengimplikasikan bahwa matriks kekakuan elemen batang dengan pelepasan gaya aksial (*thrust release*) pada ujung kiri bernilai nol. Kesimpulan serupa dapat ditarik untuk batang dengan pelepasan gaya aksial pada ujung kanan seperti pada Gambar 7.27b.

Elemen Rangka Dengan Pelepasan Gaya Geser Pada Ujung

Pertama, ditinjau elemen rangka dengan pelepasan gaya geser pada ujung kiri seperti yang ditunjukkan pada Gambar 7.28a. Tanpa adanya pelepasan gaya ujung, persamaan kekakuan elemen rangka dinyatakan secara eksplisit sebagai berikut:

$$\bar{P}_2 = 12\frac{IE}{L^3}\bar{U}_2 + 6\frac{IE}{L^2}\bar{U}_3 - 12\frac{IE}{L^3}\bar{U}_5 + 6\frac{IE}{L^2}\bar{U}_6 + \bar{P}_{F2} \tag{7.60}$$

$$\bar{P}_3 = 6\frac{IE}{L^2}\bar{U}_2 + 4\frac{IE}{L}\bar{U}_3 - 6\frac{IE}{L^2}\bar{U}_5 + 2\frac{IE}{L}\bar{U}_6 + \bar{P}_{F3} \tag{7.61}$$

$$\bar{P}_4 = -\frac{EA}{L}\bar{U}_1 + \frac{EA}{L}\bar{U}_4 + \bar{P}_{F4} \tag{7.57}$$

$$\bar{P}_5 = -12\frac{IE}{L^3}\bar{U}_2 - 6\frac{IE}{L^2}\bar{U}_3 + 12\frac{IE}{L^3}\bar{U}_5 - 6\frac{IE}{L^2}\bar{U}_6 + \bar{P}_{F5} \tag{7.62}$$

$$\bar{P}_6 = 6\frac{IE}{L^2}\bar{U}_2 + 2\frac{IE}{L}\bar{U}_3 - 6\frac{IE}{L^2}\bar{U}_5 + 4\frac{IE}{L}\bar{U}_6 + \bar{P}_{F6} \tag{7.63}$$

Ketika ujung i dari elemen rangka terhubung ke sambungan ujung kiri oleh perangkat pelepas geser (*shear-release device*), sangat jelas bahwa gaya ujungnya $\bar{P}_2$ harus bernilai nol. Dengan memasukkan kondisi gaya ujung kiri nol ($\bar{P}_2 = 0$) ke dalam Persamaan (7.60), didapatkan:

$$\bar{U}_2 = -\frac{L^3\bar{P}_{F2} - 12IE\bar{U}_5 + 6IEL(\bar{U}_3 + \bar{U}_6)}{12IE} \tag{7.64}$$

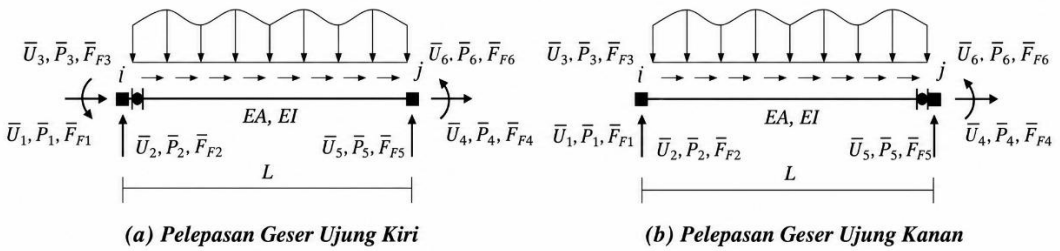
Hubungan kinematik ini menyiratkan bahwa perpindahan transversal ujung kiri $\bar{U}_2$ bukan lagi merupakan derajat kebebasan independen, melainkan bergantung pada derajat kebebasan perpindahan lainnya ($\bar{U}_3$, $\bar{U}_5$, dan $\bar{U}_6$). Dengan menggunakan hubungan kinematik pada Persamaan (7.64), Persamaan (7.61), (7.62), dan (7.63) ditulis ulang menjadi:

$$\bar{P}_3 = \frac{IE}{L}\bar{U}_3 - \frac{IE}{L}\bar{U}_6 + \bar{P}_{F3} - \frac{\bar{P}_{F2}L}{2} \tag{7.65}$$

$$\overline{P}_5 = \overline{P}_{F2} + \overline{P}_{F5} \tag{7.66}$$

$$\overline{P}_6 = -\frac{IE}{L}\overline{U}_3 + \frac{IE}{L}\overline{U}_6 + \overline{P}_{F6} - \frac{\overline{P}_{F2}L}{2} \tag{7.67}$$

Oleh karena itu, persamaan kekakuan untuk suatu rangka dengan pelepasan geser pada ujung kiri dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:



Gambar 7.28 Elemen rangka dengan pelepasan geser pada ujung.

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{IE}{L} & 0 & 0 & -\frac{IE}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{IE}{L} & 0 & 0 & \frac{IE}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{U}_3 \\ \bar{U}_4 \\ \bar{U}_5 \\ \bar{U}_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{P}_{F1} \\ 0 \\ \bar{P}_{F3} - \frac{\bar{P}_{F2}L}{2} \\ \bar{P}_{F4} \\ \bar{P}_{F2} + \bar{P}_{F5} \\ \bar{P}_{F6} - \frac{\bar{P}_{F2}L}{2} \end{Bmatrix} \text{ atau } \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{U}} + \bar{\mathbf{P}}^F \quad (7.68)$$

Elemen rangka dengan pelepasan geser ujung kanan yang ditunjukkan pada Gambar 7.28 b kemudian dipertimbangkan. Ketika ujung *j* dari elemen rangka terhubung ke sambungan ujung kanan oleh perangkat pelepas geser, sudah jelas bahwa gaya ujungnya $\bar{P}_5$ harus bernilai nol. Dengan memasukkan kondisi gaya ujung kanan nol ($\bar{P}_5 = 0$) ke dalam Persamaan (7.62), didapatkan:

$$\bar{U}_5 = -\frac{L^3\bar{P}_{F5} - 12IE\bar{U}_2 + 6IEL(\bar{U}_3 + \bar{U}_6)}{12IE} \quad (7.69)$$

Demikian pula, hubungan kinematik ini menyiratkan bahwa perpindahan melintang ujung kanan $\bar{U}_5$ bukan lagi derajat kebebasan yang independen, melainkan sekarang bergantung pada derajat kebebasan perpindahan lainnya ($\bar{U}_2$, $\bar{U}_5$, dan $\bar{U}_6$). Dengan hubungan kinematik dari Persamaan (7.69), Persamaan (7.61), (7.62), dan (7.63) ditulis ulang sebagai:

$$\bar{P}_2 = \bar{P}_{F2} + \bar{P}_{F5} \quad (7.70)$$

$$\bar{P}_3 = \frac{IE}{L}\bar{U}_3 - \frac{IE}{L}\bar{U}_6 + \bar{P}_{F3} + \frac{\bar{P}_{F5}L}{2} \quad (7.71)$$

$$\bar{P}_6 = -\frac{IE}{L}\bar{U}_3 + \frac{IE}{L}\bar{U}_6 + \bar{P}_{F6} + \frac{\bar{P}_{F5}L}{2} \tag{7.72}$$

Oleh karena itu, persamaan kekakuan untuk suatu rangka dengan pelepasan geser pada ujung kanan dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{IE}{L} & 0 & 0 & -\frac{IE}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{IE}{L} & 0 & 0 & \frac{IE}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{U}_3 \\ \bar{U}_4 \\ \bar{U}_5 \\ \bar{U}_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{P}_{F1} \\ \bar{P}_{F2} + \bar{P}_{F5} \\ \bar{P}_{F3} + \frac{\bar{P}_{F5}L}{2} \\ \bar{P}_{F4} \\ 0 \\ \bar{P}_{F6} + \frac{\bar{P}_{F5}L}{2} \end{Bmatrix} \text{ atau } \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{U}} + \bar{\mathbf{P}}^F \tag{7.73}$$

Elemen Rangka dengan Pelepasan Momen Ujung

Elemen rangka dengan pelepasan momen ujung kiri (sendi) yang ditunjukkan pada Gambar 7.29a dipertimbangkan terlebih dahulu. Ketika ujung i dari elemen rangka terhubung ke sambungan ujung kiri oleh perangkat pelepas momen, sangat jelas bahwa momen ujungnya $\bar{P}_3$ harus bernilai nol. Dengan memasukkan kondisi momen ujung kiri nol ($\bar{P}_3 = 0$) ke dalam Persamaan (7.61), didapatkan:

$$\bar{U}_3 = -\frac{L^2\bar{P}_{F3} + 6IE\bar{U}_2 - 6IE\bar{U}_5 + 2IEL\bar{U}_6}{4IEL} \tag{7.74}$$

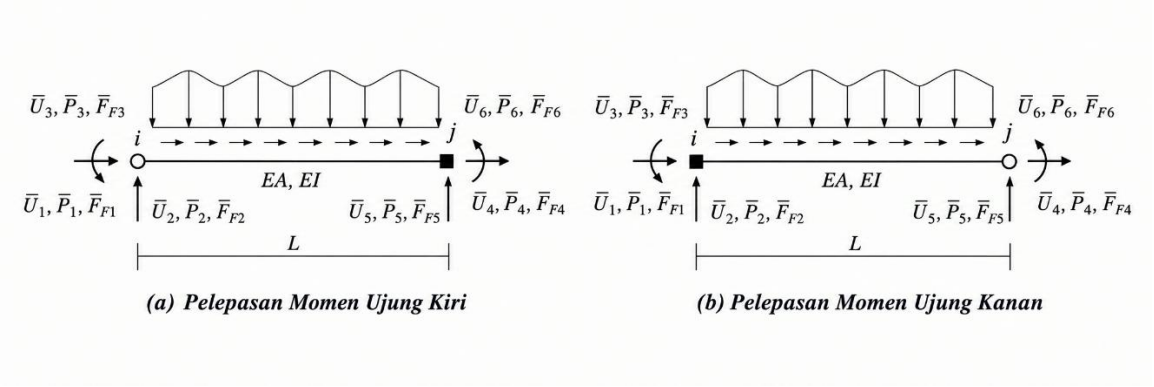
Hubungan kinematis ini menyiratkan bahwa rotasi ujung kiri $\bar{U}_3$ bukan lagi derajat kebebasan yang independen, melainkan sekarang bergantung pada derajat kebebasan perpindahan lainnya ($\bar{U}_2$, $\bar{U}_5$, dan $\bar{U}_6$). Dengan hubungan kinematis pada Persamaan (7.74), Persamaan (7.60), (7.62), dan (7.63) ditulis ulang sebagai:

$$\bar{P}_2 = 3\frac{IE}{L^3}\bar{U}_2 - 3\frac{IE}{L^3}\bar{U}_5 + 3\frac{IE}{L^2}\bar{U}_6 + \bar{P}_{F2} - \frac{3\bar{P}_{F3}}{2L} \tag{7.75}$$

$$\bar{P}_5 = -3\frac{IE}{L^3}\bar{U}_2 + 3\frac{IE}{L^3}\bar{U}_5 - 3\frac{IE}{L^2}\bar{U}_6 + \bar{P}_{F5} + \frac{3\bar{P}_{F3}}{2L} \tag{7.76}$$

$$\bar{P}_6 = 3\frac{IE}{L^2}\bar{U}_2 - 3\frac{IE}{L^2}\bar{U}_5 + 3\frac{IE}{L}\bar{U}_6 + \bar{P}_{F6} - \frac{\bar{P}_{F3}}{2} \tag{7.77}$$

Oleh karena itu, persamaan kekakuan untuk elemen rangka dengan pelepasan momen pada ujung kiri dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:



Gambar 7.29 Elemen Rangka dengan Pelepasan Momen Ujung.

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \end{Bmatrix} = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3I}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3I}{L^2} & \frac{3I}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3I}{L^2} & 0 & 0 & \frac{3I}{L^2} & -\frac{3I}{L} \\ 0 & \frac{3I}{L} & 0 & 0 & -\frac{3I}{L} & 3I \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{U}_3 \\ \bar{U}_4 \\ \bar{U}_5 \\ \bar{U}_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{P}_{F1} \\ \bar{P}_{F2} - \frac{3\bar{P}_{F3}}{2L} \\ 0 \\ \bar{P}_{F4} \\ \bar{P}_{F5} + \frac{3\bar{P}_{F3}}{2L} \\ \bar{P}_{F6} - \frac{\bar{P}_{F3}}{2} \end{Bmatrix} \text{ atau } \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{U}} + \bar{\mathbf{P}}^F \quad (7.78)$$

Elemen rangka dengan pelepasan momen ujung kanan yang ditunjukkan pada Gambar 7.29 b kemudian dipertimbangkan. Ketika ujung *j* dari elemen rangka terhubung ke sambungan ujung kanan oleh perangkat pelepas momen, sudah jelas bahwa momen ujungnya $\bar{P}_6$ harus bernilai nol. Dengan memasukkan kondisi momen ujung kanan nol ($\bar{P}_6 = 0$) ke dalam Persamaan (7.63), didapatkan:

$$\bar{U}_6 = -\frac{L^2\bar{P}_{F6} + 6IE\bar{U}_2 - 6IE\bar{U}_5 + 2IEL\bar{U}_3}{4IEL} \quad (7.79)$$

Relasi kinematika ini menyiratkan bahwa rotasi ujung-kanan $\bar{U}_6$ bukan lagi derajat kebebasan yang independen, melainkan bergantung pada derajat kebebasan perpindahan lainnya ($\bar{U}_2$, $\bar{U}_3$, dan $\bar{U}_5$). Dengan relasi kinematika pada Persamaan (7.79), Persamaan (7.60), (7.61), dan (7.62) dituliskan kembali sebagai:

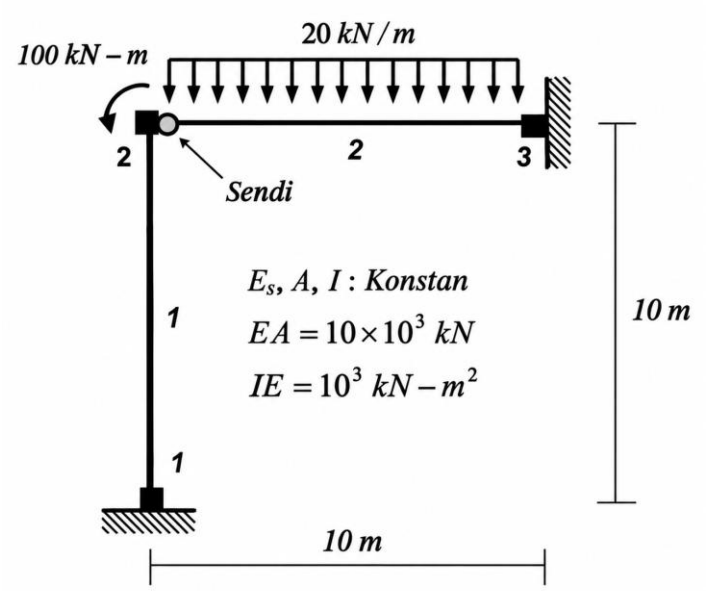
$$\bar{P}_2 = 3\frac{IE}{L^3}\bar{U}_2 + 3\frac{IE}{L^2}\bar{U}_3 - 3\frac{IE}{L^3}\bar{U}_5 + \bar{P}_{F2} - \frac{3\bar{P}_{F6}}{2L} \quad (7.80)$$

$$\bar{P}_3 = 3\frac{IE}{L^2}\bar{U}_2 + 3\frac{IE}{L}\bar{U}_3 - 3\frac{IE}{L^2}\bar{U}_5 + \bar{P}_{F3} - \frac{\bar{P}_{F6}}{2} \quad (7.81)$$

$$\overline{P_5} = -3\frac{IE}{L^3}\overline{U_2} - 3\frac{IE}{L^2}\overline{U_3} + 3\frac{IE}{L^3}\overline{U_5} + \overline{P_{F5}} + \frac{3\overline{P_{F6}}}{2L} \tag{7.82}$$

Oleh karena itu, persamaan kekakuan untuk suatu rangka dengan pelepasan momen pada ujung kanan dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} \overline{P_1} \\ \overline{P_2} \\ \overline{P_3} \\ \overline{P_4} \\ \overline{P_5 P_6} \end{Bmatrix} = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3I}{L^2} & \frac{3I}{L} & 0 & -\frac{3I}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{3I}{L} & 3I & 0 & -\frac{3I}{L} & 0 \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3I}{L^2} & -\frac{3I}{L} & 0 & \frac{3I}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{U_1} \\ \overline{U_2} \\ \overline{U_3} \\ \overline{U_4} \\ \overline{U_5 U_6} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \overline{P_{F1}} \\ \overline{P_{F2}} - \frac{3\overline{P_{F6}}}{2L} \\ \overline{P_{F3}} - \frac{\overline{P_{F6}}}{2} \\ \overline{P_{F4}} \\ \overline{P_{F5}} + \frac{3\overline{P_{F6}}}{2L} 0 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad \bar{P} = \overline{K}\overline{U} + \overline{P^F} \tag{7.83}$$

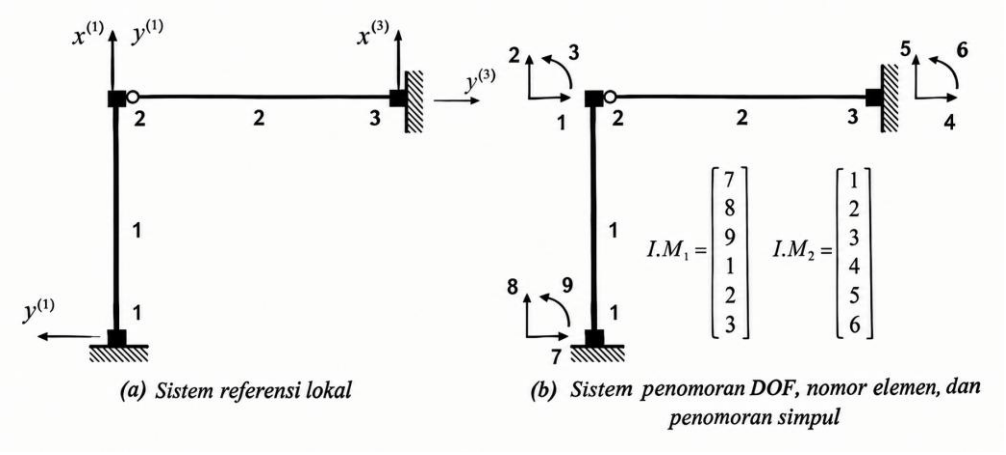


Gambar 7.30 Contoh 7.5.

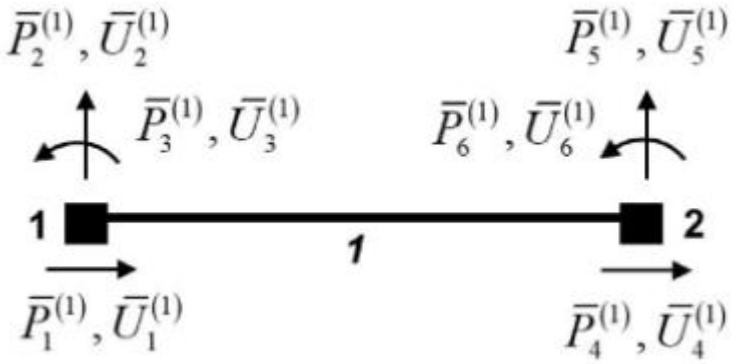
Contoh 7.5

Tentukan perpindahan titik simpul, gaya ujung batang, dan perpindahan ujung batang untuk rangka yang ditunjukkan pada Gambar 7.30.

- **Penyelesaian**: Sistem acuan lokal serta sistem penomoran derajat kebebasan (DOF), batang, dan titik simpul ditunjukkan pada Gambar 7.31.



Gambar 7.31 Contoh 7.5 (Lanjutan).



Gambar 7.32 Contoh 7.5 (Lanjutan).

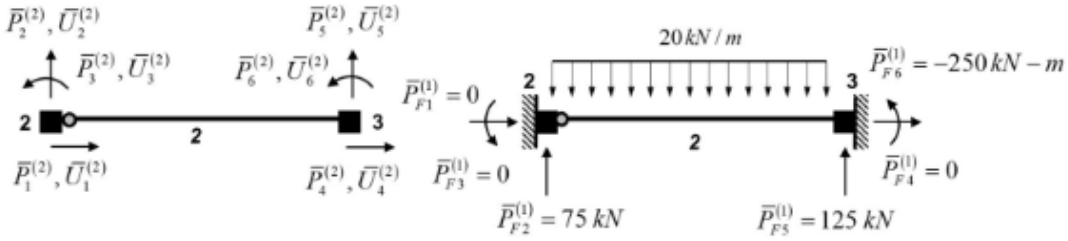
Matriks kekakuan elemen dan vektor beban ujung terjepit untuk setiap elemen adalah: Elemen 1 (Gambar 7.32):
Matriks kekakuan lokal:

$$\overline{K^{(1)}} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & -1000 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 60 & 0 & -12 & 60 \\ 0 & 60 & 400 & 0 & -60 & 200 \\ -1000 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -60 & 0 & 12 & -60 \\ 0 & 60 & 200 & 0 & -60 & 400 \end{bmatrix}$$

Matriks kekakuan global:

$$K^{(1)} = \Gamma_{ROT}^{(1)\,T} \overline{K^{(1)}} \Gamma_{ROT}^{(1)} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -60 & -12 & 0 & -60 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & -1000 & 0 \\ -60 & 0 & 400 & 60 & 0 & 200 \\ -12 & 0 & 60 & 12 & 0 & 60 \\ 0 & -1000 & 0 & 0 & 1000 & 0 \\ -60 & 0 & 200 & 60 & 0 & 400 \end{bmatrix}$$

Elemen 2 (Gambar 7.33): sendi di ujung kiri



Gambar 7.33 Contoh 7.5 (Lanjutan)

Matriks kekakuan lokal dan global:

$$K^{(2)} = \Gamma_{ROT}^{(2)T}\overline{K^{(2)}}\Gamma_{ROT}^{(2)} = \overline{K^{(2)}} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & -1000 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1000 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & -30 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & -30 & 300 \end{bmatrix}$$

Vektor gaya ujung-tetap global:

$$P_F^{(2)} = \Gamma_{ROT}^{(2)T}\overline{P_F^{(2)}} = [0 \quad 75 \quad 0 \quad 0 \quad 125 \quad -250]^T$$

Melalui teknik kode anggota, matriks kekakuan struktur dan vektor beban ujung jepit yang terkait dengan derajat kebebasan bebas adalah:

$$K_{ff} = \begin{bmatrix} 1012 & 0 & 60 \\ 0 & 1003 & 0 \\ 60 & 0 & 400 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R_{free} = [0 \quad 75 \quad 0]^T$$

Vektor beban nodal terapan yang terkait dengan derajat kebebasan bebas adalah:

$$F_{free} = [0 \quad 0 \quad 100]^T$$

Vektor beban nodal ekuivalen yang terkait dengan derajat kebebasan bebas adalah:

$$F_{free}^E = F_{free} - R_{free} = [0 \quad -75 \quad 100]^T$$

Persamaan kekakuan struktural yang bersesuaian dengan derajat kebebasan bebas adalah:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -75 \\ 100 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1012 & 0 & 60 \\ 0 & 1003 & 0 \\ 60 & 0 & 400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad \text{atau} \quad F_{free}^{E} = K_{ff} U_{free}$$

Perpindahan simpul bebas U_{free} ditentukan sebagai berikut:

$$U_{free} = \left[K_{ff}\right]^{-1} F_{free}^{E} = [-0.01496 \text{ m} \quad -0.07478 \text{ m} \quad 0.2522 \text{ rad}]^T$$

Proses pemulihan perpindahan ujung dan gaya ujung akan diperlihatkan untuk elemen 2. Berdasarkan vektor pemetaan lokal LM_2 (Gambar 7.31b), vektor perpindahan ujung elemen dalam koordinat global adalah:

$$U^{(2)} = [-0.01496 \text{ m} \quad -0.07478 \text{ m} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Vektor perpindahan ujung elemen lokal adalah:

$$\overline{U^{(2)}} = \Gamma_{ROT}^{(2)} U^{(2)} = [-0.01496 \text{ m} \quad -0.07478 \text{ m} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Vektor gaya ujung elemen lokal adalah:

$$\overline{P}^{(2)} = \overline{K}^{(2)} \overline{U}^{(2)} + \overline{P}_F^{(2)} = [-14.95\ kN \quad 74.78\ kN \quad 0 \quad 14.95\ kN \quad 125.22\ kN \quad -252.24\ kN \cdot m]^T$$

Vektor gaya ujung elemen global adalah:

$$P^{(2)} = \Gamma_{ROT}^{(2)\ T} \overline{P}^{(2)} = [-14.95\ kN \quad 74.78\ kN \quad 0 \quad 14.95\ kN \quad 125.22\ kN \quad -252.24\ kN \cdot m]^T$$

Perpindahan ujung dan gaya ujung pada elemen 1 dapat diperoleh dengan cara serupa.

BAB 8
METODE KEKAKUAN III ALGORITMA BERORIENTASI KOMPUTER

8.1 PROSEDUR KOMPUTASI ANALISIS STRUKTUR

Dalam bab ini, prosedur analisis struktur rangka dalam kerangka program analisis rangka (misalnya GRASP) disajikan dengan pendekatan terkomputerisasi. Terdapat beberapa aspek yang sama antara prosedur yang disajikan di sini dengan prosedur yang digunakan dalam program elemen hingga tujuan umum (misalnya ABAQUS) atau, secara lebih umum, dalam platform komputasi (misalnya FEAP). Pembahasan rinci mengenai struktur umum kerangka komputasi semacam itu berada di luar cakupan materi ini dan dapat dipelajari dalam kelas-kelas yang lebih lanjut dalam rangkaian mata kuliah rekayasa struktur sebagaimana dibahas pada Bab 1. Secara umum, terdapat empat langkah yang membentuk inti dari setiap prosedur komputasi struktur, dan langkah-langkah ini harus diterapkan dalam setiap program analisis struktur (elemen hingga) (Spacone):

- Mengumpulkan data masukan (misalnya koordinat titik simpul)
- Menyusun basis data yang memuat informasi konstan (misalnya matriks kekakuan elemen)
- Melakukan analisis (linear atau nonlinear / statis atau dinamis)
- Mengolah data keluaran (misalnya representasi grafis)

8.2 ALGORITMA UMUM

Algoritma umum untuk menerapkan metode kekakuan langsung dapat diringkas sebagai berikut:

Bagian Pendahuluan

1. Klasifikasikan jenis elemen yang digunakan untuk menganalisis struktur aktual (balok, rangka batang/truss, rangka kaku/frame, atau grid) dan tentukan:
   - Jumlah koordinat spasial (1D, 2D, atau 3D).
   - Jumlah derajat kebebasan per titik simpul (lokal dan global).
   - Jumlah properti penampang dan material.
2. Tentukan sistem penomoran derajat kebebasan bebas dan terkekang.

Bagian Analisis

1. Untuk setiap elemen, tentukan besaran-besaran berikut:
   - Vektor pemetaan LM_i yang menghubungkan elemen dengan derajat kebebasan struktur dan sebaliknya.
   - Matriks kekakuan elemen lokal (matriks kekakuan lengkap $\overline{K}^{(i)}$ atau matriks kekakuan dasar $k^{(i)}$).
   - Sudut antara sistem acuan lokal dan global.
   - Matriks transformasi (misalnya $\Gamma_{ROT}^{(i)}$, $\Gamma_{RBM}^{(i)}$, dan $\Gamma_{REZ}^{(i)}$).

- ❖ Matriks kekakuan elemen dalam sistem acuan global (misalnya, $K^{(i)} = \Gamma^{(i)T}\overline{K}^{(i)}\Gamma^{(i)}$).

Vektor beban ujung tetap elemen$P_F^{(i)}$.

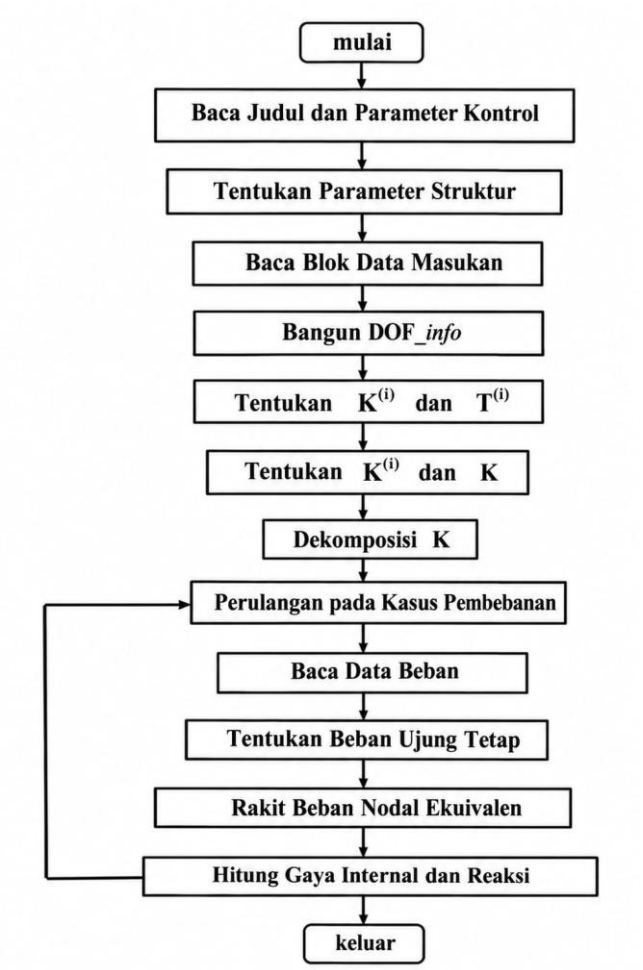
2. Susun matriks kekakuan struktur lengkap K.
3. Ekstrak K_{ff}, K_{fc}, K_{cf}, dan K_{cc} dari K.
4. Inverskan $\boldsymbol{K_{ff}}$ (atau dekomposisikan $\boldsymbol{K_{ff}}$ sebagai LL^T).
5. Susun vektor beban nodal ekuivalen F^E.
6. Tetapkan vektor perpindahan nodal terkekang Uconstr.
7. Tentukan perpindahan nodal bebas $\boldsymbol{U_{free}}$ dari $U_{free} = \left[K_{ff}\right]^{-1}\left(F_{free}^E - K_{fc}U_{constr}\right)$
8. Tentukan gaya reaksi menggunakan persamaan $F_{constr} = K_{cf}U_{free} + K_{cc}U_{constr} + R_{constr}$ Sebagai alternatif, gaya reaksi dapat ditentukan melalui persamaan kekakuan elemen yang terhubung ke tumpuan.
9. Untuk setiap elemen, transformasikan perpindahan ujungnya dari koordinat global ke lokal $\overline{U}^{(i)} = \Gamma_{ROT}^{(i)}U^{(i)}$ dan tentukan gaya ujungnya menggunakan persamaan kekakuan elemen $\overline{P}^{(i)} = \overline{K}^{(i)}\overline{U}^{(i)} + \overline{P}_F^{(i)}$

8.3 DIAGRAM ALIR PROGRAM KOMPUTER

Mengacu pada diagram alir program di Gambar 8.1, rutin utama harus melaksanakan tugas-tugas berikut:

1. Membaca (data masukan):
   a) Judul pekerjaan, nama analis, dll.
   b) Parameter kendali.
      1. Jumlah titik simpul (*node*).
      2. Jumlah elemen (*member*).
      3. Jenis struktur.
      4. Jumlah variasi properti elemen.
      5. Jumlah kasus pembebanan.
2. Menentukan parameter struktural
   a) Jumlah koordinat spasial untuk struktur.
   b) Jumlah derajat kebebasan per titik simpul (lokal dan global).
3. Melakukan perulangan pada semua elemen dan menghitung matriks kekakuan elemen lokal serta matriks transformasi.
4. Menginisialisasi matriks kekakuan global menjadi nol.
5. Melakukan perulangan pada semua elemen dan untuk setiap elemen
   a) Mengambil matriks kekakuan elemen lokal dan mentransformasikannya dari sistem lokal ke global.
   b) Menyusun vektor pemetaan lokal.
   c) Merakit matriks kekakuan struktur.
6. Melakukan dekomposisi matriks kekakuan global (misalnya, dekomposisi Cholesky).
7. Untuk setiap kasus pembebanan

a) Melakukan perulangan pada elemen terkait dan menyusun vektor beban ujung jepit (*fixed-end load*) elemen.
b) Merakit vektor beban.
c) Menentukan perpindahan titik simpul.



Gambar 8.1 Bagan Alir Program.

d) Lakukan perulangan untuk semua elemen dan bagi setiap elemen.
8. Tentukan perpindahan ujung (lokal dan global).
9. Tentukan gaya ujung (lokal dan global).

8.4 DATA MASUKAN

Secara umum, data masukan dasar untuk struktur rangka harus mencakup blok data berikut sebagaimana disarankan oleh Spacone:

- Geometri
- Elemen
- Material
- Kondisi Batas
- Beban Titik Simpul (Nodal)

- Beban Elemen
- Perpindahan Yang Diterapkan
- Tingkat Analisis

1. **Geometri**: blok data masukan ini biasanya memuat nomor titik simpul dan koordinat titik simpul dalam sistem acuan global.
2. **Elemen**: untuk rangka bidang (2D), blok data masukan ini biasanya memuat konektivitas elemen (dimulai dari titik simpul i dan berakhir di titik simpul j untuk setiap elemen), jenis elemen (batang, balok, dll.), dan set material.
3. **Material**: untuk setiap set material rangka 2D elastis linear, blok data masukan ini biasanya memuat modulus elastisitas E, modulus geser G, luas penampang A, dan momen inersia I.
4. **Kondisi Batas**: sekumpulan kondisi batas yang tepat harus disediakan untuk mencegah struktur membentuk mekanisme. Secara umum, struktur akan memiliki derajat kebebasan tak terkekang yang jauh lebih banyak daripada derajat kebebasan terkekang. Dengan demikian, blok data masukan ini biasanya hanya berisi informasi mengenai derajat kebebasan yang terkekang (kondisi batas).
5. **Beban Titik Simpul (Nodal)**: blok data masukan ini biasanya berisi informasi mengenai beban yang diterapkan pada titik simpul.
6. **Beban Elemen**: blok data masukan ini biasanya memuat informasi mengenai beban elemen yang bekerja pada elemen di antara titik-titik simpul.
7. **Perpindahan Yang Diterapkan**: ketika tumpuan mengalami perpindahan yang ditentukan sebelumnya (misalnya penurunan/*settlement*), blok data masukan ini berisi informasi mengenai perpindahan yang diketahui tersebut. Perpindahan yang ditentukan sebelumnya biasanya ditetapkan hanya pada derajat kebebasan yang terkekang.
8. **Tingkat Analisis**: blok data masukan ini berisi informasi mengenai bagaimana beban dan/atau perpindahan diterapkan serta bagaimana analisis dilakukan. Dalam buku teks ini, blok data masukan tersebut mungkin tidak diperlukan karena hanya analisis elastis linear yang ditinjau.

Basis Data Konstan

Array berikut digunakan untuk menampung informasi yang dihasilkan dari data masukan. Biasanya, informasi ini tidak berubah selama analisis dan hanya perlu disusun satu kali sebelum proses analisis dimulai. Informasi NODE: array NODE_*info* memuat koordinat (X, Y) untuk setiap node.

$$NODE_info = [Array\ with\ NODE\ data]_{\text{num_nodes}\times\text{num_coor}}$$

$$NODE_{info} = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ \vdots & \vdots \\ X_{num_nodes} & Y_{num_nodes} \end{bmatrix} \Rightarrow 2D$$

$$NODE_{info} = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{num_nodes} & Y_{num_nodes} & Z_{num_nodes} \end{bmatrix} \Rightarrow 3D$$

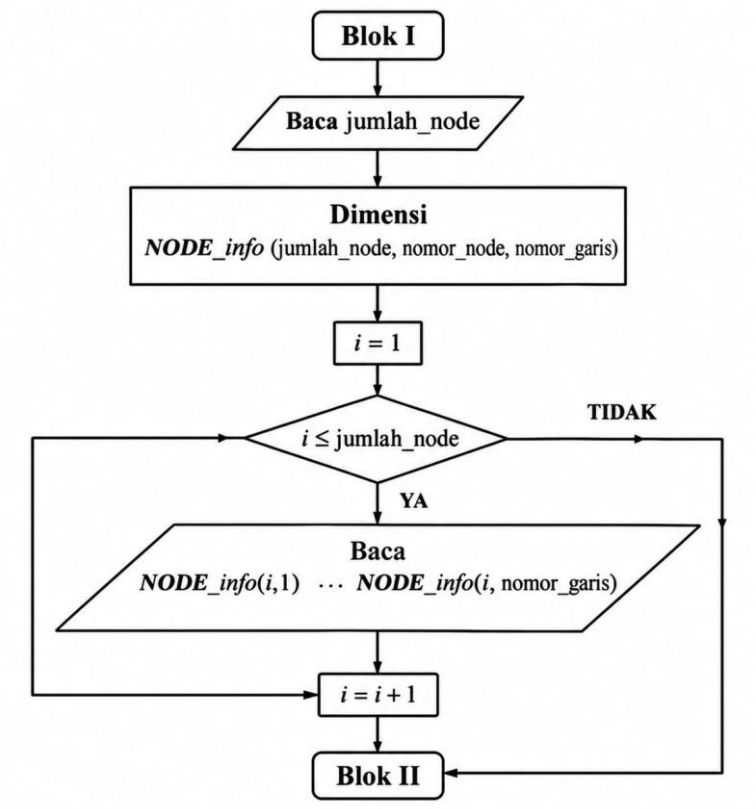
di mana num_nodes merepresentasikan jumlah node dalam suatu struktur dan num_coor merepresentasikan jumlah koordinat spasial. Gambar 8.2 menampilkan diagram alir untuk membaca dan menyimpan array data geometris NODE_info.

Informasi BATAS (*BOUNDARY*): akibat kondisi tumpuan, jumlah total derajat kebebasan bebas akan lebih kecil daripada jumlah total derajat kebebasan (*num_nodes × Node_DOF*). Seluruh informasi mengenai kondisi batas disimpan dalam array BOUN_*info*.

$$BOUN_info = [Array\ with\ Boundary\ Conditions]_{\text{num_nodes}\times\text{Node_DOF}}$$

di mana Node_DOF menyatakan nomor derajat kebebasan maksimum untuk setiap titik simpul. BOUN_info diinisialisasi ke nol pada awal tahap input. Biasanya, kode kekangan ditetapkan sebagai berikut:

$$BOUN_info(i_DOF, i_NODE) = \begin{cases} 0 & \text{jika } free \text{ DOF} \\ 1 & \text{jika } locked \text{ DOF} \end{cases}$$



Gambar 8.2 Diagram alir untuk membaca dan menyimpan data geometris blok NODE_info.

Setelah semua kondisi batas nodal dibaca, nomor persamaan diberikan secara bertahap, pertama-tama untuk semua derajat kebebasan bebas dengan tanda positif dan kemudian

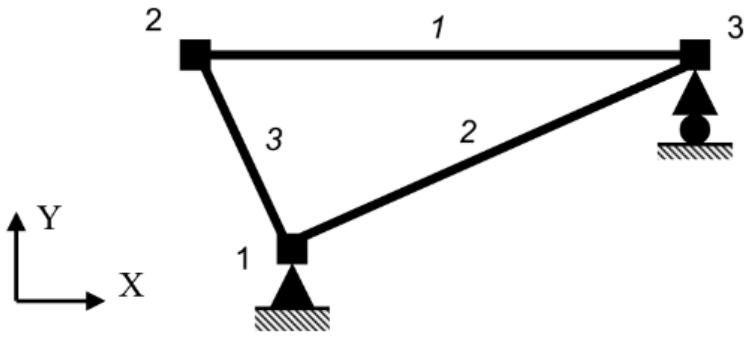
untuk semua derajat kebebasan terkekang dengan tanda negatif. Nomor derajat kebebasan positif maksimum menunjukkan ukuran matriks persegi (K_{ff}) yang perlu didekomposisi (misalnya Dekomposisi Cholesky). Perhatikan kerangka yang ditunjukkan pada Gambar 8.3. Array BOUN _ *info* yang sesuai adalah

$$DOF \rightarrow \quad 1 \quad 2 \quad 3$$
$$BOUN_{info} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 23 \end{Bmatrix} \leftarrow \text{Node}$$

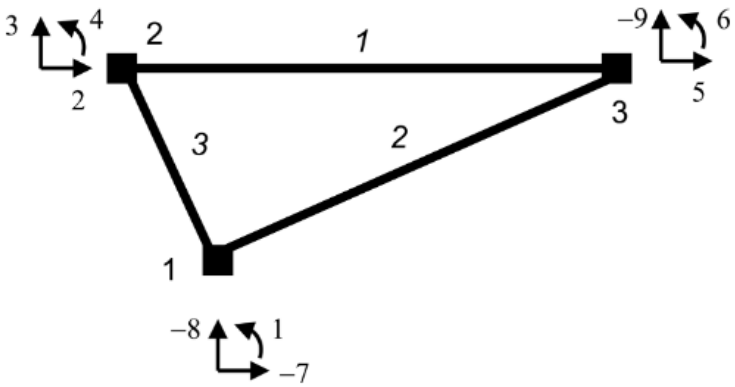
DOF_*info* yang terkait dengan BOUN_*info* adalah

$$DOF_{info} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & -9 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 23 \end{Bmatrix} \leftarrow \text{Node}$$

Sistem penomoran derajat kebebasan yang dihasilkan ditunjukkan pada Gambar 8.4.



Gambar 8.3 Contoh penyusunan array BOUN_*info*.



Gambar 8.4 Sistem penomoran derajat kebebasan yang dihasilkan.

Kode tumpuan untuk beberapa jenis tumpuan umum pada rangka bidang disajikan pada Gambar 8.5. Gambar 8.6 menampilkan diagram alir untuk membaca dan menyimpan array

data tumpuan `BOUN_*info*`. Informasi MATERIAL: array `MATE_*info*` menghimpun nilai E (atau G), A, dan I yang diberikan untuk setiap jenis material.

$$MATE_info = [Array\ with\ MATERIAL\ data]_{\text{num_mates}\times\text{mate_para}}$$

$$MATE_{info} = \begin{bmatrix} E_1 & A_1 \\ \vdots & \vdots \\ E_{num\ mates} & A_{num\ mates} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{2D \& 3D } Truss$$

$$MATE_{info} = \begin{bmatrix} E_1 & A_1 & I_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{num\ mates} & A_{num\ mates} & I_{num\ mates} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{2D Euler-Bernoulli Frame}$$

$$MATE_{info} = \begin{bmatrix} E_1 & A_1 & I_1 & G_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{num\ mates} & A_{num\ mates} & I_{num\ mates} & G_{nummates} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{2D Timoshenko Frame}$$

mana num_mates melambangkan jumlah set material dan mate_para melambangkan jumlah parameter set material. Gambar 8.7 menampilkan diagram alir untuk membaca dan menyimpan array data set material MATE_info.

Informasi MEMBER: array MEM_*info* memuat node awal i, node akhir j, jenis elemen (misalnya elemen Euler-Bernoulli, elemen Timoshenko, elemen batang, dll.), serta sifat-sifat material untuk setiap elemen.

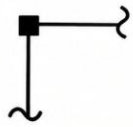
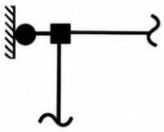
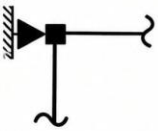
$$MEM_info = [Array\ with\ MEMBER\ data]_{\text{num_members}\times\text{member_para}}$$

$$MEM_{info} = \begin{bmatrix} node_i & node_j & mem_type_1 & mate_type_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ node_i_{num_members} & node_j_{num_members} & mem_type_{num_members} & mate_type_{num_members} \end{bmatrix}$$

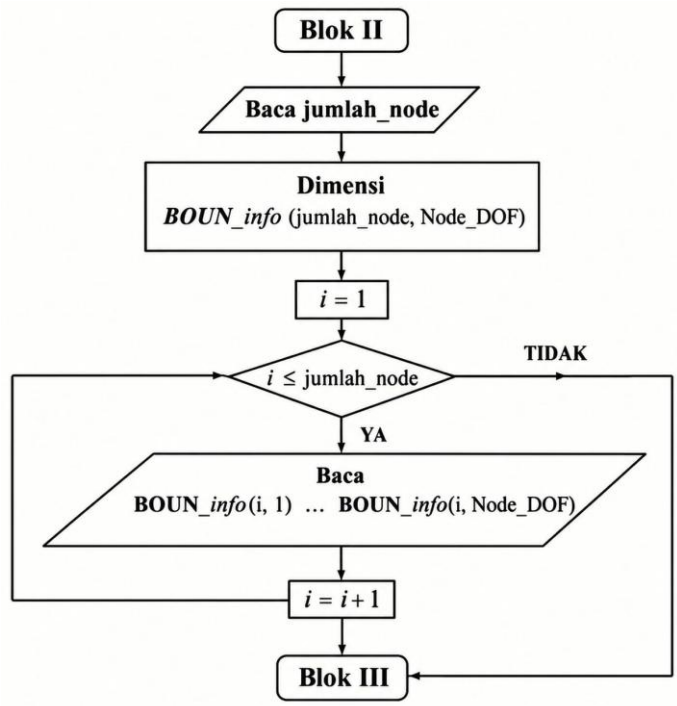
di mana `num_members` menyatakan jumlah elemen dalam struktur dan `member_para` menyatakan jumlah parameter elemen.

Gambar 8.8 menampilkan diagram alir untuk proses pembacaan dan penyimpanan data elemen ke dalam larik `MEM_*info*`. Informasi DOF: sangat penting untuk menyediakan jumlah serta informasi mengenai kondisi pengekangan (terkekang atau tidak terkekang) untuk setiap derajat kebebasan. Dalam bab ini, hal tersebut dilakukan dengan memberikan tanda (positif atau negatif) pada nomor derajat kebebasan. Umumnya, tanda positif menunjukkan derajat kebebasan yang tidak terkekang, sedangkan tanda negatif menunjukkan derajat kebebasan yang terkekang. Informasi penomoran derajat kebebasan ini disimpan dalam larik `DOF_*info*`.

$$DOF_info = [Array\ with\ DOF\ data]_{\text{num_nodes}\times\text{Node_DOF}}$$

Jenis Tumpuan	Tipe Dukungan	Kode Dukungan
Bebas		**0, 0, 0**
Rol		**1, 0, 0**
Engsel		**1, 1, 0**
Geser Lepas *(Colar)*		**1, 0, 1**
Tetap		**1, 1, 1**

Gambar 8.5 Kode Tumpuan untuk Rangka Bidang.



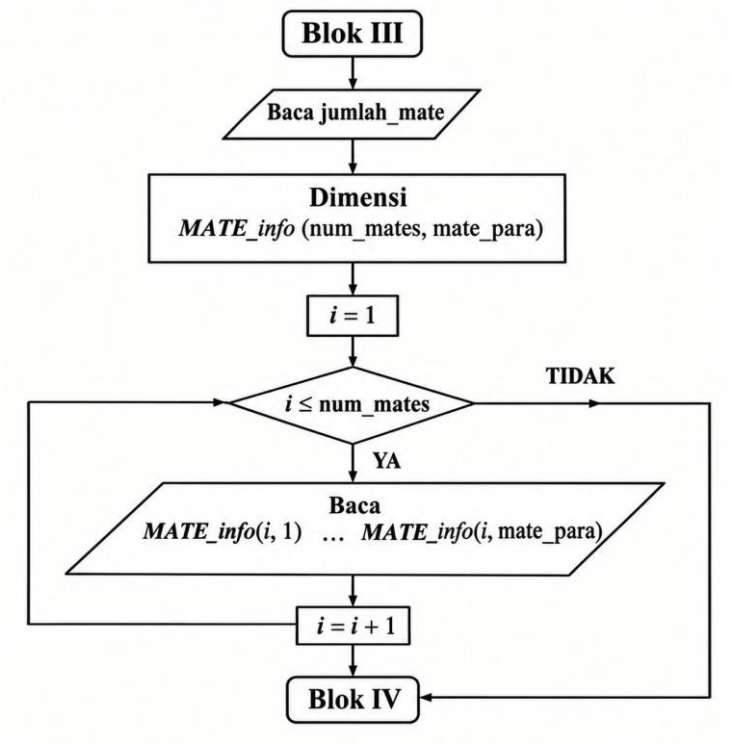
Gambar 8.6 Diagram alir untuk membaca dan menyimpan blok data pendukung BOUN_*info*.

$$DOF_{info} = \begin{bmatrix} DOF_{X_1} & DOF_{Y_1} \\ \vdots & \vdots \\ DOF_{X_{num\,nodes}} & DOF_{Y_{num\,nodes}} \end{bmatrix} \Rightarrow 2D\ Truss$$

$$DOF_{info} = \begin{bmatrix} DOF_{X_1} & DOF_{Y_1} & DOF_{\theta_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ DOF_{X_{num\,nodes}} & DOF_{Y_{num\,nodes}} & DOF_{\theta_{num\,nodes}} \end{bmatrix} \Rightarrow 2D\ Frame$$

Larik DOF_*info* disusun bersamaan dengan larik BOUN_*info* yang memuat informasi mengenai kondisi batas. Informasi Beban Nodal Yang Diterapkan: beban-beban nodal disimpan dalam satu larik acuan tunggal Nodal_Load_*info*.

$$NODAL_LOAD_info = [Array\ with\ APPLIED\ NODAL\ LOAD]_{\text{num_nodes}\times\text{Node_DOF}}$$

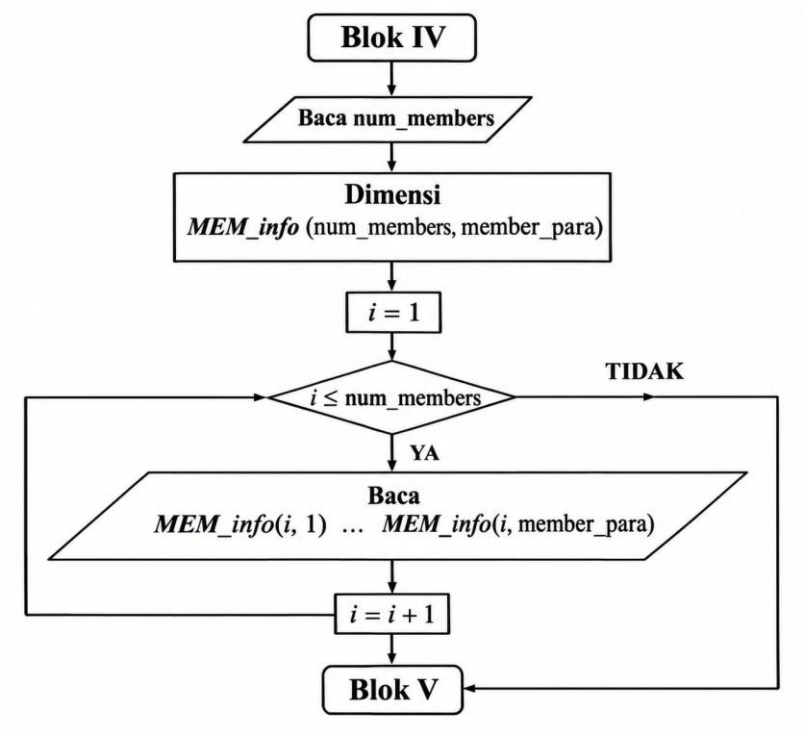


Gambar 8.7 Diagram alir untuk membaca dan menyimpan blok data material MATE_*info*.

Beban nodal yang diterapkan pada derajat kebebasan bebas diambil dari NODAL_LOAD_*info* dan dikumpulkan dalam vektor F_{free} sebagai berikut:

$$F_{free} = [APPLIED\ NODAL\ LOAD\ AT\ FREE\ DOF]_{\text{num_DOF_free}}$$

di mana num_DOF_free menyatakan jumlah derajat kebebasan bebas. Gambar 8.9 menampilkan diagram alir untuk membaca dan menyimpan larik data beban nodal NODAL_LOAD_*info*.



Gambar 8.8 Diagram alir untuk membaca dan menyimpan data elemen pada blok MEM_*info*.

Informasi beban elemen (*Applied Member Load*): beban elemen disimpan dalam satu larik referensi MEM_LOAD_*info*.

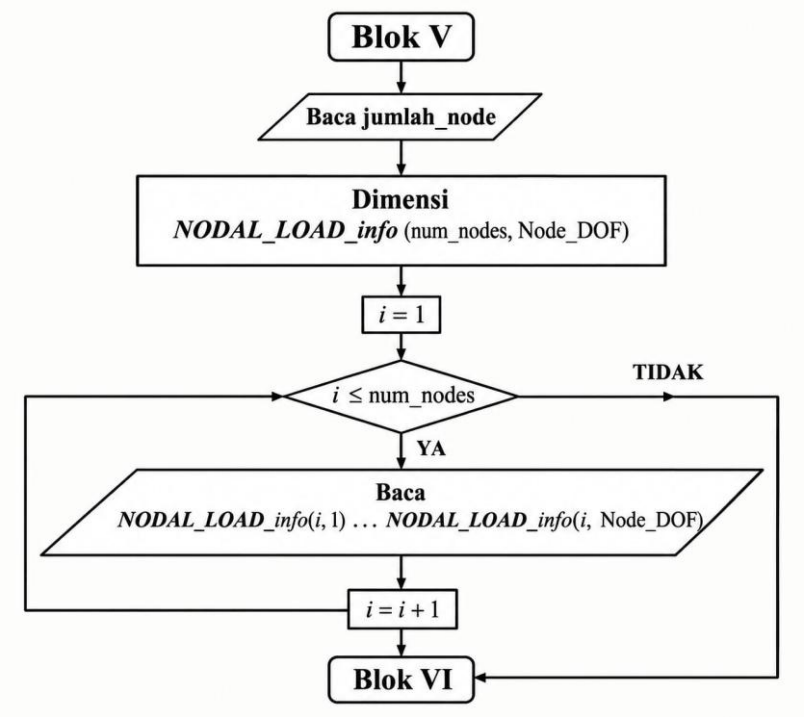
$$MEM_LOAD_info = [Array\ with\ MEMBER\ LOAD]_{\text{num_members}\times\text{ele_load_para}}$$

di mana mem_load_para menyatakan jumlah parameter beban anggota. Vektor beban ujung tetap disusun bersamaan dengan data beban batang dalam MEM_LOAD_*info* dan disimpan dalam vektor F^F_{free} dan F^F_{constr} sebagai berikut:

$$F^F_{free} = [FIXED - END\ NODAL\ LOAD\ AT\ FREE\ DOF]_{\text{num_DOF_free}}$$

$$F^F_{constr} = [FIXED - END\ NODAL\ LOAD\ AT\ CONSTRAINED\ DOF]_{\text{num_DOF_constr}}$$

di mana num_DOF_constr menyatakan jumlah derajat kebebasan yang dibatasi.

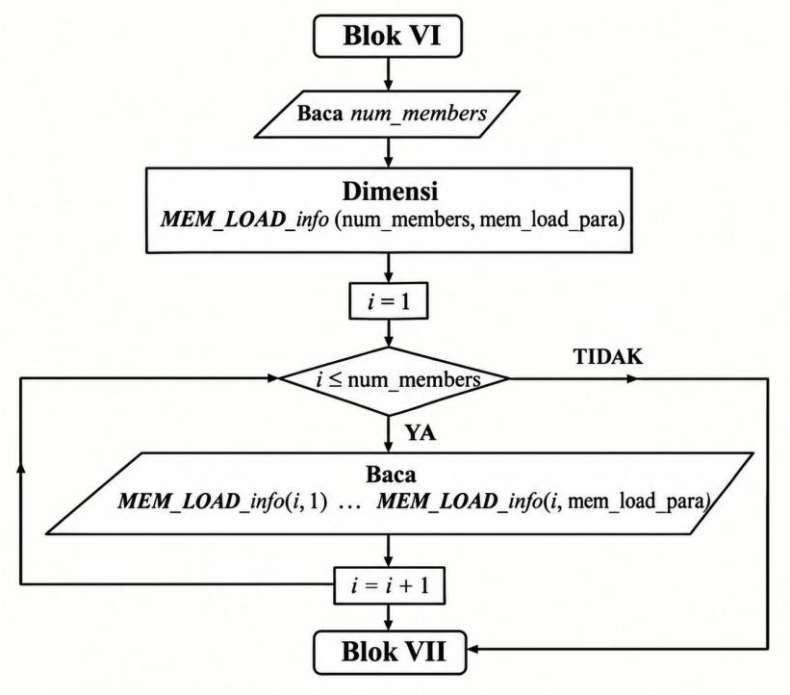


Gambar 8.9 Diagram alir untuk membaca dan menyimpan data beban nodal pada blok NODAL_LOAD_*info*

Gambar 8.10 menampilkan diagram alir untuk membaca dan menyimpan array data beban elemen Mem_Load_*info*. Informasi *Applied Displacement*: perpindahan nodal yang diterapkan disimpan ke dalam satu array referensi Nodal_Dis_*info*.

$$NODAL_DIS_info = [Array\ with\ APPLIED\ NODAL\ DISPLACEMENT]_{\text{num_nodes}\times\text{Node_DOF}}$$

Perpindahan simpul yang diterapkan terkait dengan derajat kebebasan yang dibatasi diambil dari NODAL_DIS_*info* dan dikumpulkan dalam vektor U_{constr} sebagai berikut:



Gambar 8.10 Diagram alir untuk membaca dan menyimpan blok data beban batang MEM_LOAD_info.

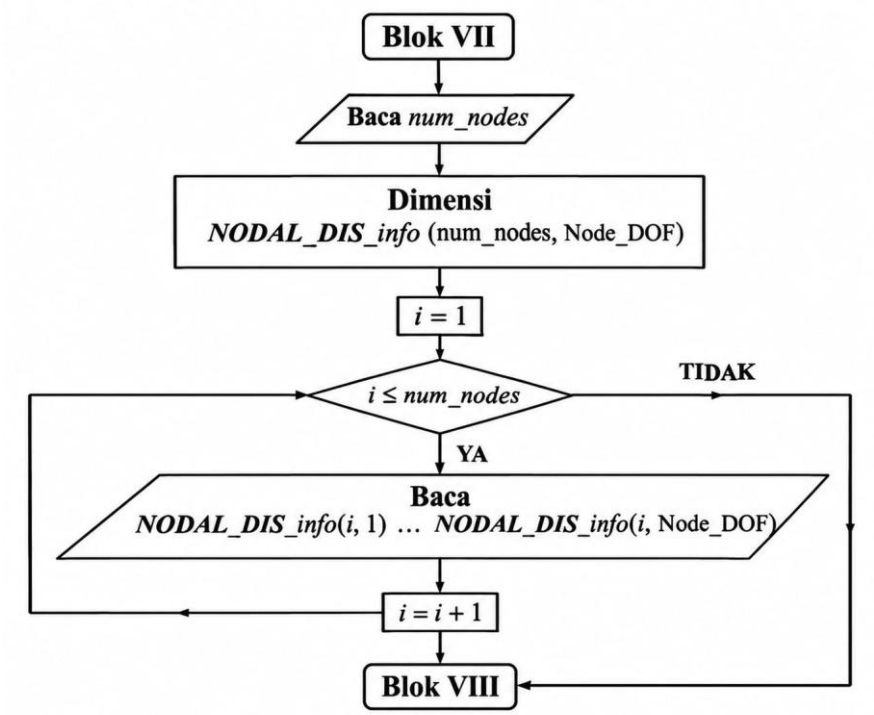
$$U_{constr} = \left[\underbrace{Array\ with\ APPLIED\ NODAL\ DISPLACEMENT}_{\text{num_DOF_constr}}\right]$$

Perlu dicatat bahwa jumlah dari `num_DOF_free` dan `num_DOF_constr` sama dengan total jumlah derajat kebebasan (`num_DOFs`). Gambar 8.11 menampilkan diagram alir untuk membaca dan menyimpan larik data perpindahan titik simpul `NODAL_DIS_*info*`.

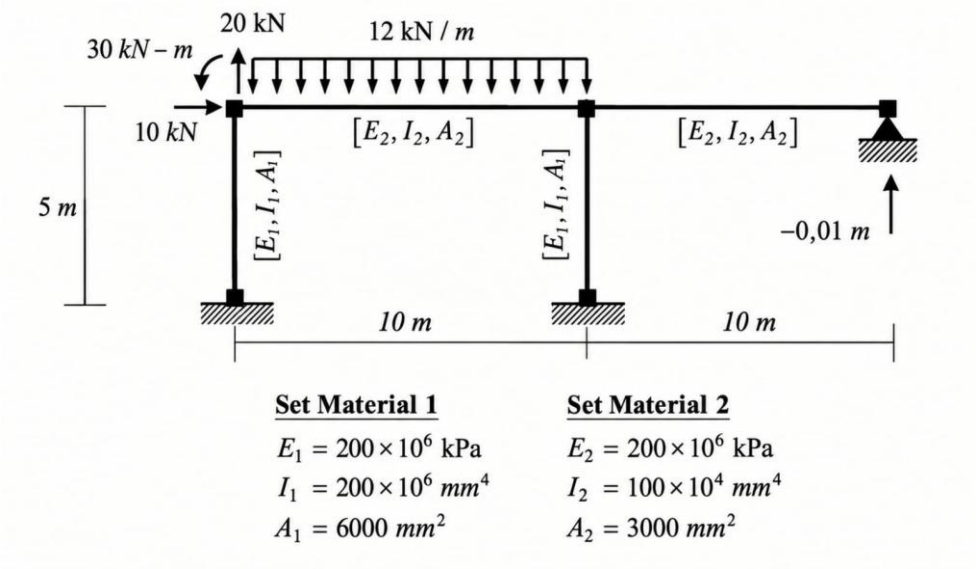
Demonstrasi: Struktur Rangka Kecil

Blok data masukan yang disebutkan di atas akan dibahas melalui contoh struktur rangka yang sangat sederhana. Struktur rangka tersebut lengkap dengan kondisi tumpuan, beban titik simpul dan beban batang yang bekerja, penurunan tumpuan, serta properti geometris dan materialnya ditunjukkan pada Gambar 8.12. Titik simpul dan batang, sebagaimana disiapkan untuk data masukan, ditunjukkan pada Gambar 8.13.

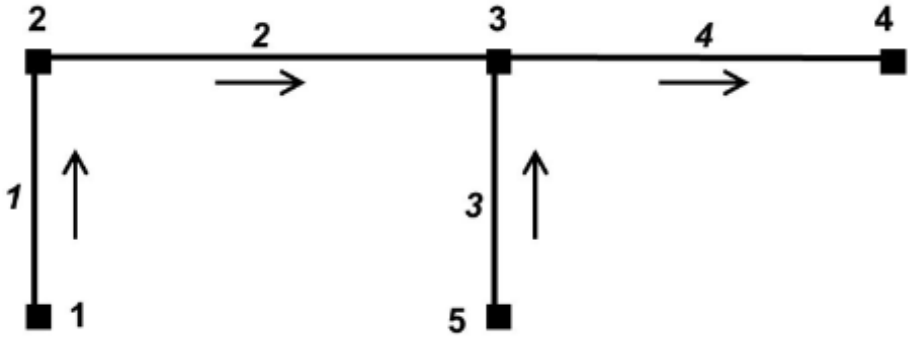
Prosedur pembentukan sistem acuan lokal dari data masukan ditunjukkan pada Gambar 8.14. Untuk setiap batang, sumbu-x lokal membentang dari titik simpul i ke titik simpul j. Perlu dicatat bahwa sumbu-y lokal dipilih sedemikian rupa untuk membentuk sistem acuan tangan kanan terhadap sumbu-z; dalam contoh ini, sumbu-z tegak lurus terhadap bidang gambar dan mengarah ke arah pembaca.



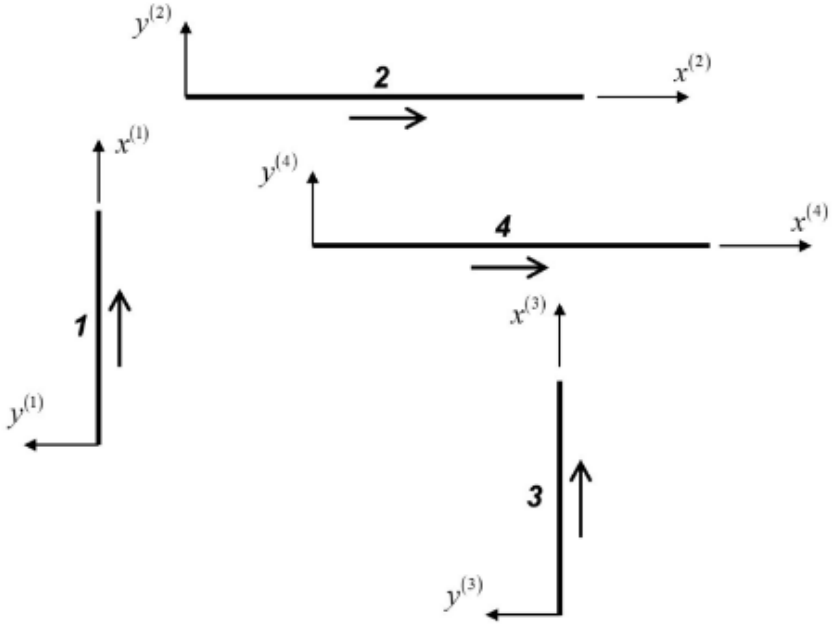
Gambar 8.11 Diagram alir untuk membaca dan menyimpan data perpindahan nodal blok NODAL_DIS_*info*



Gambar 8.12 Contoh rangka kecil.



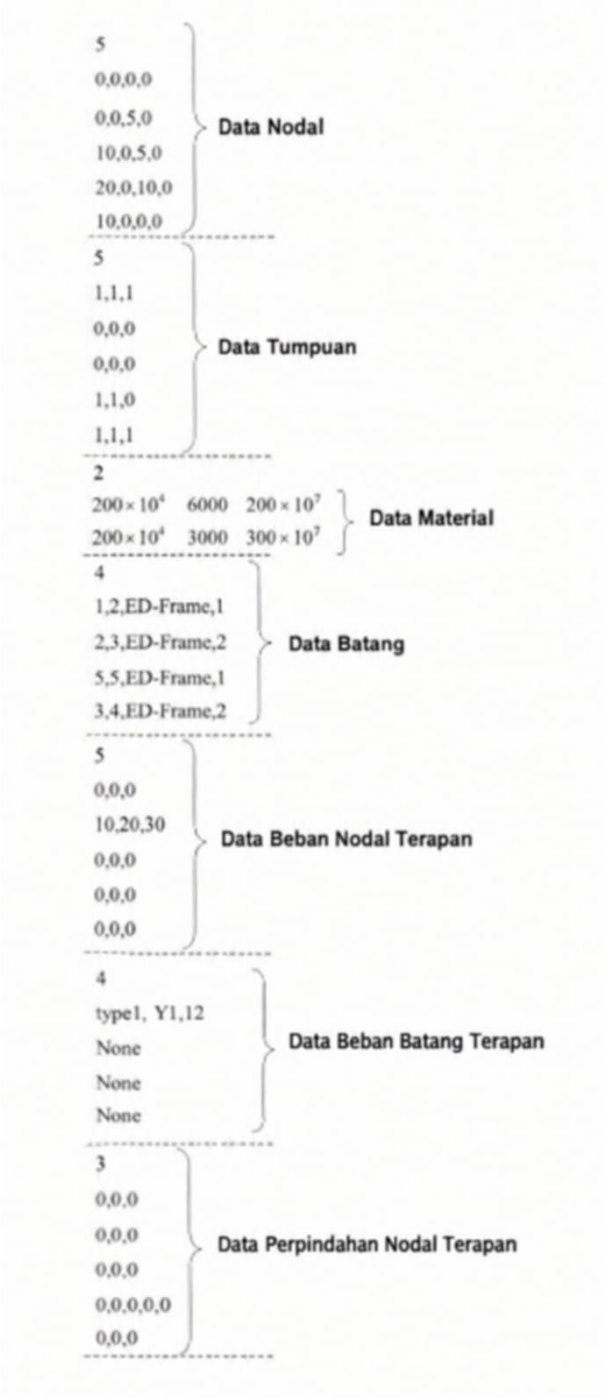
Gambar 8.13 Portal Kecil: Penomoran Simpul dan Elemen.



Gambar 8.14 Portal Kecil: Elemen dalam Sistem Acuan Lokal.

Blok data masukan yang bersesuaian ditampilkan pada Gambar 8.15. Basis data konstanta untuk portal acuan kecil tersebut terdiri dari larik-larik berikut:

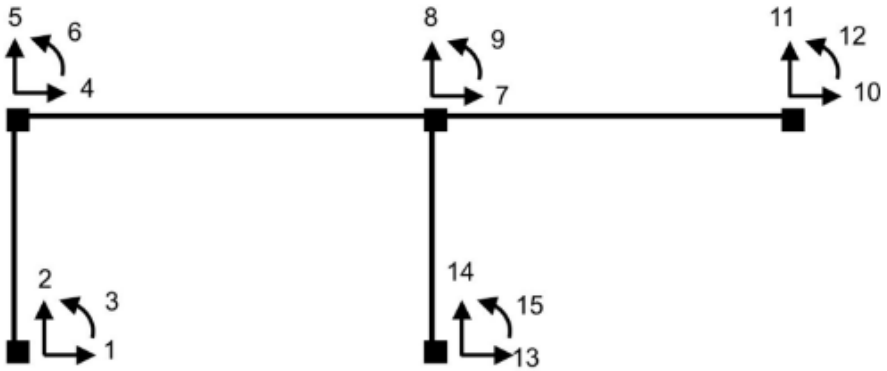
$$NODE_info = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \\ 10 & 5 \\ 20 & 10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$



Gambar 8.15 Contoh Blok Data Masukan.

Setiap baris pada NODE_info memuat koordinat masing-masing titik simpul (*node*). Titik simpul 1 memiliki koordinat {0,0}, titik simpul 2 {0,5}, titik simpul 3 {10,5}, dan seterusnya. Sistem penomoran derajat kebebasan yang diperlihatkan pada Gambar 8.16 dibuat secara otomatis berdasarkan penomoran titik simpul yang telah disiapkan untuk data masukan pada Gambar 8.13. Urutan derajat kebebasan tersebut adalah perpindahan pada arah X global, perpindahan pada arah Y global, dan rotasi terhadap sumbu Z global.

$$BOUN_info = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow DOF_info = \begin{bmatrix} -8 & -9 & -10 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -11 & -12 & 7 \\ -13 & -14 & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow Renumbering\ DOF$$



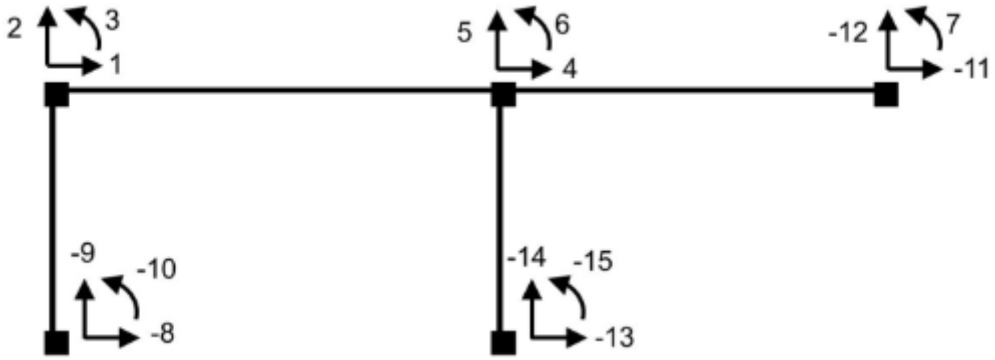
Gambar 8.16 Rangka Kecil: Penomoran Derajat Kebebasan Awal.

Setiap baris dalam `BOUN_*info*` memuat kode tumpuan untuk setiap titik simpul (*node*). Titik simpul 1 terhubung ke tumpuan tetap yang mencegahnya bergerak translasi pada arah X dan Y serta berotasi terhadap sumbu Z; dengan demikian, kode tumpuan untuk titik simpul 1 adalah 1,1,1. Titik simpul 2 bebas bergerak translasi maupun rotasi, sehingga kode tumpuannya adalah 0,0,0. Aturan penomoran kode tumpuan yang serupa diterapkan untuk titik simpul 3, 4, dan 5. Pengembangan metode penyimpanan data tumpuan diserahkan kepada pembaca sebagai tugas proyek. Hal ini dikarenakan pada struktur nyata, sebagian besar titik simpul struktur bersifat bebas, dan hanya sedikit yang dikenai batasan tumpuan. Oleh karena itu, penerapan nomor kode tumpuan pada seluruh titik simpul struktur seperti yang disajikan di sini dianggap tidak efisien.

Penomoran derajat kebebasan pada Gambar 8.16 diubah untuk membedakan antara derajat kebebasan yang tidak dibatasi (*unconstrained*) dan yang dibatasi (*constrained*). Dalam hal ini, derajat kebebasan yang tidak dibatasi diberi nomor terlebih dahulu. Hasil penomoran tersebut ditunjukkan pada Gambar 8.17. Tanda negatif menunjukkan bahwa derajat kebebasan tersebut dibatasi; dengan kata lain, nilai perpindahan untuk derajat kebebasan ini telah ditentukan sebelumnya (*prescribed*). Total jumlah derajat kebebasan (`num_DOFs`) adalah 15. Dari jumlah tersebut, delapan di antaranya dibatasi (`num_DOF_constr` = 8), sedangkan tujuh lainnya tidak dibatasi (`num_DOF_free` = 7).

Setiap baris dalam `DOF_*info*` memuat informasi mengenai derajat kebebasan untuk setiap titik simpul. Sebagai contoh, baris keempat `DOF_*info*` menunjukkan bahwa untuk titik simpul 4: perpindahan pada arah X global dibatasi dan berkorespondensi dengan derajat kebebasan global 11; perpindahan pada arah Y global dibatasi dan berkorespondensi dengan derajat kebebasan global 12; serta rotasi terhadap sumbu Z tidak dibatasi dan berkorespondensi dengan derajat kebebasan global 7.

$$\mathbf{MATE}_info = \begin{bmatrix} 200 \times 10^6 & 6000 & 200 \times 10^6 \\ 200 \times 10^6 & 3000 & 100 \times 10^6 \end{bmatrix}$$



Gambar 8.17 Struktur Rangka Kecil: Penomoran derajat kebebasan setelah pemisahan antara derajat kebebasan yang terkekang dan yang tidak terkekang.

Setiap baris pada MATE_info memuat informasi untuk setiap set material. Baris pertama menunjukkan bahwa untuk set material 1, modulus elastisitas E adalah 200 × 10⁶ kPa; luas penampang A adalah 6000 mm²; dan momen inersia I adalah 200 × 10⁶ mm⁴. Interpretasi serupa berlaku untuk baris kedua.

$$\mathbf{MEM}_info = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \text{EB-Frame} & 1 \\ 2 & 3 & \text{EB-Frame} & 2 \\ 5 & 3 & \text{EB-Frame} & 1 \\ 3 & 4 & \text{EB-Frame} & 2 \end{bmatrix}$$

Setiap baris pada MEM_*info* memuat informasi untuk setiap elemen batang (*member*). Elemen batang 1 membentang dari node 1 ke node 2, bertipe EB-Frame, dan memiliki sifat material yang didefinisikan sebagai set 1. Indeks data terakhir ini menunjukkan bahwa sifat material elemen batang 1 tercantum pada baris pertama MATE_info. Interpretasi serupa berlaku untuk baris-baris lainnya.

$$\mathbf{NODAL_LOAD}_info = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setiap baris pada `*NODAL_LOAD_info*` memuat beban nodal yang diterapkan pada setiap titik simpul. Sebagai contoh, baris kedua menunjukkan bahwa beban nodal yang diterapkan pada titik simpul 2 dalam arah X, Y, dan Z masing-masing adalah 10 kN, 20 kN, dan 30 kN-m. Interpretasi serupa berlaku untuk titik-titik simpul lainnya. Bersama dengan array `DOF_*info*`, array `$\mathbf{F}_{free}$` yang memuat beban-beban yang diterapkan pada derajat kebebasan bebas didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{F}_{free} = \left[\underbrace{10}_{\text{DOF 1}} \quad \underbrace{20}_{\text{DOF 2}} \quad \underbrace{30}_{\text{DOF 3}} \quad \underbrace{0}_{\text{DOF 4}} \quad \underbrace{0}_{\text{DOF 5}} \quad \underbrace{0}_{\text{DOF 6}} \quad \underbrace{0}_{\text{DOF 7}}\right]^T$$

Nilai $\mathbf{F}_{free}$ adalah 7, yang merupakan jumlah derajat kebebasan bebas. Nilai ini bersesuaian dengan derajat kebebasan nomor 1 hingga 7 pada Gambar 8.17. Pengembangan metode penyimpanan beban nodal yang diterapkan diserahkan kepada pembaca sebagai tugas proyek akhir. Akan lebih efisien jika beban nodal hanya ditentukan untuk titik-titik (*node*) tertentu, alih-alih menentukan beban nodal pada seluruh titik struktur sebagaimana disajikan di sini.

$$\mathbf{MEM_LOAD}_info = \begin{bmatrix} \text{None} & . & . \\ \text{type1} & \text{Y} & -12 \\ \text{None} & . & . \\ \text{None} & . & . \end{bmatrix}$$

Setiap baris dalam `*MEM_LOAD_info*` memuat informasi mengenai beban yang diterapkan pada masing-masing elemen. Baris pertama, ketiga, dan keempat menunjukkan bahwa elemen 1, 3, dan 4 tidak dikenai beban elemen apa pun, sedangkan baris kedua menunjukkan bahwa elemen 2 dikenai beban elemen tipe 1 (beban merata) pada arah $-Y$ dengan intensitas 12 kN/m. Metode penentuan parameter pembebanan biasanya dirancang oleh pengembang program. Pengembangan proses penyimpanan data beban elemen yang diterapkan diserahkan kepada pembaca sebagai tugas proyek mereka. Akan lebih efisien jika beban elemen didefinisikan hanya untuk elemen-elemen tertentu saja, alih-alih menetapkan beban untuk seluruh elemen sebagaimana disajikan di sini.

$$\mathbf{NODAL_DIS}_info = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setiap baris pada `*NODAL_DIS_info*` memuat nilai perpindahan nodal yang diterapkan untuk setiap titik simpul (*node*). Sebagai contoh, baris keempat menunjukkan bahwa perpindahan nodal yang diterapkan pada titik simpul 4 dalam arah Y adalah -0,01 m. Interpretasi serupa berlaku untuk titik-titik simpul lainnya. Bersama dengan array `DOF_*info*`, array `$U_{constr}$` yang memuat nilai perpindahan yang diterapkan terkait dengan derajat kebebasan yang dibatasi (*constrained degrees of freedom*) didefinisikan sebagai berikut:

$$U_{constr} = \left[\underbrace{0}_{\text{DOF 8}} \quad \underbrace{0}_{\text{DOF 9}} \quad \underbrace{0}_{\text{DOF 10}} \quad \underbrace{0}_{\text{DOF 11}} \quad \underbrace{-0.01}_{\text{DOF 12}} \quad \underbrace{0}_{\text{DOF 13}} \quad \underbrace{0}_{\text{DOF 14}} \quad \underbrace{0}_{\text{DOF 15}}\right]^T$$

Panjang array `$U_{constr}$` adalah 8, yang merupakan jumlah derajat kebebasan dengan batasan (terkendala). Array ini bersesuaian dengan derajat kebebasan nomor 8 hingga 15 pada Gambar 8.17. Pengembangan metode penyimpanan untuk perpindahan nodal yang diterapkan

diserahkan kepada pembaca sebagai tugas proyek semester. Akan lebih efisien jika perpindahan nodal didefinisikan hanya untuk titik simpul tertentu, alih-alih menetapkan perpindahan untuk seluruh titik simpul struktur sebagaimana disajikan di sini.

Array basis data lainnya perlu dihitung namun tidak harus disimpan. Array ini sangat penting untuk merakit persamaan elemen guna membentuk persamaan struktur. Array yang dimaksud adalah vektor pemetaan lokal `LMi` yang telah dibahas sebelumnya pada Bab 1. Vektor ini memetakan derajat kebebasan elemen dalam sistem acuan global ke derajat kebebasan struktur. ` $LM_i$` disusun berdasarkan informasi yang telah tersimpan dalam `MEM_*info*` dan `DOF_*info*`. Sebagai contoh, dengan merujuk pada `MEM_*info*` untuk elemen 3 (baris ketiga) pada Gambar 8.13, terlihat bahwa titik simpul awal dan akhir elemen 3 masing-masing adalah 5 dan 3. Berdasarkan `DOF_*info*`, jelas bahwa 6 derajat kebebasan elemen 3 bersesuaian dengan 6 derajat kebebasan struktur {13 14 15 4 5 6}. Angka-angka ini memetakan derajat kebebasan elemen ke derajat kebebasan struktur. Array pemetaan elemen yang dihasilkan adalah:

$$LM_3 = [13 \quad 14 \quad 15 \quad 4 \quad 5 \quad 6]^T$$

Tentu saja, tidak perlu memasukkan LMi ke dalam basis data konstanta, karena LM_i dapat dibentuk dari informasi yang terkandung dalam MEM_info dan DOF_*info* sebagaimana ditunjukkan di atas. Demikian pula, untuk elemen-elemen lainnya, array pemetaan elemen adalah:

$$LM_1 = [8 \quad 9 \quad 10 \quad 1 \quad 2 \quad 3]^T; LM_2 = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]^T; LM_4 = [4 \quad 5 \quad 6 \quad 11 \quad 12 \quad 7]^T$$

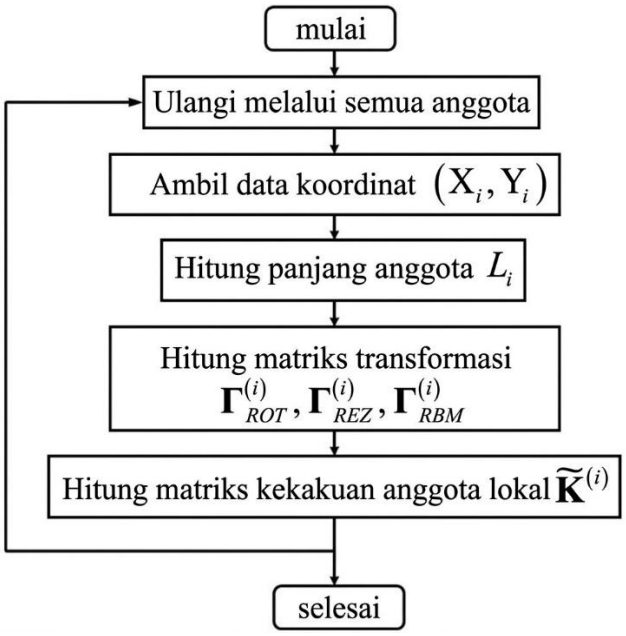
8.5 PERAKITAN MATRIKS KEKAKUAN STRUKTUR

Matriks Kekakuan Dan Transformasi Elemen

Untuk setiap elemen:

1. Ambil properti elemen dari blok data elemen `MEM_*info*`.
2. Tentukan panjangnya berdasarkan koordinat titik simpul dan kosinus arah.
3. Hitung matriks kekakuan lokalnya.

Diagram alir untuk menentukan matriks kekakuan dan transformasi elemen ditunjukkan pada Gambar 8.18.



Gambar 8.18 Diagram alir untuk menghitung matriks kekakuan dan matriks transformasi elemen.

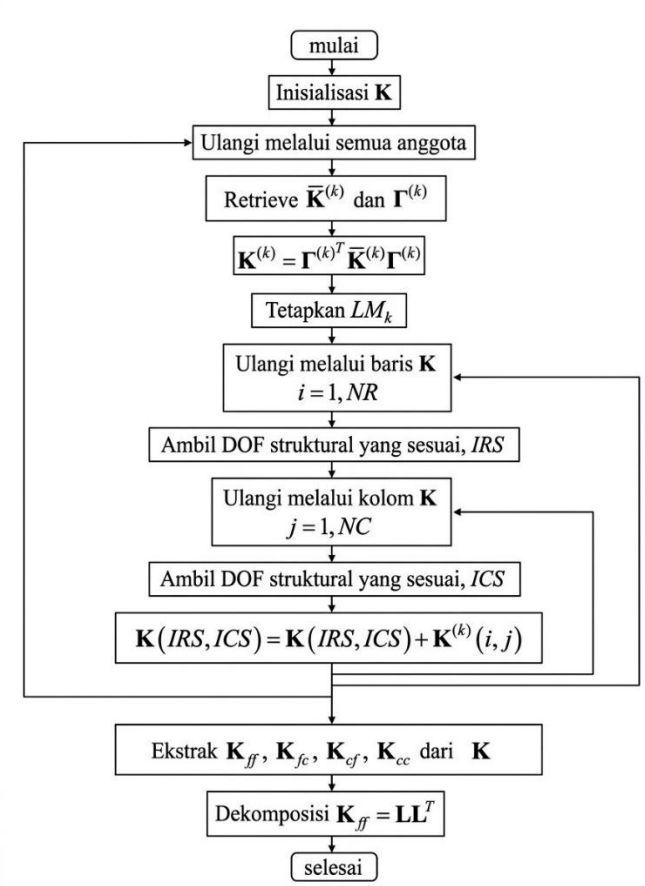
Matriks Kekakuan Struktur

Langkah-langkah perakitan matriks kekakuan struktur adalah sebagai berikut:

1. Inisialisasi array penyimpan matriks kekakuan menjadi nol.
2. Lakukan perulangan untuk semua elemen dan untuk setiap elemen k:
   a. Ambil matriks kekakuan elemen lokal `$\overline{K^{(k)}}$` dan matriks transformasi `$\Gamma^{(k)}$`.
   b. Hitung matriks kekakuan elemen global menggunakan rumus `$K^{(k)} = \Gamma^{(k)^T}\overline{K^{(k)}}\Gamma^{(k)}$`.
   c. Susun vektor pemetaan lokal `$LM_k$` dari array `MEM_*info*` dan `DOF_*info*`.
   d. Lakukan perulangan pada setiap baris dan kolom matriks kekakuan elemen dan tambahkan kontribusi elemen tersebut ke dalam matriks kekakuan struktur.

$$\mathbf{K}\big(LM_k(i), LM_k(j)\big) = \mathbf{K}\big(LM_k(i), LM_k(j)\big) + \mathbf{K}^{(k)}(i,j)$$

   e. Ekstrak submatriks $K_{ff}, K_{fc}, K_{cf}, K_{cc}$ dari K.
3. Diagram alir untuk perakitan matriks kekakuan elemen ditunjukkan pada Gambar 8.19.

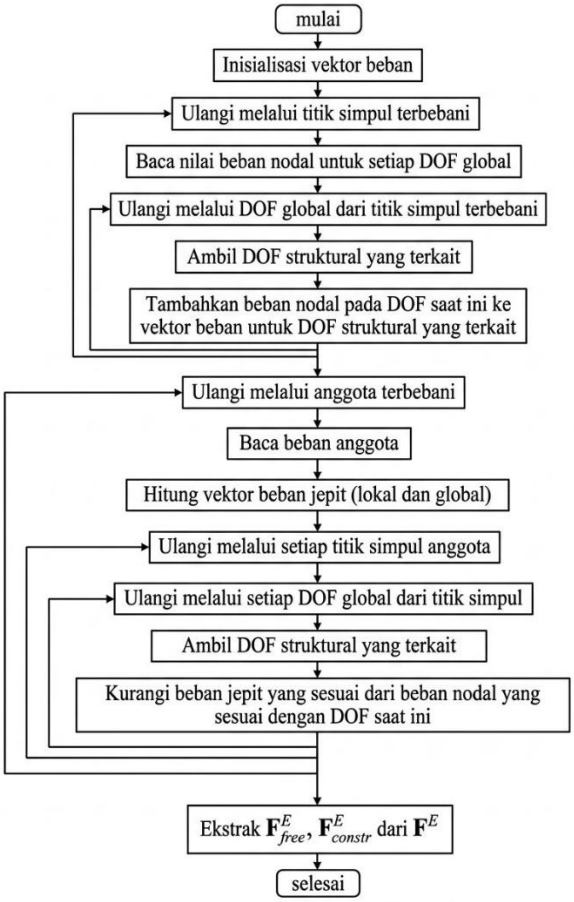


Gambar 8.19 Diagram alir untuk perakitan matriks kekakuan elemen.

8.6 PERAKITAN VEKTOR BEBAN EKUIVALEN

Rutinitas utama harus membaca dan melakukan perulangan untuk setiap kasus pembebanan.

1. Inisialisasi array penyimpan vektor beban menjadi nol.
2. Baca jumlah titik simpul yang menerima beban. Untuk setiap titik simpul yang menerima beban, kumpulkan nilai-nilai tak-nol dalam vektor beban (gunakan DOF_info untuk menentukan posisi yang tepat).
3. Lakukan perulangan untuk semua elemen yang menerima beban:
   a) Baca nomor elemen dan nilai beban.
   b) Hitung beban ujung jepit (*fixed-end loads*) baik dalam koordinat lokal maupun global.
   c) Melalui vektor pemetaan lokal LM_k, tambahkan beban ujung jepit tersebut ke vektor beban titik simpul yang diterapkan.
   d) Simpan beban ujung jepit untuk penggunaan selanjutnya (pemulihan gaya internal).
4. Partisi vektor beban titik simpul ekuivalen F^F menjadi F^F_{free} dan F^F_{constr}.
   Diagram alir untuk penyusunan vektor beban ditampilkan pada Gambar 8.20.



Gambar 8.20 Diagram alir untuk penyusunan vektor beban.

8.7 SUBSTITUSI BALIK UNTUK MENENTUKAN PERPINDAHAN TITIK SIMPUL

Setelah matriks kekakuan yang berkaitan dengan derajat kebebasan bebas berhasil didekomposisi dan vektor beban yang bersesuaian telah disusun, tahap berikutnya adalah menentukan perpindahan pada titik-titik simpul melalui proses substitusi balik. Tahap ini merupakan bagian penting dalam metode matriks kekakuan karena menghasilkan nilai perpindahan yang menjadi respons utama struktur terhadap beban yang bekerja.

Dalam analisis struktur, persamaan kesetimbangan untuk derajat kebebasan bebas umumnya dapat dituliskan dalam bentuk:

$$[K_{ff}]\{d_f\} = \{P_f\}$$

dengan $[K_{ff}]$ menyatakan matriks kekakuan struktur yang telah direduksi pada derajat kebebasan bebas, $\{d_f\}$ menyatakan vektor perpindahan yang belum diketahui, dan $\{P_f\}$ menyatakan vektor beban nodal yang bekerja pada derajat kebebasan tersebut. Matriks kekakuan $[K_{ff}]$ kemudian didekomposisi, misalnya menggunakan faktorisasi segitiga bawah dan segitiga atas:

$$[K_{ff}] = [L][U]$$

Dengan demikian, persamaan awal dapat dituliskan sebagai:

$$[L][U]\{d_f\} = \{P_f\}$$

Untuk menyelesaikan persamaan tersebut, proses perhitungan dilakukan dalam dua tahap. Tahap pertama adalah substitusi maju, yaitu menyelesaikan persamaan:

$$[L]\{y\} = \{P_f\}$$

Tahap ini menghasilkan vektor antara $\{y\}$. Setelah itu, tahap kedua dilakukan melalui substitusi balik, yaitu menyelesaikan persamaan:

$$[U]\{d_f\} = \{y\}$$

Dari proses substitusi balik tersebut diperoleh komponen-komponen vektor perpindahan $\{d_f\}$. Setiap komponen vektor tersebut kemudian dikaitkan kembali dengan derajat kebebasan dan nomor titik simpul yang sesuai. Dengan cara ini, perpindahan horizontal, perpindahan vertikal, atau rotasi pada setiap titik simpul dapat ditentukan sesuai dengan model struktur yang dianalisis.

Secara operasional, substitusi balik dilakukan mulai dari persamaan terakhir menuju persamaan pertama. Jika matriks $[U]$ berbentuk segitiga atas, komponen perpindahan terakhir dapat dihitung secara langsung. Komponen perpindahan berikutnya dihitung dengan menggunakan hasil yang telah diperoleh sebelumnya. Proses ini dilanjutkan secara berurutan hingga seluruh komponen perpindahan diketahui.
Sebagai ilustrasi, misalkan diperoleh sistem persamaan:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Maka perpindahan dihitung secara berurutan sebagai berikut:

$$d_3 = \frac{y_3}{u_{33}}$$

$$d_2 = \frac{y_2 - u_{23}d_3}{u_{22}}$$

$$d_1 = \frac{y_1 - u_{12}d_2 - u_{13}d_3}{u_{11}}$$

Hasil d_1, d_2, dan d_3 merupakan komponen perpindahan pada derajat kebebasan bebas. Nilai tersebut harus ditempatkan kembali ke dalam vektor perpindahan struktur secara

keseluruhan. Untuk derajat kebebasan yang terkekang oleh tumpuan, nilai perpindahannya biasanya telah diketahui, umumnya sama dengan nol, kecuali apabila struktur mengalami penurunan tumpuan atau perpindahan yang ditentukan.
Dengan demikian, vektor perpindahan total dapat disusun dalam bentuk:

$$\{d\} = \begin{bmatrix} \{d_f\} \\ \{d_r\} \end{bmatrix}$$

dengan $\{d_f\}$ menyatakan perpindahan pada derajat kebebasan bebas dan $\{d_r\}$ menyatakan perpindahan pada derajat kebebasan yang telah ditentukan oleh kondisi tumpuan. Dalam kasus tumpuan tidak mengalami perpindahan, komponen $\{d_r\}$ bernilai nol.

Perlu diperhatikan bahwa perpindahan titik simpul diperoleh bukan dengan mengalikan secara langsung matriks kekakuan yang telah didekomposisi dengan vektor beban. Sebaliknya, dekomposisi matriks kekakuan digunakan untuk mengubah sistem persamaan menjadi bentuk yang lebih mudah diselesaikan melalui substitusi maju dan substitusi balik. Dengan pendekatan ini, penyelesaian sistem persamaan dapat dilakukan secara efisien tanpa perlu menghitung invers matriks kekakuan secara eksplisit.

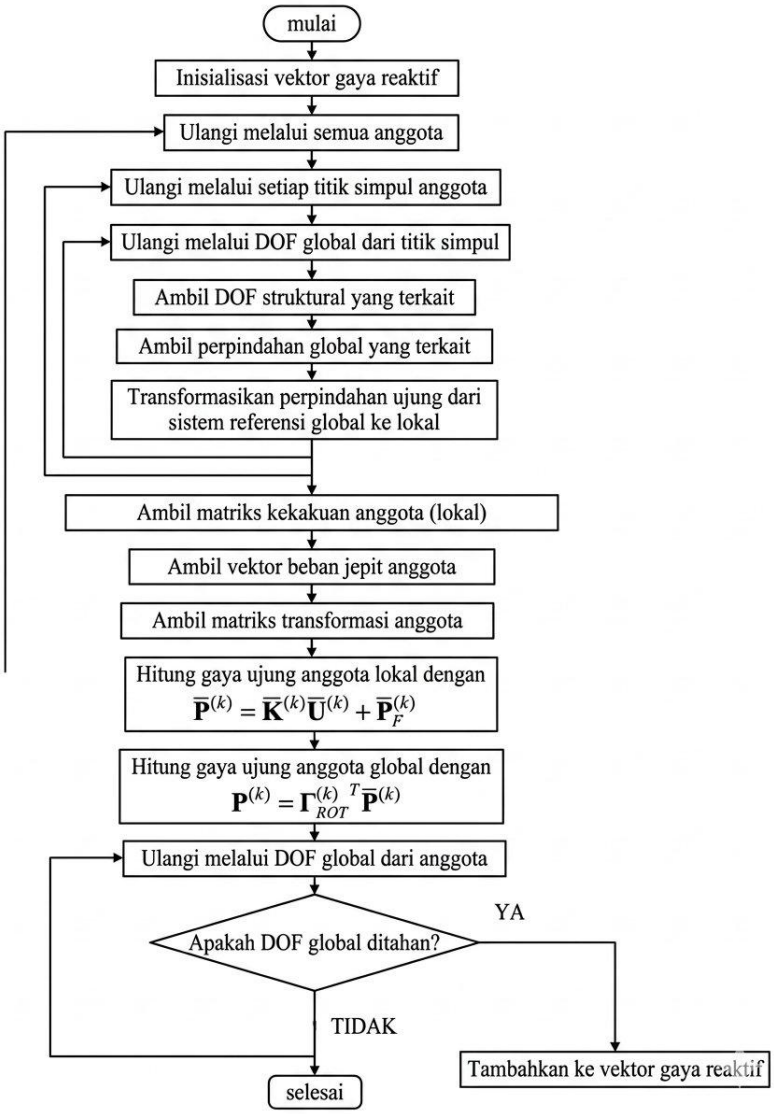
Setelah seluruh perpindahan titik simpul diperoleh, nilai tersebut dapat digunakan untuk menentukan besaran-besaran lain yang diperlukan dalam analisis struktur. Besaran tersebut meliputi deformasi elemen, regangan, tegangan, gaya aksial, gaya geser, momen lentur, serta reaksi tumpuan, bergantung pada jenis dan model struktur yang dianalisis. Oleh karena itu, substitusi balik merupakan tahapan penghubung antara penyelesaian sistem persamaan global dan evaluasi respons elemen struktur.

8.8 PENENTUAN PERPINDAHAN UJUNG ELEMEN, GAYA UJUNG, DAN REAKSI TUMPUAN

Perpindahan ujung elemen, gaya ujung elemen, dan reaksi tumpuan ditentukan kembali melalui prosedur berikut:

1. Inisialisasi vektor gaya reaksi menjadi nol.
2. Untuk setiap elemen, ambil:
   a) Matriks transformasi.
   b) Vektor beban ujung jepit (*fixed-end load vector*).
   c) Matriks kekakuan lokal.
3. Tentukan perpindahan ujung elemen dalam koordinat global $\mathbf{U}^{(k)}$ berdasarkan vektor pemetaan lokal LM_k.
4. Hitung perpindahan ujung elemen dalam koordinat local $\overline{\mathbf{U}}^{(k)}$ menggunakan $\overline{\mathbf{U}}^{(k)} = \Gamma_{ROT}^{(k)} U^{(k)}$.
5. Hitung gaya ujung elemen dalam koordinat lokal $\overline{\mathbf{P}}^{(k)}$ menggunakan $\overline{\mathbf{P}}^{(k)} = \overline{\mathbf{K}}^{(k)}\overline{\mathbf{U}}^{(k)} + \overline{\mathbf{P}}_F^{(k)}$
6. Hitung gaya ujung elemen dalam koordinat global menggunakan $P^{(k)} = \Gamma_{ROT}^{(k)^T}\overline{\mathbf{P}}^{(k)}$ dan kumpulkan komponen-komponen yang sesuai untuk reaksi tumpuan.

Diagram alir untuk memperoleh kembali nilai perpindahan ujung elemen, gaya ujung elemen, dan reaksi tumpuan disajikan pada Gambar 8.21.



Gambar 8.21 Diagram alir untuk memperoleh kembali perpindahan ujung batang, gaya ujung batang, dan reaksi tumpuan.

BAB 9
METODE FLEKSIBILITAS

9.1 METODE GAYA MATRIKS

Sejauh ini, metode perpindahan matriks (*matrix displacement method*) untuk analisis struktur di mana perpindahan titik simpul struktur menjadi variabel tak-diketahui utama—telah dibahas. Karena persamaan kesetimbangan digunakan untuk menentukan perpindahan titik simpul yang tidak diketahui, metode ini juga disebut sebagai "metode kesetimbangan". Mengingat hubungan kekakuan digunakan untuk menyatakan gaya titik simpul dalam bentuk perpindahan titik simpul, metode ini juga dikenal sebagai "metode kekakuan". Bab ini bertujuan untuk menyajikan metode gaya matriks (*matrix force method*) dalam analisis struktur. Pada dasarnya, metode gaya dan metode perpindahan merupakan metode analisis struktur yang bersifat dual (saling melengkapi), yang perbedaannya hanya terletak pada cara memasukkan persyaratan statis dan kinematik. Dalam metode gaya, sekumpulan gaya reaksi dan/atau gaya internal yang dikenal sebagai gaya redundan diperlakukan sebagai variabel tak-diketahui dasar. Jumlah gaya redundan yang dipilih sama dengan derajat ketidaktentuan statis (*degree of statical indeterminacy* atau SI) dari struktur tersebut. Dengan demikian, besaran masalah bergantung pada derajat ketidaktentuan statisnya. Untuk setiap gaya redundan, terdapat kondisi kompatibilitas yang relevan. Akibatnya, jumlah persamaan kompatibilitas sama dengan jumlah gaya redundan yang tidak diketahui.

Oleh karena itu, jumlah persamaan kompatibilitas tersebut mencukupi untuk menentukan gaya-gaya redundan yang tidak diketahui. Karena persamaan kompatibilitas digunakan untuk menentukan gaya redundan yang tidak diketahui, metode ini juga disebut sebagai "metode kompatibilitas". Mengingat hubungan fleksibilitas digunakan untuk menyatakan deformasi titik simpul dalam bentuk gaya titik simpul, metode ini juga dikenal sebagai "metode fleksibilitas". Hasilnya, istilah "metode gaya", "metode kompatibilitas", dan "metode fleksibilitas" dapat digunakan secara bergantian.

Saat ini, metode gaya matriks telah digantikan oleh metode perpindahan matriks karena kurangnya sifat umum (*generality*) dan adanya kesulitan dalam menetapkan sistem gaya redundan yang diperlukan pada awal proses analisis. Selain itu, pendekatan perpindahan matriks memiliki beberapa keunggulan dari sudut pandang praktis implementasi komputer, sebagaimana dibahas dalam Bab 7 dan 8. Namun, dari sudut pandang prinsip dasar dan kelengkapan materi, metode gaya matriks tetap layak untuk dipelajari di sini. Sebelum mengakhiri bagian ini, ada baiknya untuk mengulas secara singkat sejarah perkembangan metode gaya. Bentuk konsisten pertama dari metode gaya untuk menganalisis struktur statis tak tentu diusulkan oleh James Clerk Maxwell pada tahun 1864. Pendekatannya didasarkan pada pertimbangan lendutan, namun penyajiannya kurang memberikan kejelasan dan hanya menarik sedikit perhatian. Sepuluh tahun kemudian, metode analisis ini disempurnakan oleh Otto Mohr. Oleh karena itu, pendekatan analisis struktur statis tak tentu yang menggunakan perhitungan lendutan sering disebut sebagai metode "Maxwell–Mohr". Bentuk matriks

pertama dari metode gaya kemungkinan besar diusulkan oleh Samuel Levy pada tahun 1947 untuk menganalisis sayap menyapu (*swept wing*) pada pesawat terbang. Selanjutnya, Argyris dan Kelsey (1960) menyajikan formulasi yang sangat umum mengenai metode gaya matriks untuk analisis struktur berdasarkan konsep energi. Selama 20 tahun terakhir, metode gaya matriks telah muncul kembali dan keunggulannya terbukti dalam bidang analisis rangka nonlinier.

9.2 PERSAMAAN FLEKSIBILITAS STRUKTUR: SISTEM STATIS TENTU

Bagian ini berfokus pada perumusan persamaan fleksibilitas struktur untuk rangka statis tentu. Struktur rangka yang diperlihatkan pada Gambar 9.1 digunakan sebagai contoh untuk pembahasan ini. Perlu dicatat bahwa sistem statis tentu memegang peranan penting sebagai struktur primer dalam proses analisis struktur statis tak tentu menggunakan metode gaya, sebagaimana dipelajari dalam mata kuliah analisis struktur tingkat sarjana. Pertama-tama, kondisi kesetimbangan ditinjau kembali. Berdasarkan Bab 3, persamaan kesetimbangan matriks untuk rangka ini dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{2B}^{(1)} & b_{1B}^{(2)} & 0 \\ 0 & b_{2B}^{(2)} & b_{1B}^{(3)} \\ 0 & 0 & b_{2B}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1^0 \\ F_2^0 \\ F_3^0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1{}' \\ F_2{}' \\ F_3{}' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1^0 \\ F_2^0 \\ F_3^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{2B}^{(1)} & b_{1B}^{(2)} & 0 \\ 0 & b_{2B}^{(2)} & b_{1B}^{(3)} \\ 0 & 0 & b_{2B}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} \quad (9.1)$$

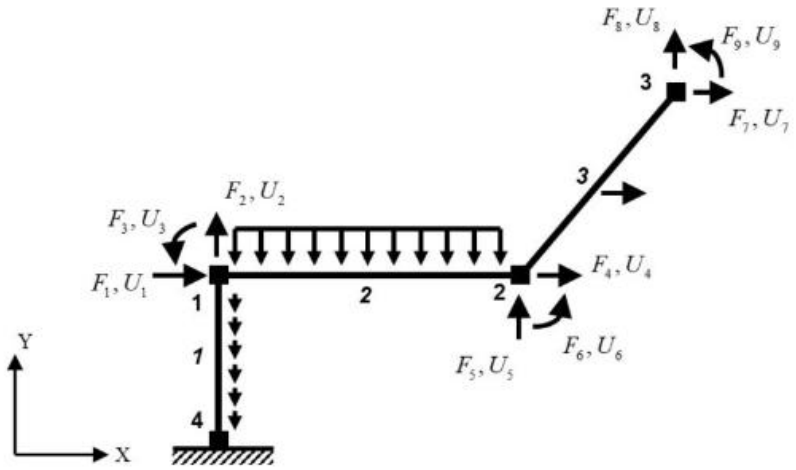
atau dalam format ringkas sebagai berikut:

$$\mathbf{F}_{free} = \mathbf{B}_{free}\mathbf{Q} + \mathbf{F}_{free}^0 \Rightarrow \mathbf{F}_{free}^* = \mathbf{F}_{free} - \mathbf{F}_{free}^0 = \mathbf{B}_{free}\mathbf{Q} \quad (9.2)$$

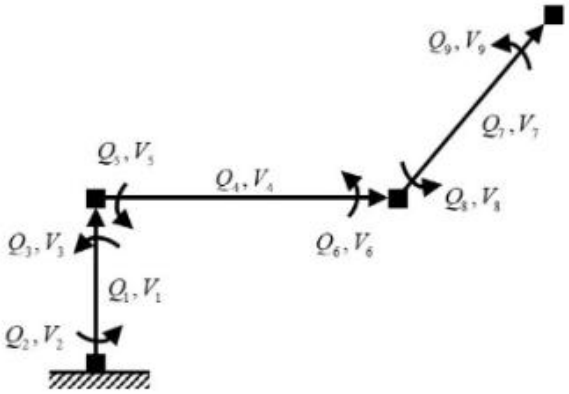
Berdasarkan sifat statis tertentu (*statically determinate*) dari sistem tersebut, gaya-gaya dasar elemen Q (yang ditunjukkan pada Gambar 9.2) dapat dinyatakan secara unik dalam bentuk beban simpul ekuivalen $\mathbf{F}_{free}^*$ yang terkait dengan derajat kebebasan bebas sebagai berikut:

$$\mathbf{Q} = \left[\mathbf{B}_{free}\right]^{-1}\mathbf{F}_{free}^* = \mathbf{B}_0\mathbf{F}_{free}^* \quad (9.3)$$

Perlu dicatat bahwa matriks $\mathbf{B}_0$ dalam Persamaan (9.3) dapat dipandang sebagai bentuk diskret dari fungsi interpolasi gaya antara vektor gaya Q dan $\mathbf{F}_{free}^*$. Dalam formulasi elemen rangka berbasis fleksibilitas, interpolasi gaya digunakan untuk menyatakan gaya dalam sebagai fungsi dari gaya luar.



Gambar 9.1 Rangka Statis Tentu.



Gambar 9.2 Gaya dan Deformasi Dasar Elemen Rangka pada Gambar 9.1.

Berdasarkan Bab 4, persamaan kompatibilitas matriks untuk rangka ini dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2B}^{(1)} & 0 & 0 \\ a_{1B}^{(2)} & a_{2B}^{(2)} & 0 \\ 0 & a_{1B}^{(3)} & a_{2B}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \tag{9.4}$$

atau dalam format ringkas sebagai:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{free} = \mathbf{A}_{free}\mathbf{U}_{free} \tag{9.5}$$

Dari Persamaan (9.2) dan (9.5), dapat diamati bahwa

$$\mathbf{A}_{free} = \mathbf{B}_{free}^{T} \tag{9.6}$$

Hubungan semacam ini muncul karena sifat kontragradien antara hubungan statis dan kinematik, sebagaimana telah dibuktikan dalam Bab 5 melalui prinsip kerja maya. Karena sistem ini bersifat statis tertentu, perpindahan simpul bebas $\mathbf{U}_{free}$ yang terkait dengan derajat kebebasan bebas dapat dinyatakan secara unik dalam bentuk deformasi dasar elemen **V** (seperti yang ditunjukkan pada Gambar 9.2) sebagai:

$$\mathbf{U}_{free} = \left[\mathbf{A}_{free}\right]^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{B}_0^T\mathbf{V} \tag{9.7}$$

Hubungan fleksibilitas elemen kini digunakan untuk menyatakan deformasi dasar elemen dalam bentuk gaya-gaya dasar elemen. Untuk satu elemen, hubungan tersebut dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)}\mathbf{q}^{(i)} + \mathbf{v}_0^{(i)} + \mathbf{v}_W^{(i)} + \mathbf{v}_S^{(i)} \tag{9.8}$$

di mana vektor $\mathbf{v}_0^{(i)}$ memuat deformasi dasar elemen akibat deformasi awal; vektor $\mathbf{v}_W^{(i)}$ memuat deformasi dasar elemen akibat beban elemen; dan $\mathbf{v}_S^{(i)}$ memuat deformasi dasar elemen akibat pergerakan tumpuan. Nilai-nilai deformasi dasar elemen ini disajikan dalam Lampiran II. Untuk semua elemen, nilai-nilai tersebut dituliskan secara bersamaan sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & f^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & f^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_0^{(1)} \\ v_0^{(2)} \\ v_0^{(3)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_w^{(1)} \\ v_w^{(2)} \\ v_w^{(3)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_s^{(1)} \\ v_s^{(2)} \\ v_s^{(3)} \end{Bmatrix} \tag{9.9}$$

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & f^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & f^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V_0^1 \\ V_0^2 \\ V_0^3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V_w^1 \\ V_w^2 \\ V_w^3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V_s^1 \\ V_s^2 \\ V_s^3 \end{Bmatrix}$$

atau dalam format ringkas sebagai berikut:

$$\mathbf{V} = \mathbf{fQ} + \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_W + \mathbf{V}_S \tag{9.10}$$

Seluruh komponen dasar ((9.3), (9.7), dan (9.10)) dapat dirumuskan secara bersamaan melalui prinsip gaya virtual sebagai berikut. Berdasarkan sifat invarian usaha yang dibahas dalam Bab 5, dapat disimpulkan bahwa:

$$\underbrace{\delta\mathbf{Q}^T\mathbf{V}}_{\delta\mathbf{W}_{int}^*} = \underbrace{\delta\mathbf{F}_{free}^{*\,T}\mathbf{U}_{free}}_{\delta\mathbf{W}_{ext}^*} \tag{9.11}$$

Dari Persamaan (9.3), diperoleh:

$$\delta\mathbf{Q}^T = \delta{\mathbf{F}^*_{free}}^T\mathbf{B}_0^T \tag{9.12}$$

Perlu dicatat bahwa hubungan kesetimbangan dalam Pers. (9.12) menjamin terpenuhinya persyaratan kesetimbangan bagi gaya-gaya virtual $\delta\mathbf{Q}$ dan δF^*_{free}. Hal ini merupakan aspek penting dari sistem gaya virtual sebagaimana dibahas dalam Bab 5.
Dengan menyubstitusikan Pers. (9.12) ke dalam Pers. (9.11), diperoleh:

$$\delta{\mathbf{F}^*_{free}}^T\mathbf{B}_0^T\mathbf{V} = \delta{\mathbf{F}^*_{free}}^T\mathbf{U}_{free} \Rightarrow \delta{\mathbf{F}^*_{free}}^T\left(\mathbf{B}_0^T\mathbf{V} - \mathbf{U}_{free}\right) = 0 \tag{9.13}$$

Karena sifat sembarang dari $\delta\boldsymbol{F}^*_{\boldsymbol{free}}$ diperoleh hubungan kompatibilitas matriks berikut:

$$\mathbf{U}_{free} = \mathbf{B}_0^T\mathbf{V} \tag{9.14}$$

Berdasarkan persamaan fleksibilitas tak-terakit pada Persamaan (9.10), diperoleh:

$$\mathbf{U}_{free} = \mathbf{B}_0^T\mathbf{V} = \mathbf{B}_0^T(\mathbf{f}\mathbf{Q} + \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_W + \mathbf{V}_S) = \mathbf{B}_0^T\mathbf{f}\mathbf{Q} + \mathbf{B}_0^T\mathbf{V}_0 + \mathbf{B}_0^T\mathbf{V}_W + \mathbf{B}_0^T\mathbf{V}_S \tag{9.15}$$

Dengan menyubstitusikan Persamaan (9.3) ke dalam (9.15), diperoleh persamaan fleksibilitas struktural:

$$\mathbf{U}_{free} = (\mathbf{B}_0^T\mathbf{f}\mathbf{B}_0)\mathbf{F}^*_{free} + \mathbf{B}_0^T\mathbf{V}_0 + \mathbf{B}_0^T\mathbf{V}_W + \mathbf{B}_0^T\mathbf{V}_S = \overline{\mathbf{F}}\mathbf{F}^*_{free} + \mathbf{U}^0_{free} + \mathbf{U}^W_{free} + \mathbf{U}^S_{free} \tag{9.16}$$

di mana matriks fleksibilitas struktural $\overline{\mathbf{F}}$ didefinisikan sebagai:

$$\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{B}_0^T\mathbf{f}\mathbf{B}_0 \tag{9.17}$$

Perpindahan nodal struktural $\mathbf{U}^0_{free}$ akibat adanya deformasi dasar awal didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{U}^0_{free} = \mathbf{B}_0^T\mathbf{V}_0 \tag{9.18}$$

Perpindahan nodal struktur $\mathbf{U}^W_{free}$ akibat adanya beban elemen didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{U}^W_{free} = \mathbf{B}_0^T\mathbf{V}_W \tag{9.19}$$

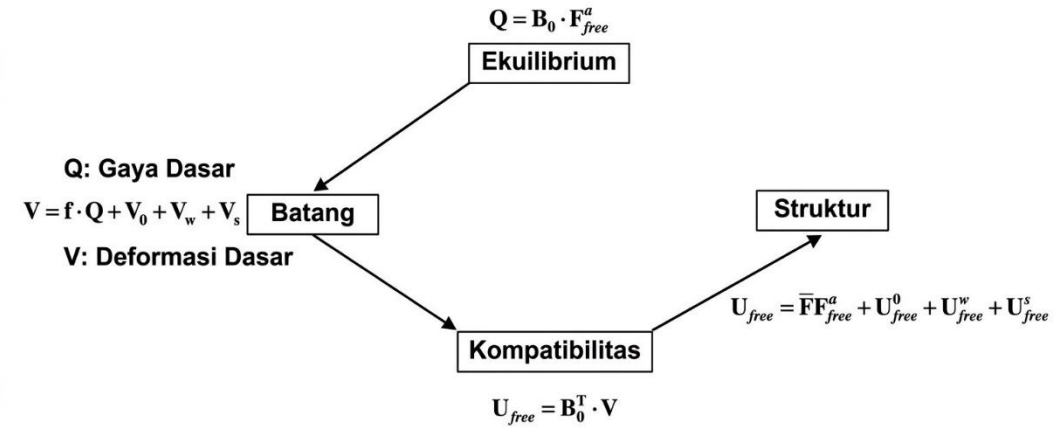
Perpindahan simpul struktural $\mathbf{U}^S_{free}$ akibat pergerakan tumpuan didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{U}^S_{free} = \mathbf{B}_0^T\mathbf{V}_S \tag{9.20}$$

Representasi skematis dari metode fleksibilitas disajikan pada Gambar 9.3.

Contoh 9.1

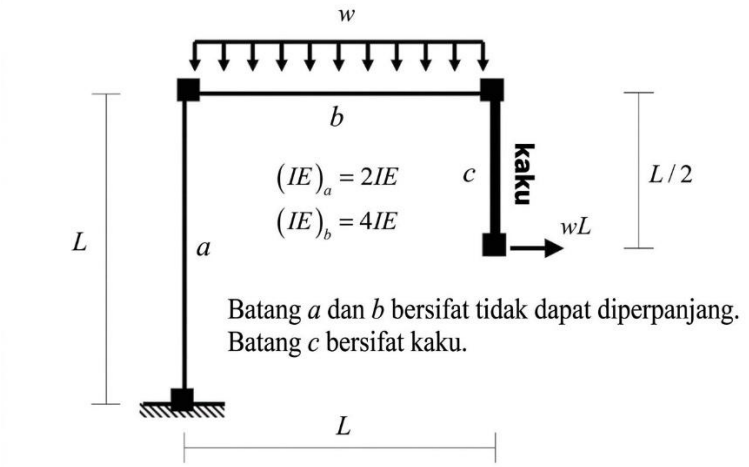
Untuk struktur rangka yang ditunjukkan pada Gambar 9.4, gunakan metode fleksibilitas untuk menentukan perpindahan simpulnya. Penyelesaian: Sistem penomoran elemen, simpul, derajat kebebasan (DOF), gaya elemen dasar, dan deformasi elemen dasar ditunjukkan pada Gambar 9.5.



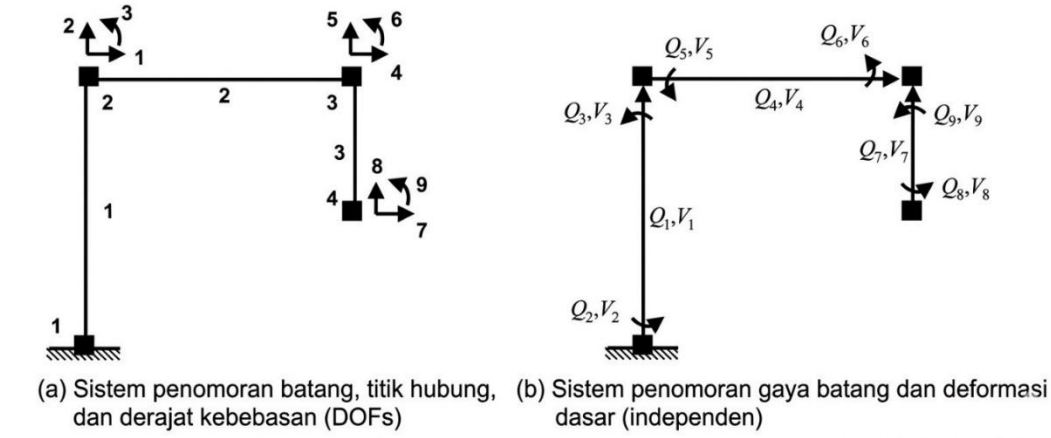
Gambar 9.3 Representasi skematis Metode Fleksibilitas.

Berdasarkan pertimbangan statika yang dijelaskan dalam Bab 3, semua persamaan kesetimbangan simpul dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{wL}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{wL}{2} \\ 0 \\ wL \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{L} & \frac{2}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{L} & -\frac{2}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{Bmatrix}$$



Gambar 9.4 Contoh 9.1.



Gambar 9.5 Contoh 9.1 (Lanjutan).

Gaya dasar elemen Q dapat dinyatakan dalam bentuk beban ekivalen yang bekerja pada titik simpul $\boldsymbol{F}^*_{\boldsymbol{free}}$ sebagai berikut:

$$Q = B_0 F^*_{free} \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ L & 0 & -1 & L & -L & -1 & \frac{L}{2} & -L & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & L & 1 & \frac{L}{2} & L & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L & -1 & -\frac{L}{2} & -L & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{wL}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{wL}{2} \\ 0 \\ wL \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Matriks fleksibilitas tak terakit (Gambar 9.6) adalah:

$$V = fQ + V_w + \underbrace{V_Q}_{0} + \underbrace{V_S}_{0} \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V_w^1 \\ V_w^2 \\ V_w^3 \end{Bmatrix}$$

Untuk anggota 1 dan 3, $\mathbf{V}_W^1 = \mathbf{V}_W^3 = \mathbf{0}$ dan untuk anggota 2 , $\mathbf{V}_W^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{wL^3}{96IE} & \frac{wL^3}{96IE} \end{bmatrix}^T$.

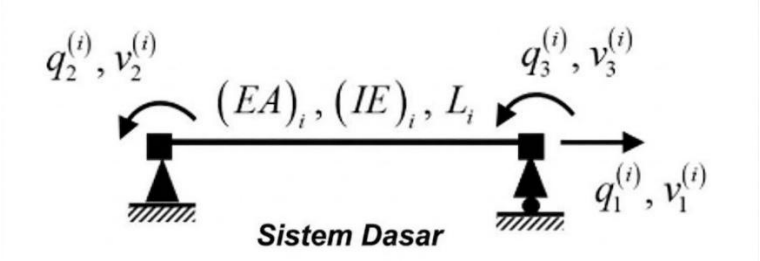
$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{6IE} & -\frac{L}{12IE} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L}{12IE} & \frac{L}{6IE} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{12IE} & -\frac{L}{24IE} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{24IE} & \frac{L}{12IE} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{wL^3}{96IE} \\ \frac{wL^3}{96IE} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Persamaan fleksibilitas struktural adalah:

$$\mathbf{U}_{free} = \overline{\mathbf{F}}\mathbf{F}_{free}^{*} + \mathbf{U}_{free}^{W}$$

di mana matriks fleksibilitas struktural $\overline{\mathbf{F}}$ adalah:

$$\bar{F} = B_0^T f B_0 = \frac{L}{IE} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{6} & 0 & -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{6} & -\frac{L^2}{4} & -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{24} & -\frac{L^2}{4} & -\frac{L}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{L}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{L}{4} & \frac{L}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{L}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{L^2}{6} & 0 & -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{6} & -\frac{L^2}{4} & -\frac{L}{4} & \frac{L^2}{24} & -\frac{L^2}{4} & -\frac{L}{4} \\ -\frac{L^2}{4} & 0 & \frac{L}{2} & -\frac{L^2}{4} & \frac{7L^2}{12} & \frac{5L}{8} & \frac{L^2}{16} & \frac{7L^2}{12} & \frac{5L}{8} \\ -\frac{L}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{L}{4} & \frac{5L}{8} & \frac{3}{4} & \frac{L}{8} & \frac{5L}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{L^2}{24} & 0 & 0 & \frac{L^2}{24} & \frac{L^2}{16} & \frac{L}{8} & \frac{5L^2}{48} & \frac{L^2}{16} & \frac{L}{8} \\ -\frac{L^2}{4} & 0 & \frac{L}{2} & -\frac{L^2}{4} & \frac{7L^2}{12} & \frac{5L}{8} & \frac{L^2}{16} & \frac{7L^2}{12} & \frac{5L}{8} \\ -\frac{L}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{L}{4} & \frac{5L}{8} & \frac{3}{4} & \frac{L}{8} & \frac{5L}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$



Gambar 9.6 Contoh 9.1 (Lanjutan).

Perpindahan simpul struktur $\mathbf{U}_{free}^{W}$ akibat adanya beban batang adalah:

$$\mathbf{U}_{free}^{W} = \mathbf{B}_0^T \mathbf{V}_W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{wL^4}{96IE} & \frac{wL^3}{48IE} & \frac{wL^4}{96IE} & \frac{wL^4}{96IE} & \frac{wL^3}{48IE} \end{bmatrix}^T$$

Perpindahan simpul struktural $\mathbf{U}_{free}$ adalah:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{free} &= [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \quad U_6 \quad U_7 \quad U_8 \quad U_9]^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{wL^4}{6IE} & 0 & -\frac{wL^3}{4IE} & \frac{wL^4}{6IE} & -\frac{7wL^4}{32IE} & -\frac{wL^3}{6IE} & \frac{wL^4}{12IE} & -\frac{7wL^4}{32IE} & -\frac{wL^3}{6IE} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

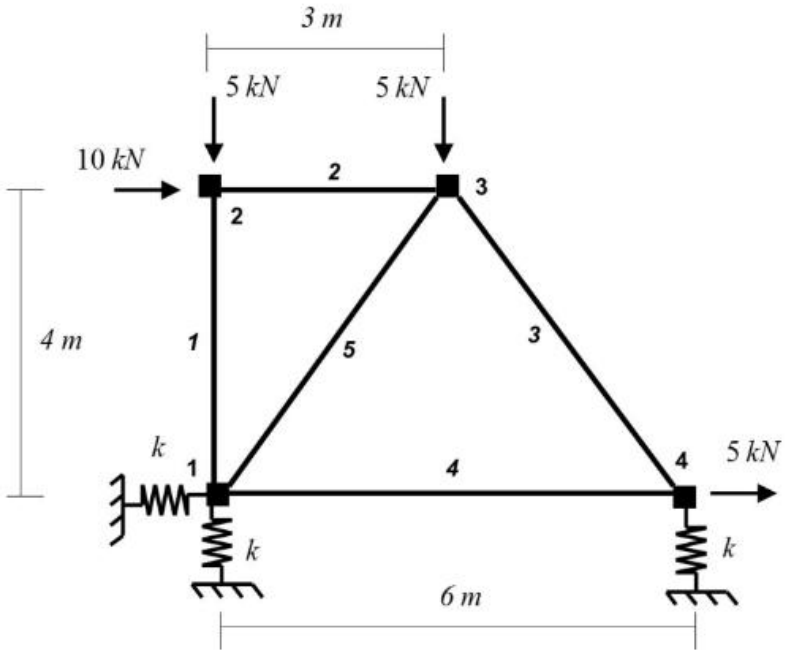
Dapat diamati bahwa kendala ketidakmampuan untuk memanjang (*inextensibility*) maupun kekakuan terhadap lentur (*inflexibility*) dapat diterapkan dengan mudah menggunakan metode fleksibilitas dibandingkan dengan metode kekakuan.

Contoh 9.2

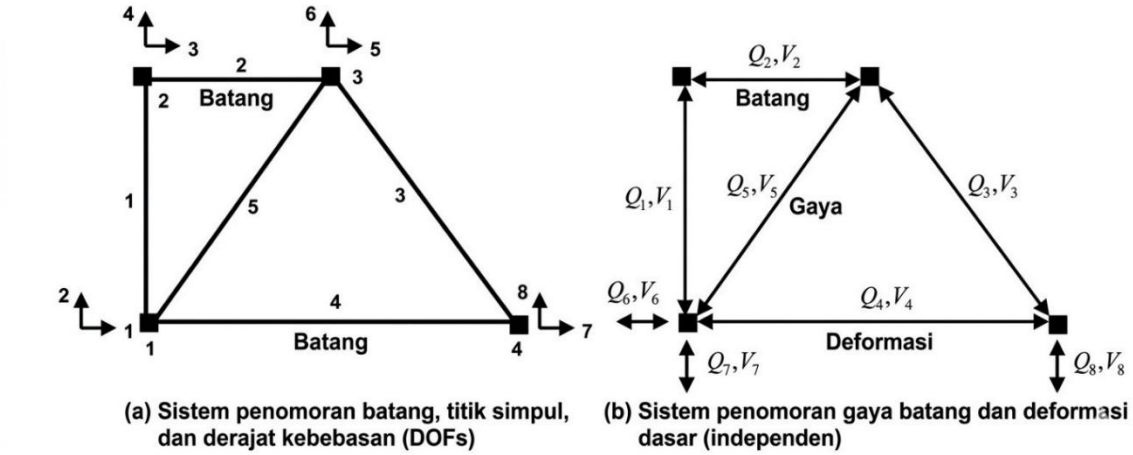
Tinjau struktur rangka batang yang ditumpu oleh pegas seperti yang ditunjukkan pada Gambar 9.7. Gunakan metode fleksibilitas untuk menentukan perpindahan titik buhulnya. Untuk penyederhanaan, diasumsikan bahwa semua batang memiliki nilai EA yang sama.

- **Penyelesaian**: Sistem penomoran untuk batang, titik buhul, derajat kebebasan (DOF), gaya batang dasar, dan deformasi batang dasar ditunjukkan pada Gambar 9.8. Berdasarkan tinjauan statika yang dijelaskan dalam Bab 3, persamaan kesetimbangan matriksnya adalah:

$$F = BQ \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -0.6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{Bmatrix}$$



Gambar 9.7 Contoh 9.2.



Gambar 9.8 Contoh 9.2 (Lanjutan).

Gaya-gaya dasar elemen Q dapat dinyatakan dalam bentuk beban luar yang bekerja pada titik simpul F sebagai berikut:

$$Q = B_0 F \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.833 & 0 & -0.833 & 0.625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & -0.375 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.833 & 0 & 0.833 & 0.625 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.667 & 1 & 0.667 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.667 & 0 & -0.667 & 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{Bmatrix}$$

Matriks fleksibilitas yang belum dirakit adalah:

$$V = fQ \quad \text{atau} \quad \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{Bmatrix}$$

Persamaan fleksibilitas struktural adalah:

$$U = \bar{F}F$$

di mana matriks fleksibilitas struktural $\bar{F}$ adalah:

$$\bar{F} = B_0^T f B_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & \frac{1}{k} & 0 & \frac{1}{k} & 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & \frac{0.667}{k} & \frac{1}{k} & \frac{0.667}{k} & \frac{0.5}{k} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k} & \frac{0.667}{k} & \frac{1.889}{k} + \frac{11.444}{EA} & \frac{0.667}{k} & \frac{1.889}{k} + \frac{8.444}{EA} & -\frac{1.125}{EA} & \frac{1}{k} + \frac{3}{EA} & -\frac{0.667}{k} \\ 0 & \frac{1}{k} & \frac{0.6667}{k} & \frac{1}{k} + \frac{4}{EA} & \frac{0.6667}{k} & \frac{0.5}{k} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k} & \frac{0.667}{k} & \frac{1.889}{k} + \frac{8.444}{EA} & \frac{0.667}{k} & \frac{1.889}{k} + \frac{8.444}{EA} & -\frac{1.125}{EA} & \frac{1}{k} + \frac{3}{EA} & -\frac{0.667}{k} \\ 0 & \frac{0.5}{k} & -\frac{1.125}{EA} & \frac{0.5}{k} & -\frac{1.125}{EA} & \frac{0.5}{k} + \frac{4.75}{EA} & -\frac{2.25}{EA} & \frac{0.5}{k} \\ \frac{1}{k} & 0 & \frac{1}{k} + \frac{3}{EA} & 0 & \frac{1}{k} + \frac{3}{EA} & -\frac{2.25}{EA} & \frac{1}{k} + \frac{6}{EA} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{0.667}{k} & 0 & -\frac{0.667}{k} & \frac{0.5}{k} & 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$$

Perpindahan titik simpul adalah:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & \frac{1}{k} & 0 & \frac{1}{k} & 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & \frac{0.667}{k} & \frac{1}{k} & \frac{0.667}{k} & \frac{0.5}{k} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k} & \frac{0.667}{k} & \frac{1.889}{k}+\frac{11.444}{EA} & \frac{0.667}{k} & \frac{1.889}{k}+\frac{8.444}{EA} & -\frac{1.125}{EA} & \frac{1}{k}+\frac{3}{EA} & -\frac{0.667}{k} \\ 0 & \frac{1}{k} & \frac{0.6667}{k} & \frac{1}{k}+\frac{4}{EA} & \frac{0.6667}{k} & \frac{0.5}{k} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k} & \frac{0.667}{k} & \frac{1.889}{k}+\frac{8.444}{EA} & \frac{0.667}{k} & \frac{1.889}{k}+\frac{8.444}{EA} & -\frac{1.125}{EA} & \frac{1}{k}+\frac{3}{EA} & -\frac{0.667}{k} \\ 0 & \frac{0.5}{k} & -\frac{1.125}{EA} & \frac{0.5}{k} & -\frac{1.125}{EA} & \frac{0.5}{k}+\frac{4.75}{EA} & -\frac{2.25}{EA} & \frac{0.5}{k} \\ \frac{1}{k} & 0 & \frac{1}{k}+\frac{3}{EA} & 0 & \frac{1}{k}+\frac{3}{EA} & -\frac{2.25}{EA} & \frac{1}{k}+\frac{6}{EA} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{0.667}{k} & 0 & -\frac{0.667}{k} & \frac{0.5}{k} & 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \\ 0 \\ -5 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \quad U_6 \quad U_7 \quad U_8]^T$$

$$= \left[\frac{15}{k} \quad -\frac{0.83}{k} \quad \frac{20.56}{k}+\frac{135.07}{EA} \quad \frac{0.83}{k}-\frac{20}{EA} \quad \frac{20.56}{k}+\frac{105.07}{EA} \quad -\frac{5}{k}-\frac{46.25}{EA} \quad \frac{15}{k}+\frac{71.25}{EA} \quad -\frac{9.1}{k}\right.$$

9.3 PENDEKATAN FLEKSIBILITAS: SISTEM STATIS TAK TENTU

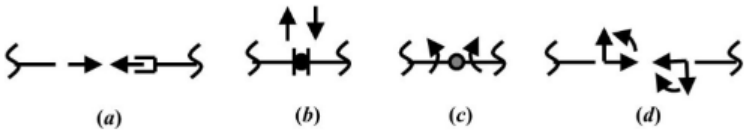
Tujuan utama bab ini adalah menyajikan pendekatan fleksibilitas untuk menganalisis sistem statis tak tentu. Dengan menerapkan sejumlah pelepasan gaya (*force release*) yang memadai, struktur statis tak tentu apa pun dapat diubah menjadi struktur statis tertentu. Pada umumnya, jumlah pelepasan gaya yang diperlukan sama dengan derajat ketaktentuan statis (SI) sistem tersebut. Struktur menjadi tidak stabil jika jumlah pelepasan gaya melebihi derajat ketaktentuan statisnya. Jenis-jenis pelepasan gaya yang umum digunakan ditunjukkan pada Gambar 9.9. Istilah "pelepasan gaya" menyiratkan bahwa aksi gaya tertentu tidak dapat diteruskan melalui perangkat pelepasan gaya tersebut. Artinya, perangkat pada Gambar 9.9a, b, dan c masing-masing tidak dapat meneruskan gaya aksial (*thrust*), gaya geser, dan momen. Gambar 9.9d merepresentasikan pelepasan total di mana tidak ada gaya yang dapat diteruskan. Ketidakmampuan meneruskan aksi gaya ini mengakibatkan adanya diskontinuitas pada komponen perpindahan yang bersesuaian (perpindahan aksial, perpindahan transversal, dan rotasi).

Secara umum, gaya-gaya yang terkait dengan pelepasan tersebut disebut sebagai gaya redundan (*redundants*), dan gaya-gaya ini menjadi variabel tak diketahui utama dalam metode gaya. Struktur hasil pelepasan tersebut bersifat statis tertentu dan disebut sebagai struktur primer. Karena sifat statis tertentunya, gaya-gaya dalam dapat dinyatakan secara sederhana dalam bentuk beban luar yang diberikan dan gaya redundan melalui kondisi kesetimbangan. Akibatnya, deformasi internal yang terkait dapat diperoleh melalui persamaan fleksibilitas elemen. Dengan demikian, deformasi internal tersebut dapat dirumuskan dalam bentuk beban luar yang diberikan dan gaya redundan. Prinsip gaya virtual dapat digunakan untuk menentukan perpindahan di lokasi mana pun yang diinginkan, khususnya perpindahan relatif yang terkait dengan lokasi pelepasan. Seperti telah disebutkan sebelumnya, pelepasan gaya biasanya mengakibatkan diskontinuitas (perpindahan relatif) pada komponen perpindahan

yang bersesuaian (perpindahan aksial, perpindahan transversal, dan rotasi). Sebagai contoh, ketika gaya geser (Gambar 9.9b) dan momen (Gambar 9.9c) dilepaskan, masing-masing akan timbul perpindahan relatif dan rotasi.

Namun, diskontinuitas semacam itu tidak ada pada struktur aslinya. Oleh karena itu, kondisi kontinuitas dapat diterapkan pada lokasi pelepasan untuk membentuk persamaan kompatibilitas guna menyelesaikan nilai gaya redundan yang belum diketahui. Setelah besaran redundan diperoleh, analisis terhadap sistem primer (yang statis tertentu) menghasilkan gaya dalam, deformasi internal, dan perpindahan titik simpul sebagai superposisi dari kontribusi beban yang diberikan dan besaran redundan tersebut. Berdasarkan uraian mengenai metode fleksibilitas di atas, pendekatan umum metode ini dapat diringkas sebagai berikut:

1. Menyusun sistem penomoran derajat kebebasan, titik simpul, dan elemen struktur.
2. Mengubah struktur statis tak tentu menjadi struktur statis tertentu (struktur primer) dengan menerapkan sejumlah pelepasan gaya (*force releases*) yang memadai. Gaya-gaya yang dilepaskan tersebut berfungsi sebagai variabel tak diketahui dasar dalam sistem. Perlu dicatat bahwa pemilihan titik pelepasan gaya yang kurang tepat dapat menyebabkan sistem menjadi *ill-conditioned* (kondisi sistem yang buruk secara numerik). Informasi lebih rinci mengenai hal ini dapat ditemukan dalam Felton dan Nelson (1997).



Gambar 9.9 Pelepasan Gaya: (a) Pelepasan Gaya Aksial; (b) Pelepasan Gaya Geser; (c) Pelepasan Momen; (d) Pelepasan Total.

3. Nyatakan gaya-gaya internal (pada elemen dasar) Q dari struktur primer dalam bentuk beban luar $\mathbf{F}_{free}^{*}$ yang diberikan dan gaya redundan R melalui kondisi kesetimbangan. Secara umum, hubungan statis ini dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}' + \mathbf{Q}'' = \mathbf{B}_0\mathbf{F}_{free}^{*} + \mathbf{B}_R\mathbf{R} \tag{9.21}$$

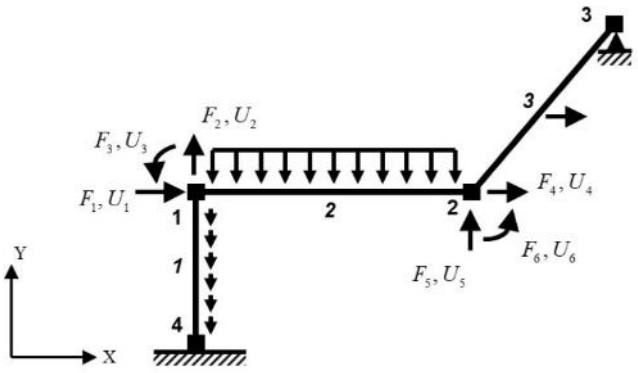
4. Perlu dicatat bahwa $\mathbf{Q}'$ merepresentasikan gaya-gaya internal (elemen dasar) akibat beban luar $\mathbf{F}_{free}^{*}$ yang diberikan, sedangkan $\mathbf{Q}''$ merepresentasikan gaya-gaya internal (elemen dasar) akibat gaya redundan R. Selain itu, perlu dikemukakan bahwa matriks $\mathbf{B}_0$ dan $\mathbf{B}_R$ dalam Persamaan (9.21) dapat dipandang sebagai bentuk diskret dari fungsi interpolasi gaya yang menghubungkan vektor gaya internal Q dengan vektor beban luar $\mathbf{F}_{free}^{*}$ dan vektor redundan R. Penulis telah menggunakan bentuk fungsi interpolasi gaya ini untuk merumuskan model rangka berbasis fleksibilitas dengan antarmuka tangensial (Limkatanyu 2002) dan model rangka berbasis fleksibilitas dengan antarmuka lateral (Limkatanyu dan Spacone 2006). Pembaca yang berminat mendalami model rangka berbasis fleksibilitas disarankan untuk menelaah beberapa

makalah yang diterbitkan oleh penulis serta disertasi doktoral dari mahasiswa Prof. F.C. Filippou (University of California, Berkeley, AS) dan Prof. E. Spacone (University "G. D'Annunzio" of Chieti, Pescara, Italia).

5. Dengan menggunakan hubungan fleksibilitas elemen dari Persamaan (9.10), tentukan deformasi internal (elemen dasar) V. Pada dasarnya, deformasi elemen dasar dinyatakan dalam bentuk beban luar $\mathbf{F}^*_{free}$ yang diberikan dan gaya redundan R.
6. Gunakan prinsip gaya virtual untuk menentukan perpindahan relatif pada lokasi yang diasumsikan dilepaskan (dibebaskan).
7. Karena pada struktur yang diberikan perpindahan relatif semacam itu tidak ada, maka diperoleh persamaan kompatibilitas yang terkait dengan lokasi-lokasi pelepasan tersebut. Persamaan kompatibilitas ini dinyatakan dalam bentuk deformasi internal (elemen dasar) V dan, pada dasarnya, dalam bentuk beban luar $\mathbf{F}^*_{free}$ serta gaya redundan R. Selesaikan persamaan kompatibilitas tersebut untuk mendapatkan nilai redundan R.
8. Dengan mensubstitusikan R ke dalam langkah (3), diperoleh gaya-gaya elemen dasar Q.
9. Berdasarkan Persamaan (9.10), diperoleh deformasi elemen dasar V.
10. Gunakan prinsip gaya virtual untuk memperoleh perpindahan nodal U.

Sebuah rangka statis tak-tentu yang ditunjukkan pada Gambar 9.10 digunakan sebagai contoh untuk menjelaskan langkah-langkah tersebut di atas. Berdasarkan tinjauan statika, terlihat bahwa derajat ketidaktentuan statis (SI) adalah 9 − 7 = 2. Oleh karena itu, diperlukan dua pelepasan gaya agar rangka ini menjadi statis tertentu. Beberapa pilihan struktur primer ditunjukkan pada Gambar 9.11. Gambar 9.11b–g memperlihatkan beberapa pilihan struktur primer yang dapat diterima. Struktur primer yang ditunjukkan pada Gambar 9.11h tidak dapat diterima karena tidak mampu menahan beban horizontal yang bekerja. Struktur hasil pelepasan pada gambar tersebut dipilih sebagai struktur primer. Dengan mengacu pada Gambar 9.2, gaya-gaya batang dasar dan deformasi rangka ini dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2 \quad \mathbf{Q}_3]^T \text{ dan } \mathbf{V} = [\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_2 \quad \mathbf{V}_3]^T$$



Gambar 9.10 Portal Statis Tak Tentu ($SI = 2$).

Dalam kasus ini, gaya batang dasar Q_2 dan Q_5 adalah redundan. Dengan demikian, vektor gaya redundan $\mathbf{R}$ adalah:

$$\mathbf{R} = \lfloor Q_5 \quad Q_2 \rfloor^T$$

Hubungan statis pada Persamaan (9.21) diingat kembali:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}' + \mathbf{Q}'' = \mathbf{B}_0\mathbf{F}^*_{free} + \mathbf{B}_R\mathbf{R} \tag{9.22}$$

Persamaan fleksibilitas yang belum dirakit adalah:

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{V}_1\\ \mathbf{V}_2\\ \mathbf{V}_3\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{f}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{f}^{(2)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{f}^{(3)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{Q}_1\\ \mathbf{Q}_2\\ \mathbf{Q}_3\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mathbf{V}_0^1\\ \mathbf{V}_0^2\\ \mathbf{V}_0^3\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mathbf{V}_w^1\\ \mathbf{V}_w^2\\ \mathbf{V}_w^3\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mathbf{V}_s^1\\ \mathbf{V}_s^2\\ \mathbf{V}_s^3\end{Bmatrix} \text{ atau } \mathbf{V}$$
$$= \mathbf{f}\mathbf{Q} + \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_w + \mathbf{V}_s \qquad (9.23)$$

Dengan menyubstitusikan Pers. (9.21) ke dalam (9.23), diperoleh:

$$\mathbf{V} = \mathbf{f}\left(\mathbf{B}_0\mathbf{F}^*_{free} + \mathbf{B}_R\mathbf{R}\right) + \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_w + \mathbf{V}_s \tag{9.24}$$

Sejauh ini, kondisi kesetimbangan dan sifat fleksibilitas telah ditinjau. Selanjutnya, kondisi kompatibilitas diturunkan berdasarkan prinsip gaya virtual.

$$\delta W^*_{ext} = \delta W^*_{int} \tag{9.25}$$

Kerja virtual komplementer internal adalah:

$$\delta W^*_{int} = \delta\mathbf{Q}^T\mathbf{V} \tag{9.26}$$

Perlu dicatat bahwa:

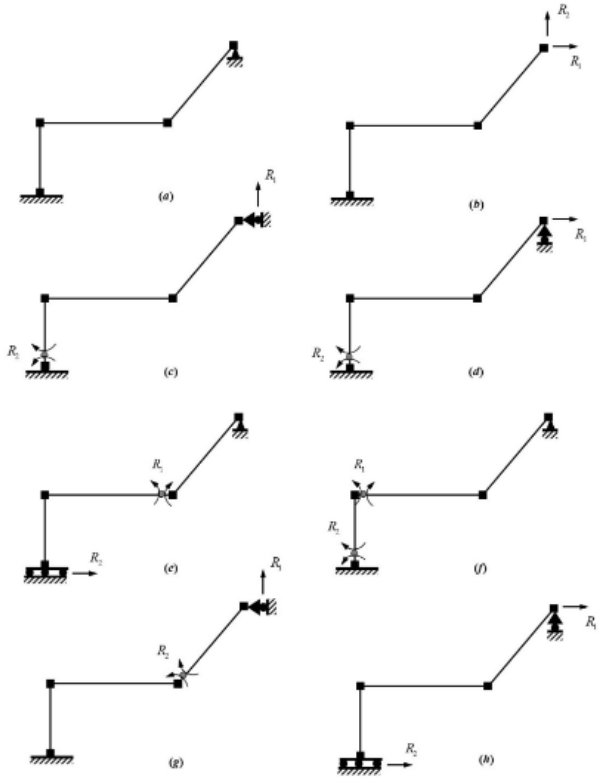
$$\delta\mathbf{Q}^T = \delta\mathbf{F}^{*T}_{free}\mathbf{B}_0^T + \delta\mathbf{R}^T\mathbf{B}_R^T \tag{9.27}$$

Dengan menyubstitusikan Persamaan (9.27) ke dalam (9.26), diperoleh:

$$\delta W^*_{int} = \delta\mathbf{Q}^T\mathbf{V} = \left(\delta\mathbf{F}^{*T}_{free}\mathbf{B}_0^T + \delta\mathbf{R}^T\mathbf{B}_R^T\right)\mathbf{V} = \delta\mathbf{F}^{*T}_{free}\mathbf{B}_0^T\mathbf{V} + \delta\mathbf{R}^T\mathbf{B}_R^T\mathbf{V} \tag{9.28}$$

Usaha maya komplementer eksternal adalah:

$$\delta W^*_{ext} = \delta\mathbf{F}^{*T}_{free}\mathbf{U}_{free} \tag{9.29}$$



Gambar 9.11 (a) Portal Tak Tentu Derajat Dua; (b) – (g) Pilihan Struktur Primer yang Dapat Diterima; (h) Pilihan Struktur Primer yang Tidak Tepat.

Dengan menerapkan prinsip gaya virtual, diperoleh:

$$\delta W_{int}^{*} = \delta W_{ext}^{*} \rightarrow \delta \mathbf{F}_{free}^{*T}\left(\mathbf{B}_0^T\mathbf{V} - \mathbf{U}_{free}\right) + \delta \mathbf{R}^T\mathbf{B}_R^T\mathbf{V} = 0 \tag{9.30}$$

Dari kesembarangan $\delta\mathbf{F}_{free}^{*}$ dan $\delta\mathbf{R}$, dapat disimpulkan bahwa:

$$\mathbf{B}_0^T\mathbf{V} - \mathbf{U}_{free} = \mathbf{0} \tag{9.31}$$

Dan

$$\mathbf{B}_R^T\mathbf{V} = \mathbf{0} \tag{9.32}$$

Persamaan (9.31) memberikan perpindahan titik simpul untuk sekumpulan deformasi elemen **V** yang diberikan, dan Persamaan (9.32) memberikan syarat kompatibilitas. Dengan menyubstitusikan Persamaan (9.24) ke dalam (9.32), diperoleh:

$$\mathbf{B}_R^T\mathbf{f}\mathbf{B}_0\mathbf{F}_{free}^{*} + \mathbf{B}_R^T\mathbf{f}\mathbf{B}_R\mathbf{R} + \mathbf{B}_R^T\mathbf{V}_0 + \mathbf{B}_R^T\mathbf{V}_w + \mathbf{B}_R^T\mathbf{V}_S = \mathbf{0} \tag{9.33}$$

Atau

$$\bar{\mathbf{F}}_{R0}\mathbf{F}^{*}_{free} + \bar{\mathbf{F}}_{RR}\mathbf{R} + \mathbf{U}_{R0} + \mathbf{U}_{RW} + \mathbf{U}_{RS} = \mathbf{0} \qquad (9.34)$$

Dimana

$$\bar{\mathbf{F}}_{R0} = \mathbf{B}_R^T\mathbf{f}\mathbf{B}_0; \quad \bar{\mathbf{F}}_{RR} = \mathbf{B}_R^T\mathbf{f}\mathbf{B}_R; \quad \mathbf{U}_{R0} = \mathbf{B}_R^T\mathbf{V}_0; \quad \mathbf{U}_{RW} = \mathbf{B}_R^T\mathbf{V}_w; \text{ dan } \mathbf{U}_{RS} = \mathbf{B}_R^T\mathbf{V}_S \qquad (9.35)$$

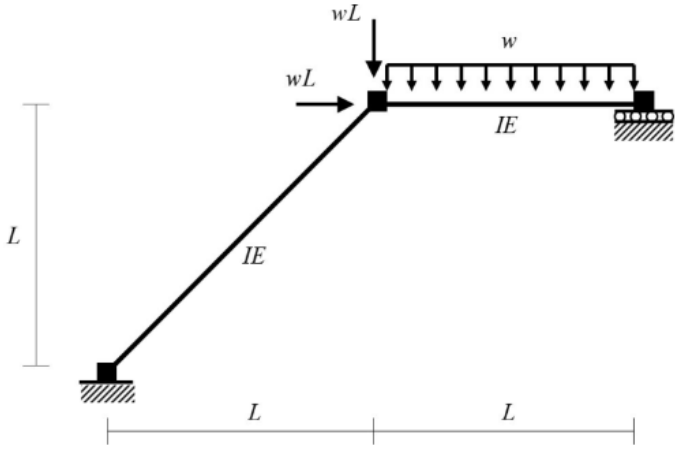
Kondisi kompatibilitas dari Pers. (9.34) dapat diselesaikan untuk redundan $\mathbf{R}$. Interpretasi fisik dari Pers. (9.34) adalah bahwa penjumlahan perpindahan relatif pada lokasi yang dilepaskan yang diakibatkan oleh beban terapan yang diberikan $\mathbf{F}^{*}_{free}$, redundan $\mathbf{R}$, deformasi awal, beban batang, dan pergerakan tumpuan adalah sama dengan nol.

Contoh 9.3

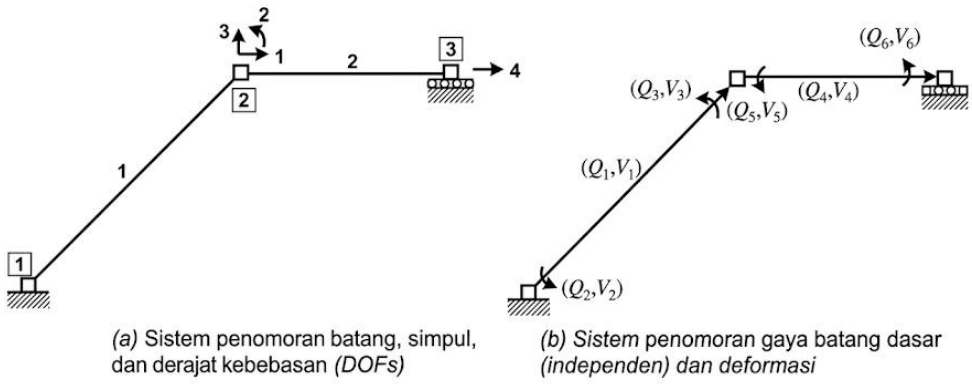
Gunakan metode fleksibilitas untuk menganalisis rangka tak-dapat-mulur (*inextensible frame*) yang ditunjukkan pada Gambar 9.12 dan tentukan semua perpindahan titik simpul.

- **Penyelesaian**: Sistem penomoran elemen, titik simpul, derajat kebebasan (DOF), gaya elemen dasar, dan deformasi elemen dasar ditunjukkan pada Gambar 9.13. Berdasarkan tinjauan statika yang dijelaskan dalam Bab 3, persamaan kesetimbangan matriksnya adalah:

$$\mathbf{F}_{free} = \mathbf{B}_{free}\mathbf{Q} + \mathbf{F}^{0}_{free} \text{ atau } \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2L} & \frac{1}{2L} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2L} & -\frac{1}{2L} & 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{wL}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Gambar 9.12 Contoh 9.3.

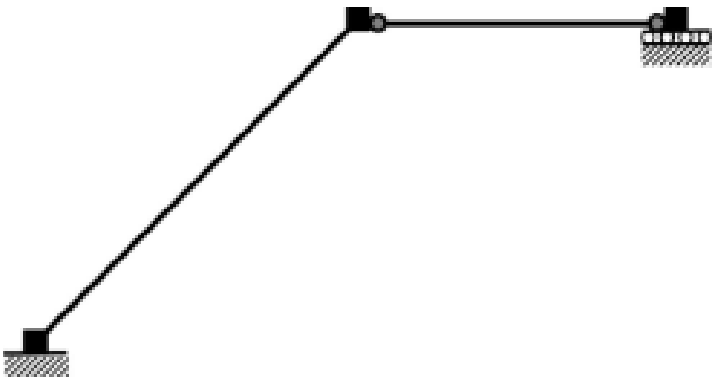


Gambar 9.13 Contoh 9.3 (Lanjutan).

Dari pertimbangan statis, diketahui bahwa derajat ketidaktentuan statis (SI) dari sistem ini adalah $6 - 4 = 2$. Dengan demikian, dua pelepasan gaya diperlukan agar rangka ini menjadi statis tertentu. Gaya batang dasar Q_5 dan Q_6 dipilih sebagai gaya redundan.

$$\mathbf{R} = \lfloor R_1 \quad R_2 \rfloor^T = \lfloor Q_5 \quad Q_6 \rfloor^T$$

Struktur utama ditunjukkan pada Gambar 9.14. Dengan demikian, gaya batang dasar $\mathbf{Q}$ dapat dinyatakan dalam beban terapan yang diberikan $\mathbf{F}_{free}^{0}$ dan redundan $\mathbf{R}$ sebagai:



Gambar 9.14 Contoh 9.3 (Lanjutan).

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}_0\mathbf{F}_{free}^{*} + \mathbf{B}_R\mathbf{R} \rightarrow \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ L & -L & -1 & L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{free1}^{*} \\ F_{free2}^{*} \\ F_{free3}^{*} \\ F_{free4}^{*} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}L} & -\frac{1}{\sqrt{2}L} \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$$

Interpretasi fisik matriks $\mathbf{B}_0$ dan $\mathbf{B}_R$ ditunjukkan pada Gambar 9.15 hingga 9.17. Matriks fleksibilitas sebelum perakitan adalah:

$$\mathbf{V} = \mathbf{fQ} + \mathbf{V}_w \text{ atau } \begin{Bmatrix}\mathbf{V}_1\\ \mathbf{V}_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{f}_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{Q}_1\\ \mathbf{Q}_2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mathbf{V}_w^1\\ \mathbf{V}_w^2\end{Bmatrix}$$

Untuk anggota 2, diperoleh:

$$\mathbf{V}_w^2 = \begin{bmatrix}0 & -\frac{wL^3}{24IE} & \frac{wL^3}{24IE}\end{bmatrix}^T$$

$$\begin{Bmatrix}V_1\\ V_2\\ V_3\\ V_4\\ V_5\\ V_6\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}L}{3IE} & -\frac{L}{3\sqrt{2}IE} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{L}{3\sqrt{2}IE} & \frac{\sqrt{2}L}{3IE} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{3IE} & -\frac{L}{6IE}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{6IE} & \frac{L}{3IE}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ Q_3\\ Q_4\\ Q_5\\ Q_6\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ -\frac{wL^3}{24IE}\\ \frac{wL^3}{24IE}\end{Bmatrix}$$

Persamaan kompatibilitas matriks adalah:

$$\underbrace{\bar{\mathbf{F}}_{R0}\mathbf{F}_{free}^*}_{\mathbf{U}_{RP}} + \underbrace{\bar{\mathbf{F}}_{RR}\mathbf{R}}_{\mathbf{U}_{RR}} + \mathbf{U}_{RW} = \mathbf{0}$$

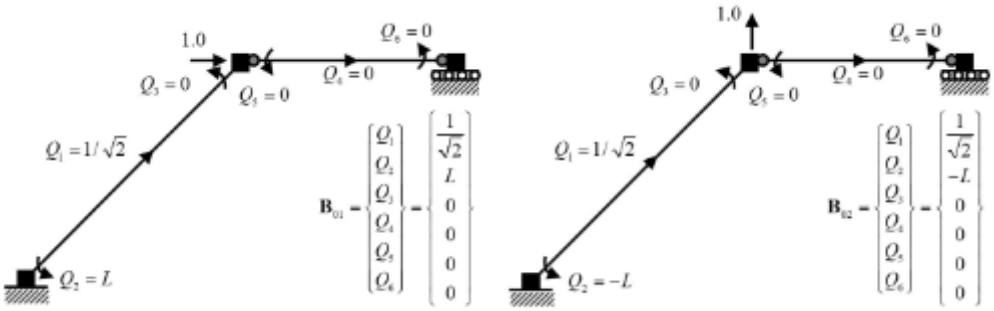
di mana

$$\bar{\mathbf{F}}_{RR} = \mathbf{B}_R^T\mathbf{f}\mathbf{B}_R = \frac{L}{IE}\begin{bmatrix}3.633 & 1.012\\ 1.012 & 0.805\end{bmatrix};$$

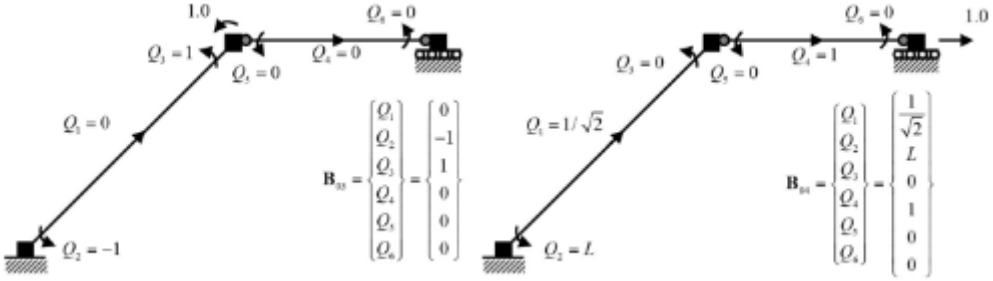
$$\bar{\mathbf{F}}_{R0} = \mathbf{B}_R^T\mathbf{f}\mathbf{B}_0 = \frac{L}{IE}\begin{bmatrix}1.179L & -1.179L & -2.12132 & 1.179L\\ 0.471L & -0.471L & -0.707 & -0.471L\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F}_{free}^* = \begin{bmatrix}wL & -\frac{3}{2}wL & 0 & 0\end{bmatrix}^T; \quad \mathbf{U}_{RP} = \bar{\mathbf{F}}_{R0}\mathbf{F}_{free}^* = \begin{bmatrix}\frac{2.946wL^3}{IE} & \frac{1.179wL^3}{IE}\end{bmatrix}^T$$

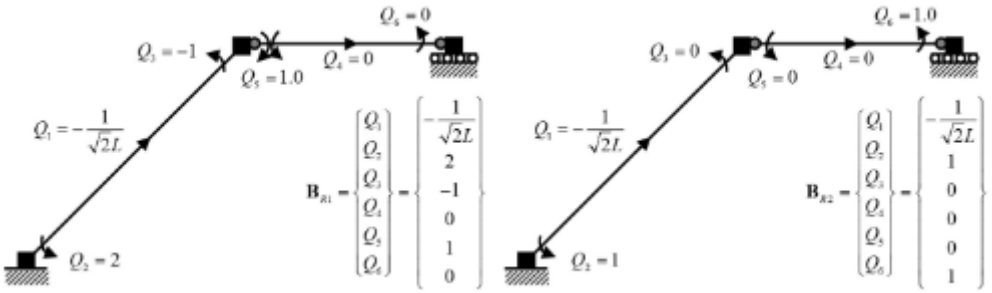
$$\mathbf{U}_{RW} = \mathbf{B}_R^T\mathbf{V}_w = \begin{bmatrix}-\frac{wL^3}{24IE} & \frac{wL^3}{24IE}\end{bmatrix}^T$$



Gambar 9.15 Contoh 9.3 (Lanjutan).



Gambar 9.16 Contoh 9.3 (Lanjutan).



Gambar 9.17 Contoh 9.3 (Lanjutan).

Interpretasi fisik dari persamaan kompatibilitas matriks adalah bahwa penjumlahan rotasi relatif pada lokasi yang dilepaskan yang diakibatkan oleh beban terapan yang diberikan $\mathbf{F}^*_{free}$, redundan $\mathbf{R}$, dan beban batang adalah sama dengan nol.

$$\mathbf{R} = -[\bar{\mathbf{F}}_{RR}]^{-1}(\mathbf{U}_{RP} + \mathbf{U}_{RW}) \Rightarrow \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.580\, wL^2 \\ -0.786\, wL^2 \end{Bmatrix}$$

Gaya-gaya batang dasar Q adalah:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ L & -L & -1 & L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} wL \\ -\frac{3wL}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}L} & -\frac{1}{\sqrt{2}L} \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.580wL^2 \\ -0.786wL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.613wL \\ 0.553wL^2 \\ 0.580wL^2 \\ 0 \\ -0.580wL^2 \\ -0.786wL^2 \end{Bmatrix}$$

Deformasi dasar elemen V adalah:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}L}{3IE} & -\frac{L}{3\sqrt{2}IE} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L}{3\sqrt{2}IE} & \frac{\sqrt{2}L}{3IE} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{3IE} & -\frac{L}{6IE} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{6IE} & \frac{L}{3IE} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.613wL \\ 0.553wL^2 \\ 0.580wL^2 \\ 0 \\ -0.580wL^2 \\ -0.786wL^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{wL^3}{24IE} \\ \frac{wL^3}{24IE} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{0.124wL^3}{IE} \\ \frac{0.143wL^3}{IE} \\ 0 \\ -\frac{0.104wL^3}{IE} \\ -\frac{0.124wL^3}{IE} \end{Bmatrix}$$

Perpindahan simpul $\mathbf{U}_{free}$ bebas adalah:

$$\mathbf{U}_{free} = \mathbf{B}_0^T \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{0.124wL^4}{IE} & -\frac{0.124wL^4}{IE} & \frac{0.0196wL^3}{IE} & \frac{0.124wL^4}{IE} \end{bmatrix}^T$$

Gaya-gaya ujung elemen secara lengkap dapat ditentukan dari persamaan kesetimbangan matriks untuk setiap elemen. Sebagai contoh, gaya-gaya ujung lengkap untuk elemen 1 adalah:

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{b}_B^{(1)} \mathbf{Q}_1 \text{ atau } \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_3^{(1)} \\ P_4^{(1)} \\ P_5^{(1)} \\ P_6^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2L} & \frac{1}{2L} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2L} & \frac{1}{2L} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2L} & \frac{1}{2L} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2L} & -\frac{1}{2L} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.613wL \\ 0.553wL^2 \\ 0.580wL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -wL \\ 0.133wL \\ 0.553wL^2 \\ wL \\ -0.133wL \\ 0.580wL^2 \end{Bmatrix}$$

Contoh 9.4

Gunakan metode fleksibilitas untuk menentukan gaya-gaya pada semua batang rangka batang yang diperlihatkan, akibat ketidakpas-an (*lack of fit*) sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 9.18. Untuk semua batang, *E* = 210 GPa.

Anggota	L (m)	Area (m^2)	Ketidaksesuaian (m)
1	2	0.0016	0.01
2	1.5	0.0016	-0.004
3	2	0.0016	0
4	1.5	0.0016	0.002
5	2.5	0.0008	-0.002
6	2.5	0.0008	0

Penyelesaian: Sistem penomoran gaya dan deformasi dasar ditunjukkan pada Gambar 9.19a. Dari pertimbangan keseimbangan, diketahui bahwa derajat ketidaktentuan statis adalah sama dengan $6-5=1$. Dengan demikian, satu pelepasan diperlukan untuk membuat rangka batang ini menjadi statis tertentu. Gaya batang dasar Q_6 dipilih sebagai redundan. Oleh karena itu, struktur utama ditunjukkan pada Gambar 9.19b. Matriks $\mathbf{B}_0$ dan $\mathbf{B}_R$ ditunjukkan pada Gambar 9.20. Hubungan statis antara $\mathbf{Q}$ dan $\mathbf{R}$ dapat dituliskan sebagai:

$$\mathbf{Q}=\mathbf{B}_R\mathbf{R}\Rightarrow\begin{Bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\\Q_4\\Q_5\\Q_6\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.8\\-0.6\\-0.8\\-0.6\\1\\1\end{bmatrix}\{R_1\}$$

Deformasi dasar awal elemen $\mathbf{v}_0$ akibat ketidakpas-an (*lack of fi*t) adalah:

$$\mathbf{v}_0=\begin{bmatrix}V_0^1 & V_0^2 & V_0^3 & V_0^4 & V_0^5 & V_0^6\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}0.01 & -0.004 & 0 & 0.002 & -0.002 & 0\end{bmatrix}^T$$

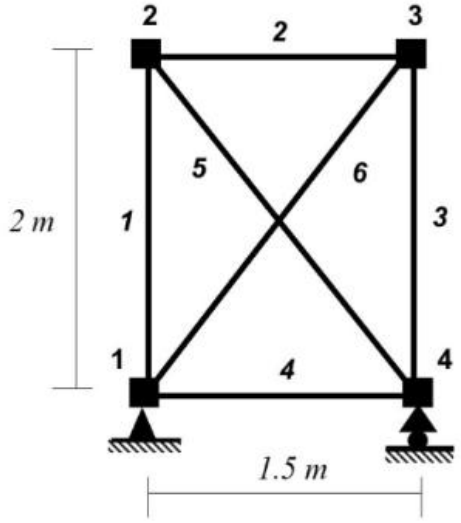
Persamaan fleksibilitas yang belum dirakit adalah:

$$\mathbf{V}=\mathbf{fQ}+\mathbf{v}_0 \text{ atau } \begin{Bmatrix}V_1\\V_2\\V_3\\V_4\\V_5\\V_6\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1&0&0&0&0&0\\0&f_2&0&0&0&0\\0&0&f_3&0&0&0\\0&0&0&f_4&0&0\\0&0&0&0&f_5&0\\0&0&0&0&0&f_6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\\Q_4\\Q_5\\Q_6\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}V_0^1\\V_0^2\\V_0^3\\V_0^4\\V_0^5\\V_0^6\end{Bmatrix}$$

Dimana

$$f_1=\frac{L_1}{EA_1}=\frac{1.25}{210000};\quad f_2=\frac{L_2}{EA_2}=\frac{0.9375}{210000};\quad f_3=\frac{L_3}{EA_3}=\frac{1.25}{210000};$$

$$f_4=\frac{L_4}{EA_4}=\frac{0.9375}{210000};\quad f_5=\frac{L_5}{EA_5}=\frac{3.75}{210000};\quad f_6=\frac{L_6}{EA_6}=\frac{3.75}{210000};$$



Gambar 9.18 Contoh 9.4.

Persamaan kompatibilitas matriks adalah:

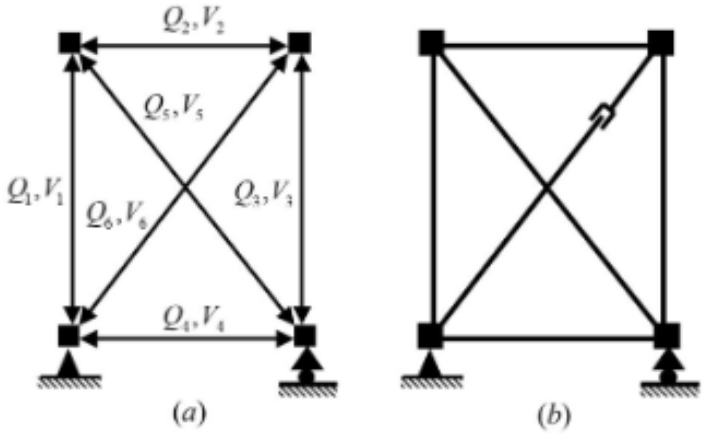
$$\bar{\mathbf{F}}_{RR}\mathbf{R} + \mathbf{U}_{R0} = \mathbf{0}$$

Dimana

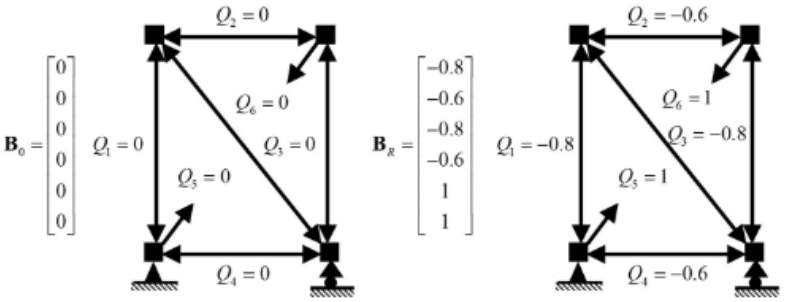
$$\bar{\mathbf{F}}_{RR} = \mathbf{B}_R^T\mathbf{f}\mathbf{B}_R = [0.04655 \times 10^{-3}] \quad \text{dan} \quad \mathbf{U}_{R0} = \mathbf{B}_R^T\mathbf{v}_0 = -8.8 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

Gaya redundan R_1 adalah:

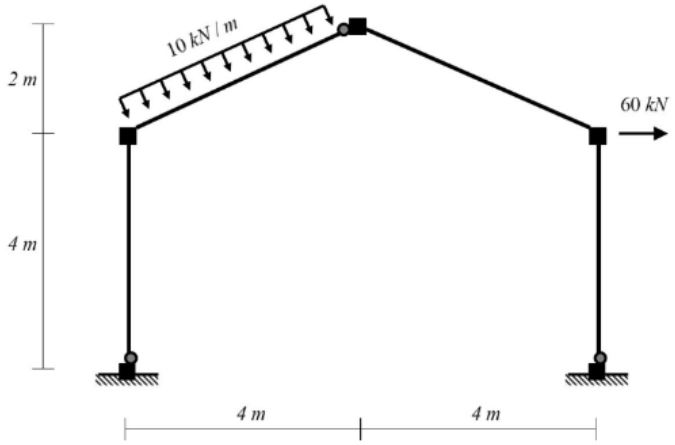
$$\mathbf{R} = -[\bar{\mathbf{F}}_{RR}]^{-1}\mathbf{U}_{R0} \Rightarrow Q_6 = R_1 = -\frac{-8.8 \times 10^{-3}}{0.04655 \times 10^{-3}} = 189.04\ \text{kN}$$



Gambar 9.19 Contoh 9.4 (Lanjutan).



Gambar 9.20 Contoh 9.4 (Lanjutan)



Gambar 9.21 Soal 9.1.

Gaya aksial pada semua elemen adalah:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}_R\mathbf{R} \Rightarrow \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ -0.6 \\ -0.8 \\ -0.6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \{189.04\} = \begin{Bmatrix} -151.23 \\ -113.42 \\ -151.23 \\ -113.42 \\ 189.04 \\ 189.04 \end{Bmatrix} \text{ kN}$$

DAFTAR PUSTAKA

Agarwal, A., & Mthembu, L. (2022). Structural analysis and weight optimization of automotive chassis by Latin hypercube sampling using metal matrix composites. Materials Today: Proceedings, 60, 2132-2140.

Ali, S. S., Kaur, R., & Khan, S. (2023). Identification of innovative technology enablers and drone technology determinants adoption: a graph theory matrix analysis framework: SS Ali et al. Operations Management Research, 16(2), 830-852.

Amorim, D. L. N. D. F., Proença, S. P. B., & Flórez-López, J. (2026). Formulation for the matrix analysis of frame structures including fracture mechanics concepts: Applications in tunnel linings and airplane fuselage panels. International Journal of Damage Mechanics, 35(1), 46-71.

Arai, M., Kuroda, S., & Ito, K. (2021). Static elastic-plastic analysis of a pipe structure by the transfer matrix method. Journal of Pressure Vessel Technology, 143(1), 011801.

Bao, L., Han, X., Yu, L., Bao, Y., Ma, M., Gao, Z., ... & Zhao, J. (2025, September). Automatic identification of dense modals in bridges using a reconstructed Hankel matrix subspace. In Structures (Vol. 79, p. 109564). Elsevier.

Cannizzaro, F., Fiore, I., Caddemi, S., & Caliò, I. (2025). Exact closed-form dynamic stiffness matrix of damaged frames comprising Timoshenko–Ehrenfest beams. Journal of Vibration and Control, 31(11-12), 2036-2057.

Cascardi, A., Verre, S., Ombres, L., & Aiello, M. A. (2024). Carbon Fabric Reinforced Cementitious Mortar confinement of concrete cylinders: The matrix effect for multi-ply wrapping. Composite Structures, 332, 117919.

Gutiérrez-Serpa, A., Kundu, T., Pasán, J., Jiménez-Abizanda, A. I., Kaskel, S., Senkovska, I., & Pino, V. (2022). Zirconium-based metal–organic framework mixed-matrix membranes as analytical devices for the trace analysis of complex cosmetic samples in the assessment of their personal care product content. ACS applied materials & interfaces, 14(3), 4510.

Hasibuan, S. A. R. S. (2025). Structural Analysis of 2D Frame Using the Stiffness Matrix Method in Python with Validation Against SAP2000. Journal of Civil Engineering Building and Transportation, 9(1), 155-163.

He, Y., Feng, J., Sun, B., Wang, F., Zhang, L., & Jiang, J. (2024). Damage identification based on the inner product matrix and parallel convolution neural network for frame structure. Scientific Reports, 14(1), 30548.

Janorschke, C., Popescu, S. S., Osburg, J., Lu, X., Xie, J., Yaman, E., ... & Tilz, R. R. (2026). Left Ventricular Motion Analysis Framework for the MATRIX-VT Study. International Journal of Computer Assisted Radiology and Surgery, 21(2), 333-341.

Kaveh, A., Javadi, S. M., & Moghanni, R. M. (2020). Reliability analysis via an optimal covariance matrix adaptation evolution strategy: Emphasis on applications in civil engineering. Periodica Polytechnica Civil Engineering, 64(2), 579-588.

Li, S. Q., & Chen, Y. S. (2020). Analysis of the probability matrix model for the seismic damage vulnerability of empirical structures. Natural Hazards, 104(1), 705-730.

Liao, H., Chen, W., & Jiang, J. (2024). Reverberation ray matrix analysis for wave propagation in beam structures with rigid components. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 31(30), 12997-13006.

Nuzzo, I., Caterino, N., & Pampanin, S. (2022). Seismic design framework based on loss-performance matrix. Journal of Earthquake Engineering, 26(8), 4325-4345.

Palizvan Zand, J., Atasoy, A., Katebi, J., & Hajirasouliha, I. (2026). Advanced dimensional analysis for robust control of benchmark structural system via generalized linear matrix inequalities. Journal of Vibration and Control, 10775463261458231.

Panigrahi, S. K., Patel, C., Chourasia, A., & Bisht, R. S. (2024). Cross-correlation difference matrix based structural damage detection approach for building structures. Journal of Civil Structural Health Monitoring, 14(6), 1439-1453.

Park, S. J., & Leem, C. S. (2025). Industry-Service Matrix for Autonomous Vehicle: Framework Development and Empirical Validation. IEEE Access, 13, 204260-204284.

Plevris, V., & Ahmad, A. (2025). Deriving analytical solutions using symbolic matrix structural analysis: Part 2–Plane trusses. Heliyon, 11(4).

Sherman, T. D., Gao, T., & Fertig, E. J. (2020). CoGAPS 3: Bayesian non-negative matrix factorization for single-cell analysis with asynchronous updates and sparse data structures. BMC bioinformatics, 21(1), 453.

Silva, M., Martinez, B., Figueiredo, E., Costa, J. C., Yang, Y., & Mascareñas, D. (2020). Nonnegative matrix factorization-based blind source separation for full-field and high-resolution modal identification from video. Journal of sound and vibration, 487, 115586.

Singh, H., Tiwary, A. K., Jain, A., & Shah, S. K. (2023). Comparison of numerical analysis of portal frame using conventional and matrix approach methods. Materials Today: Proceedings.

Sivori, D., Lepidi, M., & Cattari, S. (2024). Analytical identification of dynamic structural models: Mass matrix of an isospectral lumped mass model. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 53(8), 2447-2467.

Suthahar, P., Arunkumar, R., Rajeshwaran, M., Asaithambi, T., & Parthasarathy, S. (2023). Design and analysis of bicycle frame by using metal matrix composites. Materials Today: Proceedings.

Tabia, Z., Bricha, M., El Mabrouk, K., & Vaudreuil, S. (2021). Manufacturing of a metallic 3D framework coated with a bioglass matrix for implant applications. Journal of Materials Science, 56(2), 1658-1672.

Tong, J. Z., Pan, W. H., & Pi, Y. L. (2020, February). Exact solutions for second-order effect of imperfect beams and frames based on matrix structural analysis. In Structures (Vol. 23, pp. 677-689). Elsevier.

Upadhyay, J., & Upadhyay, S. (2021, July). A framework for private matrix analysis in sliding window model. In International Conference on Machine Learning (pp. 10465-10475). PMLR.

Wang, N., Guo, J., Zhang, X., Zhang, J., Li, Z., Meng, F., ... & Ren, X. (2021). The circular economy transformation in industrial parks: Theoretical reframing of the resource and environment matrix. Resources, Conservation and Recycling, 167, 105251.

Wu, T., Zhao, Q., Guo, J., Wang, H., Zhang, J., & Hong, J. (2024). Comprehensive accuracy analysis for large closed-loop deployable structures based on matrix structure analysis and linear-complementarity-based contact analysis of spatial joint clearances. Mechanism and Machine Theory, 201, 105750.

Yang, Y., Li, S., Wu, P., & Feng, W. (2026). Design and Analysis of an Inverse-Free Zeroing Neural Network Model for Matrix Decomposition. IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence.

Zhang, Y., Ma, L., Lv, Y., & Tan, T. (2022). Facile manufacture of COF-based mixed matrix membranes for efficient CO2 separation. Chemical Engineering Journal, 430, 133001.

Zhong, J., Zhou, S., Wang, H., & Hu, H. (2024). Regional seismic fragility of bridge network derived by covariance matrix model of bridge portfolios. Engineering Structures, 309, 118035.

Analisis Matrix Kerangka Struktur Bangunan

Dr. Ir. Agus Wibowo, M.Kom, M.Si, MM

BIO DATA PENULIS

Penulis memiliki berbagai disiplin ilmu yang diperoleh dari Universitas Diponegoro (UNDIP) Semarang. dan dari Universitas Kristen Satya Wacana (UKSW) Salatiga. Disiplin ilmu itu antara lain teknik elektro, komputer, manajemen dan ilmu sosiologi. Penulis memiliki pengalaman kerja pada industri elektronik dan sertifikasi keahlian dalam bidang Jaringan Internet, Telekomunikasi, Artificial Intelligence, Internet Of Things (IoT), Augmented Reality (AR), Technopreneurship, Internet Marketing dan bidang pengolahan dan analisa data (komputer statistik).

Penulis adalah pendiri dari Universitas Sains dan Teknologi Komputer (Universitas STEKOM) dan juga seorang dosen yang memiliki Jabatan Fungsional Akademik Lektor Kepala (Associate Professor) yang telah menghasilkan puluhan Buku Ajar ber ISBN, HAKI dari beberapa karya cipta dan Hak Paten pada produk IPTEK. Sejak tahun 2023 penulis tercatat sebagai Dosen luar biasa di Fakultas Ekonomi & Bisnis (FEB) Universitas Diponegoro Semarang. Penulis juga terlibat dalam berbagai organisasi profesi dan industri yang terkait dengan dunia usaha dan industri, khususnya dalam pengembangan sumber daya manusia yang unggul untuk memenuhi kebutuhan dunia kerja secara nyata.

YAYASAN PRIMA AGUS TEKNIK

PENERBIT :
YAYASAN PRIMA AGUS TEKNIK
Jl. Majapahit No. 605 Semarang
Telp. (024) 6723456. Fax. 024-6710144
Email : penerbit_ypat@stekom.ac.id

ISBN 978-634-7695-58-1 (PDF)
9 786347 695581